

УДК 531.3

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С УПРУГИМИ РАДИАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ РЕБРАМИ

И. Б. Богоряд, Н. П. Лаврова

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики
Томского государственного университета, 634050 Томск
E-mail: niipmm@mail.tomsknet.ru

Формулируется и с помощью численных методов решается краевая задача о вихревом течении вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся полости, имеющей форму кругового цилиндра, в который в качестве источников интенсивного вихреобразования встроены упругие радиальные ребра (пластины). С использованием результатов решения вычислен коэффициент лобового сопротивления ребер.

Ключевые слова: вязкая жидкость, упругие радиально расположенные ребра, вихревое течение.

Введение. Движение жидкости, заполняющей подвижный сосуд с упругими (или упруго подвешенными жесткими) радиально расположенными ребрами, исследовалось в экспериментальных [1, 2] и расчетных [3, 4] работах. Интерес к решению подобного рода задач обусловлен необходимостью получения большей диссипации энергии жидкости, чем в случае жестких ребер. Получение такой диссипации представляется возможным, так как часть энергии жидкости расходуется на упругую деформацию ребра, вследствие чего интенсифицируются отрывные явления на его кромках.

Для получения математического описания рассматриваемых течений жидкости необходимо решать сложные краевые задачи гидродинамики. Поэтому вместо строгих математических моделей используются модели, основанные на результатах обработки данных, полученных в эксперименте. Кроме того, обычно при постановке аналогичных задач используется линейное приближение.

В данной работе рассматривается математическая модель, которая отличается от известных моделей тем, что в ней искомые функции и гидродинамические нагрузки определяются в результате решения сопряженной краевой задачи гидроупругости.

1. Постановка задачи. Полость в форме кругового цилиндра радиусом R_0 , в которой радиально расположены ребра в виде упругих пластин постоянной ширины b и толщины h , заполнена несжимаемой вязкой жидкостью и вращается с известной угловой скоростью $\omega_x(t)$. Одна грань пластины жестко закреплена на цилиндрической поверхности, другая является свободной.

Для описания движения жидкости и пластины вводятся следующие системы координат: неподвижная $O^*X^*Y^*Z^*$, ось O^*X^* которой совпадает с осью полости; подвижная $OXYZ$, связанная с полостью (оси O^*X^* и OX совпадают); подвижная связанная с полостью цилиндрическая система координат $Ox r \theta$ с ортами $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$; система координат

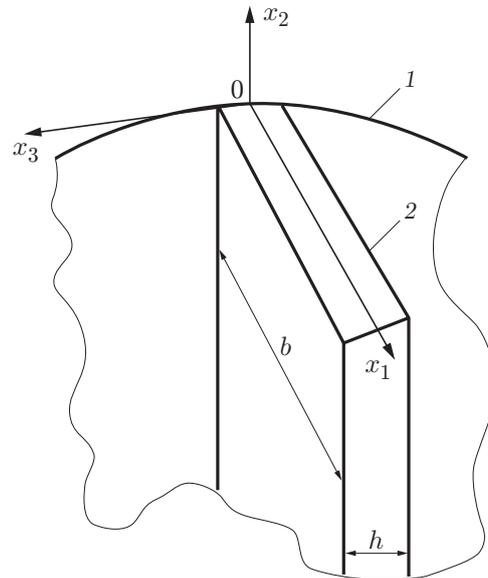


Рис. 1. Область полости в окрестности ребра:
1 — стенка полости, 2 — пластина

$ox_1x_2x_3$, связанная с ребром таким образом, что срединная поверхность пластины совпадает с координатной плоскостью ox_1x_2 ($\mathbf{i}_{x1} = -\mathbf{i}_r$, где \mathbf{i}_{x1} — орт оси ox_1), а ось ox_2 является линией защемления пластины на стенке полости (рис. 1).

Предполагается, что движение жидкости происходит при больших числах Рейнольдса, вычисленных по ширине ребра, в поле центробежных сил, обусловленных вращением полости [5]. При этом числа Рейнольдса Re и размеры полости такие, что влиянием крышки и дна на течение жидкости в основном объеме можно пренебречь. Это позволяет считать, что деформации жидкости в направлении оси Ox однородны, а соответствующие напряжения равны нулю. Таким образом, течение жидкости описывается двумерным нестационарным уравнением Навье — Стокса и уравнением неразрывности. Вводится допущение, согласно которому деформации ребра не зависят от координаты x_2 и описываются уравнением, следующим из гипотез Кирхгофа — Лява. При этом упругие прогибы пластины $w(x_1, t)$ малы:

$$|w(x_1, t)| \ll b. \quad (1)$$

С учетом принятых допущений уравнения для гидродинамической и “упругой” составляющих имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} - u_\theta (\text{rot}_1 \mathbf{u} + 2\omega_x) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \nu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) &= \omega_x^2 r, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u^2}{\partial \theta} + u_r (\text{rot}_1 \mathbf{u} + 2\omega_x) + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \nu \left(\Delta u_\theta + \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) &= -\dot{\omega}_x r, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\text{rot}_1 \mathbf{u} = \mathbf{i}_x \cdot \text{rot} \mathbf{u}$; $\mathbf{u} = \{u_x \equiv 0, u_r, u_\theta\}$ — вектор относительных скоростей; $\omega_x(t)$ — угловая скорость вращения полости вокруг оси O^*X^* [5].

В качестве граничных условий для уравнений (2) на смоченных поверхностях заданы условия прилипания:

— на цилиндрической поверхности полости ($r = R_0$)

$$u_r = u_\theta = 0; \quad (3)$$

— на поверхностях ребер

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}. \quad (4)$$

Независимые переменные x_1, r связаны соотношением $x_1 = R_0 - r$.

Упругие изгибные деформации ребра под действием гидродинамической нагрузки с интенсивностью $f(x_1, t)$ описываются уравнением [6]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho^0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x_1, t), \quad (5)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \gamma^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины на изгиб; E, γ, ρ^0 — модуль Юнга, число Пуассона и плотность материала пластины соответственно; h — толщина пластины. Нагрузка $f(x_1, t)$ в (5) определяется разностью гидродинамических напряжений на наветренной (индекс “(-)”) и подветренной (индекс “(+)”) поверхностях ребра

$$f(x_1, t) = \sigma_{\theta\theta}(x_1, \theta, t)|_{\theta=\theta(+)} - \sigma_{\theta\theta}(x_1, \theta, t)|_{\theta=\theta(-)},$$

где

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\rho\nu \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}.$$

Для уравнения (5) формулируются следующие граничные условия:

— на защемленном крае пластины прогиб и угол поворота равны нулю:

$$x_1 = 0: \quad w(x_1, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; \quad (6)$$

— на свободном крае изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю:

$$x_1 = b: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} = 0. \quad (7)$$

Краевые задачи (2)–(4) и (5)–(7) дополняются начальными условиями

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r}, 0) = p^0(\mathbf{r}), \quad w(x_1, 0) = w^0(x_1), \quad \frac{\partial w(x_1, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w^0(x_1)}{\partial t}.$$

2. Метод расчета. Гидродинамическая задача решается с использованием той же расчетной схемы, что и в [5], различаются только граничные условия прилипания на смоченной поверхности.

Схема решения упругой задачи (5), (7) основана на методе разделения переменных, в соответствии с которым

$$w(x_1, t) = q(t)\eta(x_1).$$

Вводится допущение, согласно которому форма вынужденных колебаний $\eta(x_1)$ несущественно отличается от формы собственных колебаний пластины по первой частоте (см. (5) при $f(x_1, t) = 0$). Иными словами, решением задачи является первое приближение по Бубнову — Галеркину. В этом случае [6]

$$\eta(x_1) = U(1,875x_1/b) - 0,7340V(1,875x_1/b),$$

где U, V — функции Крылова. Функция формы $\eta(x_1)$ нормирована таким образом, чтобы выполнялось условие $\eta(x_1)|_{x_1=b} = 1$.

Амплитуда колебаний срединной поверхности ребра (пластины) определяется в результате интегрирования уравнения

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \frac{\alpha}{\mu} \quad (8)$$

при начальных значениях $q(0) = 0$, $dq(0)/dt = 0$, $f(r, 0) = 0$. Здесь

$$\omega_0^2 = \left(\frac{1,875}{b}\right)^4 \frac{Eh^2}{12(1-\gamma^2)\rho^0}, \quad \alpha(t) = \int_{R_0}^{R_0-b} \eta(r)f(r,t) dr, \quad \mu = \rho^0 h \int_{R_0}^{R_0-b} \eta^2(r) dr.$$

Правая часть уравнения (8) неявно зависит от $\dot{q}(t)$, так как величина α получена из решения гидродинамической составляющей сопряженной задачи. Из (4) следует, что граничное условие прилипания для компоненты относительной скорости u_θ на поверхности пластины содержит $\dot{q}(t)$. В этом случае аналитическое решение (8) неизвестно, поэтому интегрирование уравнения (8) проводится методом Рунге — Кутты.

3. Результаты расчетов. Проведены расчеты коэффициента C_x лобового сопротивления ребра в виде упругой пластины. Расчеты выполнены для полого сосуда, содержащего жесткие ребра. Полость имеет те же размеры, что и в экспериментальных [7] и численных [5, 8] исследованиях: радиус $R_0 = 0,175$ м, высота $H = 0,4$ м, число равноотстоящих друг от друга ребер — четыре, относительная ширина ребра $b/R_0 = 0,2$. Жидкость в полости — вода, материал ребер — сплав алюминия АД. Закон вращения полости задается формулой

$$\omega_x = \lambda \gamma_0 \sin \lambda t = \frac{2\pi\gamma_0}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

На рис. 2 приведена зависимость коэффициента сопротивления C_x от амплитуды колебаний полости γ_0 . Для сравнения показана соответствующая зависимость для случая абсолютно жесткого ребра [8]. Все расчеты выполнены при частоте возбуждения $\lambda = 6,28 \text{ с}^{-1}$ по схеме, описанной в [8].

Влияние толщины пластины h на коэффициент сопротивления C_x показано на рис. 3.

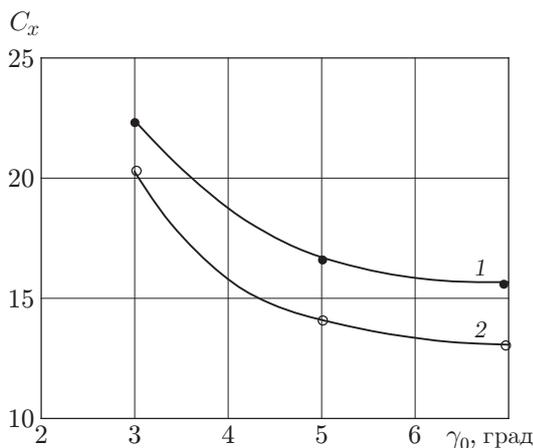


Рис. 2

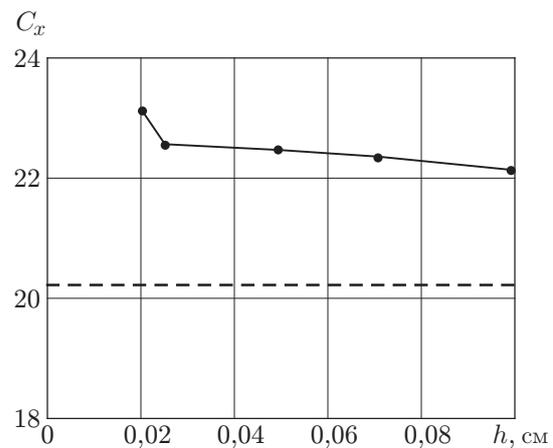


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость коэффициента сопротивления C_x от амплитуды колебаний полости γ_0 : 1 — упругое ребро ($h = 7,5 \cdot 10^{-2}$); 2 — жесткое ребро

Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления C_x от толщины пластины h : сплошная линия — упругое ребро, штриховая — жесткое ребро

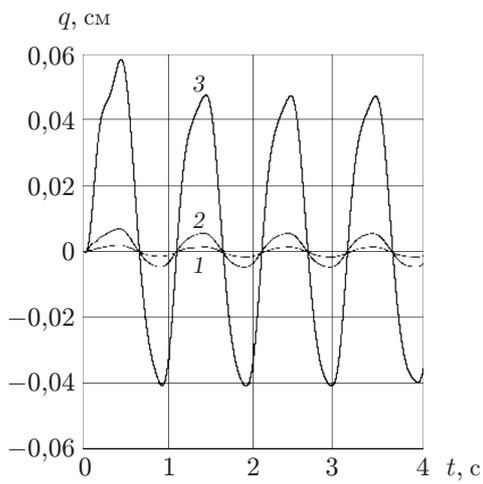


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость $q(t)$ при $h > 0,02$ см:
 1 — $h = 0,075$ см; 2 — $h = 0,050$ см; 3 — $h = 0,025$ см

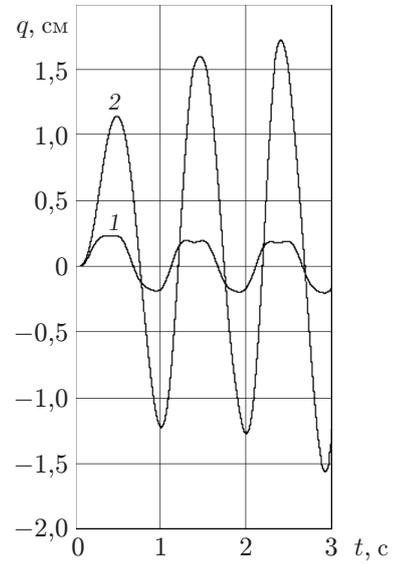


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость $q(t)$ при $h < 0,02$ см:
 1 — $h = 1,75 \cdot 10^{-2}$ см; 2 — $h = 10^{-2}$ см

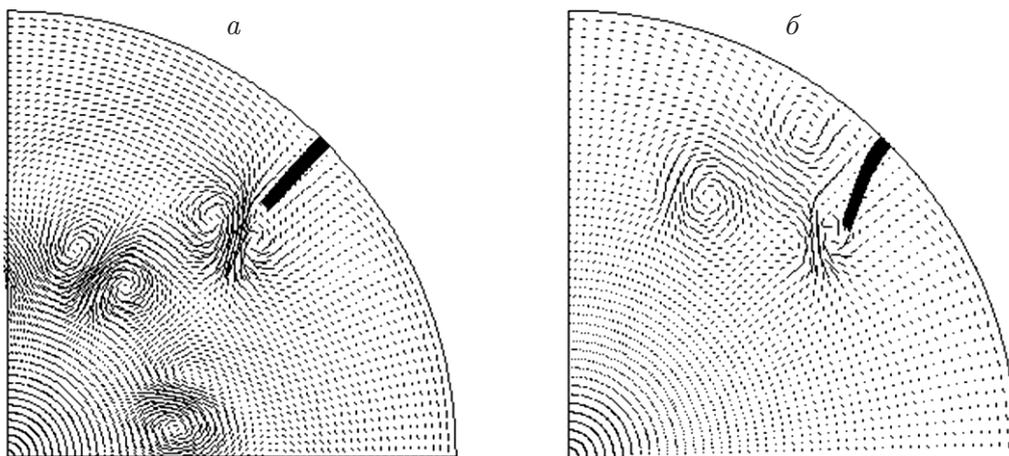


Рис. 6. Поле скоростей жидкости при различной частоте колебаний ребра:
 а — устойчивые колебания ($\omega_0 = 3,5\lambda$); б — неустойчивые колебания ($\omega_0 = 2\lambda$)

Варьирование толщины h в диапазоне $h = 0,01 \div 0,10$ см эквивалентно варьированию собственной частоты колебаний ребра ω_0 в диапазоне $\omega_0 = 13,8 \div 138,0$ с⁻¹ при соответствующем изменении правой части уравнения (8).

На рис. 4 представлена зависимость $q(t)$ при $h = 0,075; 0,050; 0,025$ см, что соответствует значениям $\omega_0 \approx 15\lambda, 10\lambda, 5\lambda$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Как и следовало ожидать, эти зависимости аналогичны установившимся синусоидальным колебаниям, которые описываются решением (8) в форме интеграла Дюамеля, если начальные условия являются однородными и априори возможно представление $\alpha/\mu = F_0 \sin(\lambda t)$.

На рис. 5 приведены зависимости $q(t)$ при $h = 1,75 \cdot 10^{-2}; 10^{-2}$ см, что соответствует значениям $\omega_0 \approx 3,5\lambda; 2\lambda$. В области низких частот, кратных частоте возбуждения, колебания являются устойчивыми релаксационными (кривая 1) и имеет место секулярный рост амплитуды (кривая 2) [9]. Кривая 2 получена в результате расчетов, имеющих характер количественных оценок, так как нарушается условие (1). Характерные для этих случаев поля скоростей жидкости представлены на рис. 6 для момента времени $t = 3T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельникова И. М., Микишев Г. Н. О некоторых особенностях колебаний жидкости в полостях с упругими демпфирующими перегородками // Прикл. механика. 1972. Т. 8, вып. 3. С. 106–112.
2. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
3. Аминов В. З., Мельникова И. М. Демпфирование колебаний жидкости в цилиндрической полости с упругими радиальными перегородками // Сб. докл. 3-го симп. “Колебания упругих конструкций с жидкостью”, Новосибирск, 29 июня — 5 июля 1976 г. М.: Центр науч.-техн. информ. “Волна”, 1976. С. 6–12.
4. Троценко В. А. Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006.
5. Богоряд И. Б., Лаврова Н. П. Численное моделирование вращения твердого тела с заполненной жидкостью полостью, имеющей радиальные ребра // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 135–139.
6. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Гостехтеоретиздат, 1958.
7. Чурилов Г. А., Клишев О. П., Мытарев А. И., Рабинович Б. И. Экспериментальное исследование тороидального МГД-элемента. Физическая и математическая модели процесса медленного торможения // Полет. 2001. № 9. С. 36–42.
8. Богоряд И. Б., Лаврова Н. П. Определение коэффициента сопротивления радиальных ребер в топливных баках ЖРД // Изв. РАН. 2007. Вып. 4. С. 70–73.
9. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. М.: Машиностроение, 1985.

*Поступила в редакцию 18/VI 2012 г.,
в окончательном варианте — 2/X 2012 г.*