

УДК 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ КАРРО ВДОЛЬ РАСТЯГИВАЕМОГО ЛИСТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЯВНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

М. Я. Малик, М. Хан, Т. Салахуддин

Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

E-mails: drmymalik@hotmail.com, mairorakzai33@gmail.com, taimoor_salahuddin@yahoo.com

Изучается магнитогидродинамическое течение жидкости Карро вдоль растягиваемого листа. С использованием преобразования подобия дифференциальные уравнения задачи в частных производных сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения используется метод ячеек Келлера. Проведено исследование решения при различных значениях числа Гартмана, числа Вайсенберга, параметра тонкостенности, показателя степени, вычислен коэффициент поверхностного трения. Проведено сравнение полученных результатов с известными данными.

Ключевые слова: магнитогидродинамическое течение, жидкость Карро, растягиваемый лист, метод ячеек Келлера.

DOI: 10.15372/PMTF20170609

Введение. Течение неньютоновских жидкостей вдоль растягиваемых листов встречается в таких технологических процессах, как экструзия, производство изоляционных материалов, производство стекловолоконистых материалов, горячая прокатка и токарная обработка металлов. При исследовании течения неньютоновской жидкости используются модель жидкости Кэссона, модель микрополярной жидкости, модель жидкости Вильямсона, модель вязкоупругой жидкости, модель жидкости, вязкость которой изменяется по закону гиперболического тангенса, и др. Широко применяется модель жидкости Карро, в которой вязкость изменяется по степенному закону. В работе [1] модель жидкости Карро используется при изучении двумерного течения жидкости вдоль сжимающегося листа в окрестности точки торможения. Установлено, что при увеличении параметра упругости коэффициент поверхностного трения незначительно увеличивается. В [2] модель жидкости Карро используется при исследовании течения в сужающейся артерии при наличии в ней стеноза. В работе [3] с помощью модели жидкости Карро изучено течение в двумерном пограничном слое вблизи растягиваемого по нелинейному закону листа. Задача решалась с учетом теплопереноса. Установлено, что толщина пограничного гидродинамического слоя уменьшается при увеличении параметра, характеризующего скорость растяжения листа. В работе [4] модель жидкости Карро применялась при изучении двумерного магнитогидродинамического (МГД) течения в окрестности точки торможения потока вблизи сжимающейся поверхности. Задача решалась с учетом теплопереноса с использованием

конвективных краевых условий. Наличие пограничного гидродинамического слоя учитывается при моделировании течений в таких технологических процессах, как вытяжка пластических пленок и медных нитей. В [5] изучено влияние теплопроводности и вязкости на установившееся течение жидкости Максвелла вдоль листа, растягиваемого по экспоненциальному закону. В [6] при исследовании трехмерного МГД-течения жидкости Кэссона вблизи пористого растягиваемого листа установлено, что с увеличением числа Гартмана и пористости коэффициент поверхностного трения увеличивается. В работе [7] с учетом излучения тепла получено численное решение задачи об установившемся пограничном слое, образующемся при течении жидкости вдоль растягиваемого по экспоненциальному закону листа. Обнаружено, что скорость потока уменьшается с увеличением параметра отсоса (вдува) и интенсивности магнитного поля, а температура увеличивается с увеличением интенсивности магнитного поля и уменьшается с увеличением коэффициента теплового скольжения. В [8] в результате исследования двумерного течения жидкости Кэссона вдоль растягиваемого по нелинейному закону листа установлено, что с увеличением толщины листа температура и толщина температурного пограничного слоя уменьшаются. В [9] с использованием модели теплопроводности Каттанео — Христова изучено течение пограничного слоя жидкости Максвелла вдоль растягиваемого листа переменной толщины. В работе [10] с помощью модели теплопроводности Каттанео — Христова найдено приближенное решение задачи о тепловом потоке вблизи листа, растягивающегося по экспоненциальному закону. МГД-течение наножидкости вблизи растягивающегося листа исследовано в [11]. В работе [12] с использованием модели теплопроводности Каттанео — Христова получено приближенное решение задачи о распространении тепла в потоке жидкости Вильямсона вблизи растягивающегося листа переменной толщины. В [13] приведены результаты численного решения задачи о пограничном слое в потоке наножидкости вблизи проницаемого растягивающегося по нелинейному закону листа с учетом частичного проскальзывания. В работе [14] с использованием конвективных краевых условий численно решена задача о течении жидкости Кэссона вблизи растягивающегося листа. Установившийся ламинарный слой в МГД-потоке несжимаемой жидкости Кэссона вблизи растягивающегося по экспоненциальному закону листа исследован в [15]. В работе [16] приведены результаты численного решения задачи об обтекании цилиндра потоком жидкости, вязкость которой изменяется по закону гиперболического тангенса. В [17] решена задача о тепловом излучении и вязкой диссипации в неустановившемся пограничном слое МГД-потока вблизи растягивающегося листа с учетом теплопереноса. Установлено, что скорость потока тепла увеличивается с увеличением степени нестационарности потока и числа Прандтля. В работе [18] численно решена задача о смешанной конвекции в МГД-потоке вблизи растягивающегося листа. Установлено, что скорость потока увеличивается с увеличением интенсивности смешанной конвекции и уменьшается с увеличением числа Гартмана. Также обнаружено, что при увеличении интенсивности смешанной конвекции и числа Гартмана скорость переноса тепла и массы уменьшается. В [19] приведено точное решение задачи об МГД-течении вязкой жидкости вблизи растягивающегося листа с учетом проскальзывания.

В данной работе изучается течение пограничного слоя в потоке жидкости Карро вблизи растягивающегося слоя переменной толщины. С использованием метода ячеек Келлера решено нелинейное параболическое уравнение и проведено сравнение полученных результатов с данными работ [12, 19].

Математическая формулировка задачи. Рассмотрим двумерное МГД-течение жидкости Карро вдоль листа переменной толщины, растягиваемого со скоростью $U_w = U_0(x + b)^m$ (U_0 — отсчетная скорость). Оси x, y направлены вдоль листа и по нормали к нему соответственно (рис. 1).

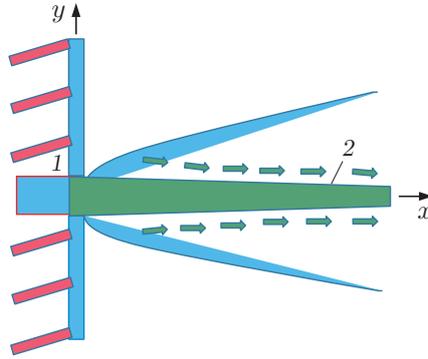


Рис. 1. Геометрия задачи:
1 — щель, 2 — лист переменной толщины

Уравнения неразрывности и сохранения количества движения записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{3(n-1)\Gamma^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \tag{2}$$

где u, v — компоненты вектора скорости жидкости в направлениях осей x и y соответственно; ν — кинематическая вязкость; n — показатель степени; B_0 — интенсивность магнитного поля; Γ — постоянная.

Соответствующие краевые условия записываются в следующем виде:

$$y = A(x+b)^{(1-m)/2}: \quad u = U_w(x) = U_0(x+b)^m, \quad v = 0, \quad y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0.$$

С использованием преобразований подобия

$$\eta = \sqrt{\frac{(m+1)U_0(x+b)^{m-1}}{2\nu}} y, \quad \psi = \sqrt{\frac{2\nu U_0(x+b)^{m+1}}{m+1}} F(\eta),$$

$$u = U_0(x+b)^m F'(\eta), \quad v = -\sqrt{\frac{(m+1)\nu U_0(x+b)^{m-1}}{2}} \left(F(\eta) + \eta \frac{m-1}{m+1} F'(\eta) \right)$$

уравнение (2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F''' - \frac{2m}{m+1} (F')^2 + FF'' + \frac{3(n-1)We^2}{2} F'''(F'')^2 - Ha^2 F' = 0,$$

где We, Ha — числа Вейсберга и Гартмана:

$$We^2 = U_0^3 \frac{(x+b)^{3m-1}}{2\nu} \Gamma^2(m+1), \quad Ha^2 = \frac{2\sigma B_0^2}{(m+1)U_0^2(x+b)^{m-1}}.$$

При этом уравнение (1) удовлетворяется тождественно. Краевые условия принимают вид

$$y \rightarrow \infty: \quad F(\alpha) = \alpha(1-m)/(1+m), \quad F'(\alpha) = 1, \quad F'(\infty) \rightarrow 0,$$

где $\alpha = A\sqrt{U_0(m+1)/(2\nu)}$ — параметр тонкостенности. С помощью замены искомой функции и независимой переменной $F(\zeta) = f(\eta - \alpha) = f(\eta)$ дифференциальное уравнение и краевые условия записываются в безразмерной форме

$$f''' - \frac{2m}{m+1} (f')^2 + ff'' + \frac{3(n-1)We^2}{m+1} f'''(f'')^2 - Ha^2 f' = 0; \tag{3}$$

$$y \rightarrow \infty: \quad f(0) = \alpha(1-m)/(1+m), \quad f'(0) = 1, \quad f'(\infty) \rightarrow 0. \tag{4}$$

Сдвиговое напряжение на поверхности листа τ_w , коэффициент поверхностного трения c_f и безразмерный коэффициент поверхностного трения $\sqrt{\text{Re}_x} c_f$ определяются по формулам

$$\tau_w = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(n-1)\Gamma^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3, \quad c_f = \frac{\tau_w}{\sqrt{(m+1)U_0/(2\nu)} (x+b)^{(3m-1)/2}},$$

$$\sqrt{\text{Re}_x} c_f = \left[f''(\eta) + \frac{(n-1)\text{We}^2}{2} (f''(\eta))^3 \right] \Big|_{\eta=0},$$

где $\text{Re}_x = \sqrt{U_0/\nu} x$.

Численное решение задачи. Численное решение уравнения (3) с краевыми условиями (4) получено с использованием метода ячеек Келлера. Уравнение (3) сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$u = f', \quad v = u';$$

$$v' - \frac{2m}{m+1} u^2 + f(u') + \frac{3(n-1)\text{We}^2}{2} v'(u)^2 - \text{Ha}^2 u = 0. \quad (5)$$

Уравнения $u = f'$, $v = u'$ в точке $(x^i, \eta_{j-1/2})$ аппроксимируются центральными разностями:

$$\frac{f_j^i - f_{j-1}^i}{h_j} = \frac{u_j^i + u_{j-1}^i}{2}, \quad \frac{u_j^i - u_{j-1}^i}{h_j} = \frac{v_j^i + v_{j-1}^i}{2}. \quad (6)$$

Уравнение (5) с использованием центральных разностей аппроксимируется в точке $(x^{i-1/2}, \eta_{j-1/2})$:

$$v_j^i - v_{j-1}^i - h \frac{2m}{m+1} (u_{j-1/2}^i)^2 + h f_{j-1/2}^i v_{j-1/2}^i + \frac{3(n-1)\text{We}^2}{2} (v_j^i - v_{j-1}^i)(v_{j-1/2}^i)^2 -$$

$$- h \text{Ha}^2 u_{j-1/2}^i = D_{j-1/2}. \quad (7)$$

Здесь $D_{j-1/2}$ — известные величины:

$$D_{j-1/2} = -(v_j^{i-1} - v_{j-1}^{i-1}) + h \frac{2m}{m+1} (u_{j-1/2}^{i-1})^2 - h f_{j-1/2}^{i-1} v_{j-1/2}^{i-1} -$$

$$- \frac{3(n-1)\text{We}^2}{2} (v_j^{i-1} - v_{j-1}^{i-1})(v_{j-1/2}^{i-1})^2 + h \text{Ha}^2 u_{j-1/2}^{i-1}.$$

Краевые условия записываются в следующем виде:

$$f_0^i = \alpha(1-m)/(1+m), \quad u_0^i = 1, \quad u_j^i = 0.$$

Нелинейные уравнения (6), (7) линеаризуются с использованием метода Ньютона:

$$f_j^{(i+1)} = f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)}, \quad u_j^{(i+1)} = u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)}, \quad v_j^{(i+1)} = v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)}. \quad (8)$$

Подставляя выражения (8) в уравнения (6), (7) и опуская члены второго и более высокого порядка относительно δ , получаем систему линейных уравнений

$$\delta f_j - \delta f_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j, \quad \delta u_j - \delta u_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_j,$$

$$(a_1)_{j-1/2} \delta v_j + (a_2)_{j-1/2} \delta v_{j-1} + (a_3)_{j-1/2} \delta u_j + (a_4)_{j-1/2} \delta u_{j-1} + (a_5)_{j-1/2} \delta f_j +$$

$$+ (a_6)_{j-1/2} \delta f_{j-1} = (r_3)_{j-1/2}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} (a_1)_{j-1/2} &= 1 + \frac{hf_{j-1/2}}{2} + \frac{3(n-1)}{2} (v_{j-1/2}^i)^2 + \frac{3(n-1)}{2} v_j^i (v_{j-1/2}^i) - \frac{3(n-1)}{2} v_{i-1} (v_{j-1/2}^i)^2, \\ (a_2)_{j-1/2} &= -1 + \frac{hf_{j-1/2}}{2} - \frac{3(n-1)}{2} (v_{j-1/2}^i)^2 + \frac{3(n-1)}{2} v_j^i (v_{j-1/2}^i) - \frac{3(n-1)}{2} v_{i-1} (v_{j-1/2}^i)^2, \\ (a_3)_{j-1/2} &= -\frac{2m}{m+1} hu_{j-1/2} - \frac{hNa^2}{2}, \quad (a_4)_{j-1/2} = (a_3)_{j-1/2}, \\ (a_5)_{j-1/2} &= \frac{hv_{j-1/2}}{2}, \quad (a_6)_{j-1/2} = (a_5)_{j-1/2}. \end{aligned}$$

Граничные условия аппроксимируются следующими уравнениями:

$$\delta f_0 = 0, \quad \delta u_0 = 0, \quad \delta u_J = 0.$$

Линеаризованная система уравнений (9) имеет блочную трехдиагональную форму

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_2 & C_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & B_{J-1} & A_{J-1} & C_{J-1} \\ 0 & 0 & 0 & B_J & A_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{J-1} \\ \delta_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{J-1} \\ r_J \end{bmatrix}$$

и содержит следующие элементы:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -h_1/2 & 0 & h_1/2 \\ (a_2)_1 & (a_5)_1 & (a_1)_1 \end{bmatrix}, \quad A_j = \begin{bmatrix} h_j/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & h_j/2 \\ (a_4)_j & (a_5)_j & (a_1)_j \end{bmatrix}, \quad 2 < j < J, \\ B_j &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h_j/2 \\ 0 & (a_6)_j & (a_2)_j \end{bmatrix}, \quad 2 < j < J, \quad C_j = \begin{bmatrix} h_j/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ (a_1)_j & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2 < j < J. \end{aligned}$$

При решении системы используется LU-разложение блочной трехдиагональной матрицы.

Обсуждение результатов. Ниже приводятся результаты численного решения задачи при различных значениях чисел Гартмана Na и Вайсенберга We , показателя степени n , параметра растяжения листа m и параметра тонкостенности α .

На рис. 2, 3 показаны профили скорости $f'(\eta)$ при различных значениях параметров α , n соответственно. Видно, что с увеличением показателя степени n увеличивается скорость жидкости, а следовательно, и дисторсия жидкости. На рис. 4 приведены профили скорости $f'(\eta)$ при различных значениях параметра растяжения m . С увеличением параметра m скорость и толщина пограничного слоя уменьшаются. На рис. 5 представлены профили скорости $f'(\eta)$ при различных значениях числа Вайсенберга. Видно, что с увеличением числа Вайсенберга скорость увеличивается. Линии тока, полученные при различных значениях числа Вайсенберга, показаны на рис. 6. В табл. 1 приведены значения коэффициента поверхностного трения при различных значениях числа Вайсенберга We и показателя степени n . В табл. 2 приведены результаты расчета значений $f''(0)$, полученные в данной работе и работе [12]. Из табл. 2 следует, что эти результаты хорошо согласуются.

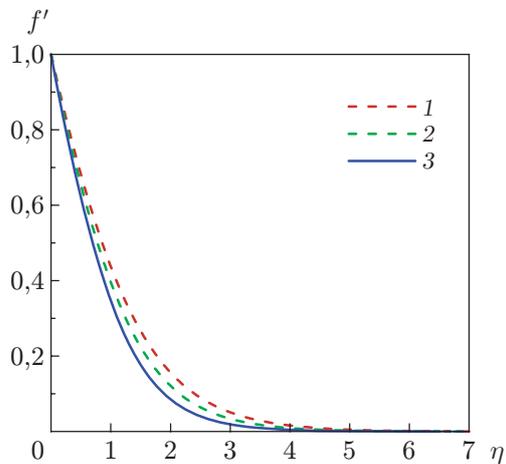


Рис. 2

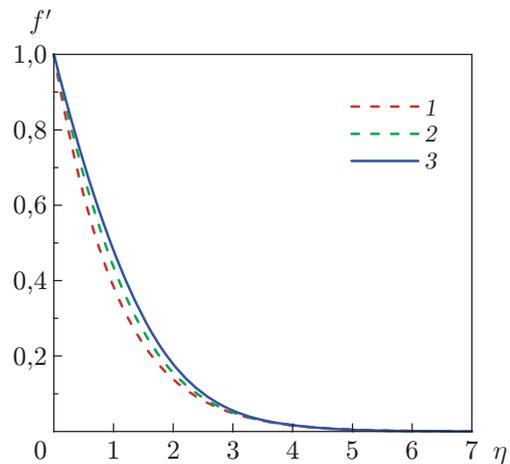


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $f'(\eta)$ при $We = 3$, $n = 1,2$, $m = 0,5$, $Ha = 0,1$ и различных значениях параметра α :

1 — $\alpha = 0,1$, 2 — $\alpha = 0,9$, 3 — $\alpha = 1,9$

Рис. 3. Зависимость $f'(\eta)$ при $We = 0,5$, $\alpha = 0,1$, $m = 0,5$, $Ha = 0,1$ и различных значениях параметра n :

1 — $n = 1$, 2 — $n = 8$, 3 — $n = 18$

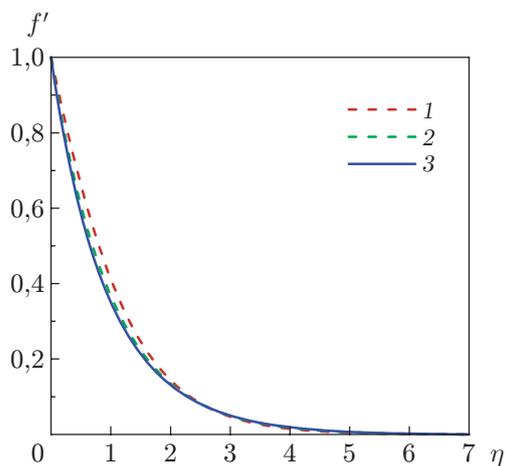


Рис. 4

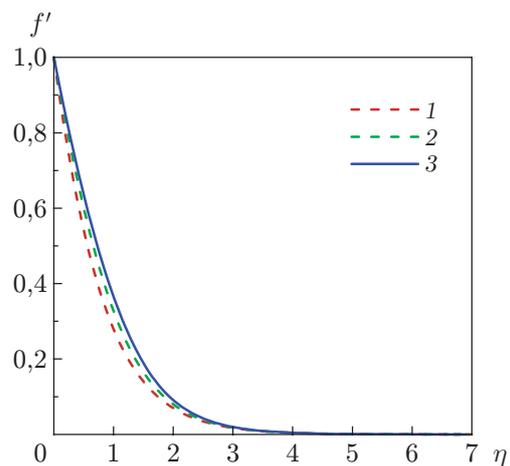


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость $f'(\eta)$ при $We = 3$, $n = 1,2$, $\alpha = 0,1$, $Ha = 0,1$ и различных значениях параметра m :

1 — $m = 0,1$, 2 — $m = 1$, 3 — $m = 2,5$

Рис. 5. Зависимость $f'(\eta)$ при $\alpha = 1,9$, $m = 0,5$, $n = 1,2$, $Ha = 0,1$ и различных значениях числа Вейсберга We :

1 — $We = 1$, 2 — $We = 2,5$, 3 — $We = 3,5$

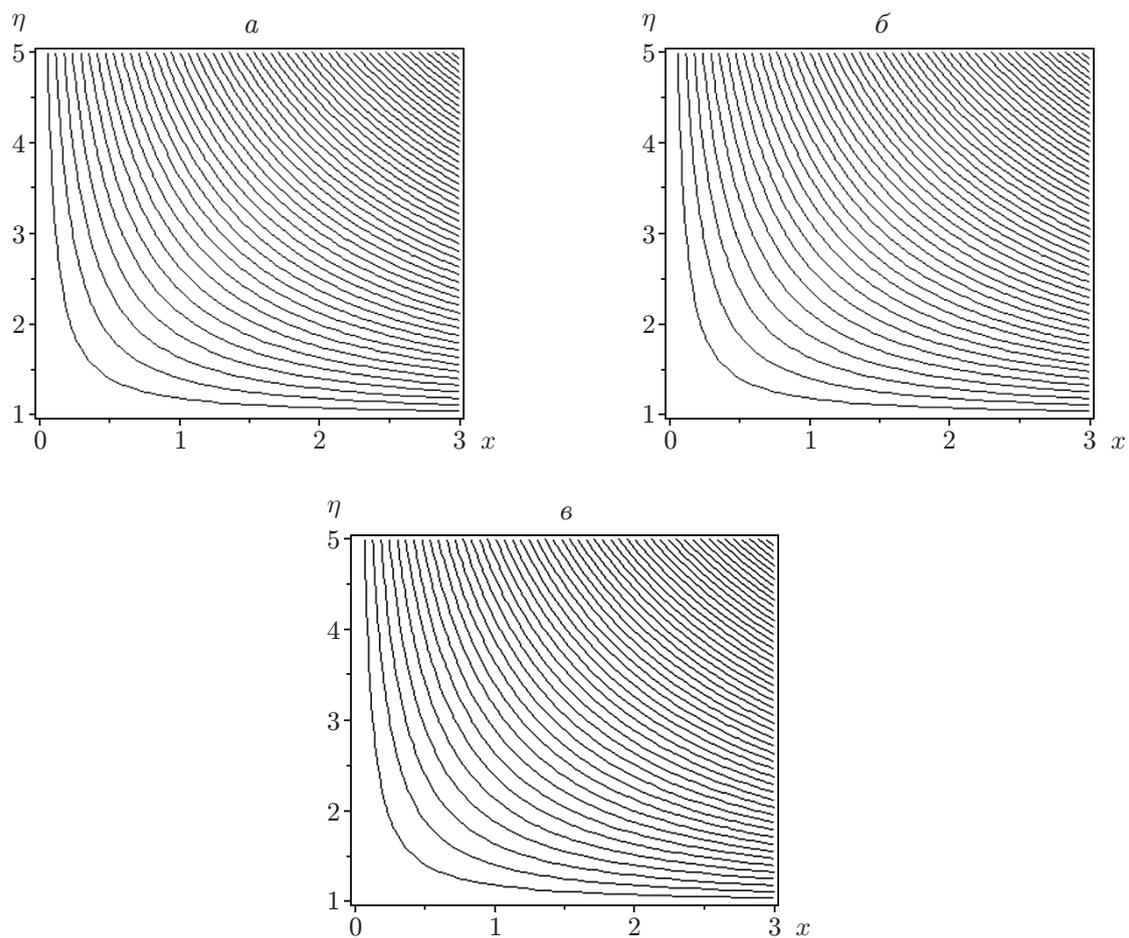


Рис. 6. Линии тока при различных значениях числа Вайсенберга We :
 а — $We = 0,1$, б — $We = 0,5$, в — $We = 1,0$

Таблица 1

Значения коэффициента поверхностного трения
 при различных значениях
 числа Вайсенберга We и показателя степени n

We	n	$c_f Re_x^{1/2}$
0,1	1,2	-0,7535
0,2	1,2	-0,7539
0,3	1,2	-0,7546
0,1	1,3	-0,7536
0,1	1,5	-0,7537
0,1	1,7	-0,7539

Таблица 2

Значения $f''(0)$, полученные в данной работе и работе [12]
при $We = n = \alpha = 0$, $m = 1$ и различных значениях числа Гартмана

Ha	Данные [12]	Данные настоящей работы
0	1,000 00	1,000 00
0,5	-1,118 00	-1,118 10
1	-1,414 18	-1,414 20
5	-2,449 42	-2,449 45
50	-3,316 56	-3,316 58
100	-10,049 81	-10,049 84
500	-22,382 93	-22,382 85
1000	-31,638 46	-31,638 21

Заключение. В работе представлены результаты решения задачи о магнитогидродинамическом течении жидкости Карро вдоль растягиваемого листа. Численное решение задачи найдено с использованием метода ячеек Келлера. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. С увеличением числа Вейсенберга We и показателя степени n скорость жидкости увеличивается, а с увеличением параметра растяжения m , параметра тонкостенности α и числа Гартмана — уменьшается. С увеличением показателя степени n коэффициент поверхностного трения увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Akbar N. S., Nadeem S., Haq R. U., Ye S. MHD stagnation point flow of Carreau fluid toward a permeable shrinking sheet: Dual solutions // Ain Shams Engng J. 2014. V. 5. P. 1233–1239.
2. Akbar N. S., Nadeem S. Carreau fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis // Ain Shams Engng J. 2014. V. 5. P. 1307–1316.
3. Khan M., Hashim. Boundary layer flow and heat transfer to Carreau fluid over a nonlinear stretching sheet // AIP Adv. 2015. V. 5. 107203.
4. Suneethal S., Gangadhar K., Reddy N. B. Thermal radiation effect on MHD stagnation point flow of a Carreau fluid with convective boundary condition // Open Sci. J. Math. Appl. 2015. V. 3, N 5. P. 121–127.
5. Singh V., Agarwal S. Flow and heat transfer on Maxwell fluid with variable viscosity and thermal conductivity over an exponentially stretching sheet // Amer. J. Fluid Dynamics. 2013. V. 3, N 4. P. 87–95.
6. Nadeem S., Haq R. U., Akbar N. S., Khan Z. H. MHD three-dimensional Casson fluid flow past a porous linearly stretching sheet // Alexandria Engng J. 2013. V. 52. P. 577–582.
7. Ene R. D., Marinca V. Approximate solutions for steady boundary layer MHD viscous flow and radiative heat transfer over an exponentially porous stretching sheet // Appl. Math. Comput. 2015. V. 269. P. 389–401.
8. Mustafa M., Khan J. A. Model for flow of Casson nanofluid past a non-linearly stretching sheet considering magnetic field effects // AIP Adv. 2015. V. 5. 077148.
9. Hayat T., Farooq M., Alsaedi A., Solamy F. A. Impact of Cattaneo — Christov heat flux in the flow over a stretching sheet with variable thickness // AIP Adv. 2015. V. 5. 087159.
10. Khan J. A., Mustafa M., Hayat T., Alsaedi A. Numerical study of Cattaneo — Christov heat flux model for viscoelastic flow due to an exponentially stretching surface // PLoS One. 2015. V. 10. e0137363. DOI: 10.1371/journal.pone.0137363.

11. **Govindaraju M., Ganesh N. V., Hakeem A. K. A.** Entropy generation analysis of magneto hydrodynamic flow of nanofluid over a stretching sheet // J. Egyptian Math. Soc. 2015. V. 23. P. 429–434.
12. **Salahuddin T., Malik M. Y., Hussain A., et al.** MHD flow Cattaneo — Christov heat flux model for Williamson fluid over a stretching sheet with variable thickness: Using numerical approach // J. Magnetism Magnetic Materials. 2016. V. 401. P. 991–997.
13. **Das K.** Nanofluid flow over a non-linear permeable stretching sheet with partial slip // J. Egyptian Math. Soc. 2015. V. 23. P. 451–456.
14. **Mahanta G., Shaw S.** 3D Casson fluid flow past a porous linearly stretching sheet with convective boundary condition // Alexandria Engng J. 2015. V. 54. P. 653–659.
15. **Animasaun I. L., Adebile E. A., Fagbade A. I.** Casson fluid flow with variable thermo-physical property along exponentially stretching sheet with suction and exponentially decaying internal heat generation using the homotopy analysis method // J. Nigerian Math. Soc. 2016. V. 35, iss. 1. P. 1–17. DOI: org/10.1016/j.jnnms.2015.02.001.
16. **Malik M. Y., Salahuddin T., Hussain A., Bilal S.** MHD flow of tangent hyperbolic fluid over a stretching cylinder: Using Keller box method // J. Magnetism Magnetic Materials. 2015. V. 395. P. 271–276.
17. **Reddy M. G., Padma P., Shankar B.** Effects of viscous dissipation and heat source on unsteady MHD flow over a stretching sheet // Ain Shams Engng J. 2015. V. 6, iss. 4. P. 1195–1201. DOI: org/10.1016/j.asej.2015.04.006.
18. **Malik M. Y., Khan I., Hussain A., Salahuddin T.** Mixed convection flow of MHD Eyring — Powell nanofluid over a stretching sheet: A numerical study // AIP Adv. 2015. V. 5. 117118.
19. **Fang T., Zhang J., Shanshan Y.** Slip MHD viscous flow over a stretching sheet an exact solution // Comm. Nonlinear Sci. 2009. V. 14. P. 3731–3737.

*Поступила в редакцию 30/III 2016 г.,
в окончательном варианте — 13/X 2016 г.*
