

удовлетворяет уравнению при переходе через границу области B_a , следует из ее гладкости.

Полагая в (4) $\omega_1 = 0$, получим условие $\omega \geq 4Ce/R_1^2$, при котором существует отличное от тривиального решение задачи, описывающее течение по схеме М. А. Лаврентьева для случая ограниченной области.

Поступила 14 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. Лаврентьев М. А. Вариационные методы в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. Гольдштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 147, № 6.
4. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание. — «Докл. АН СССР», 1963, т. 195, № 6.
5. Шабат А. Б. Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне трещины. — ПМТФ, 1962, № 4.
6. Антонцев С. Н., Телох В. Д. Некоторые задачи сопряжения вихревых и потенциальных течений. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, вып. 1, 1969.
7. Плотников П. И. О разрешимости одного класса задач на склеивание потенциального и вихревого течений. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, вып. 3, 1969.

УДК 536.25

ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ ПРОСЛОЙКАХ

Г. Б. Петражицкий, Н. М. Станкевич

(Москва)

Изучение конвективных течений вязкой сжимаемой жидкости в сферических прослойках представляет значительный интерес для различных технических приложений. В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал [1—4], который позволил получить средние характеристики теплообмена, установить тип потока и классифицировать режимы течения в зависимости от значения числа Грасгофа и отношения диаметров сфер. В [3] представлены также температурные профили для широкого диапазона изменения числа Прандтля. Все экспериментальные работы посвящены изучению конвекции при условии более нагретой внутренней сферической поверхности.

Теоретический анализ задачи проведен в работах [5, 6]. В [5] исследовалась стационарная осесимметричная естественная конвекция несжимаемой жидкости, заключенной между изотермическими концентрическими сферами для низких чисел Рэлея ($Ra \leq 10^4$). Решения основных уравнений найдены путем разложения температуры T и функций тока ψ в ряд по степеням числа Рэлея и оценке первых трех членов в каждом из этих рядов. Для одного частного случая приводятся конфигурации линий тока, распределение скорости и температуры, данные о потоках тепла на поверхности сфер.

В результате использования теории подобия в [6] получен закон теплопередачи при естественной конвекции в цилиндрических и сферических прослойках с учетом кривизны области. В настоящее время наряду с экспериментальными и аналитическими методами исследования все большее значение приобретает численный эксперимент, позволяющий изучить достаточно полные физические

модели, детально проанализировать влияние различных параметров на исследуемое явление, выявить основные закономерности процесса. Численный эксперимент позволяет получить сведения, необходимые для более глубокого анализа конвективного теплообмена и установления закона взаимодействия гидродинамических и тепловых эффектов, а именно: установить структуру полей течения, плотности и температуры и распределение локальных тепловых потоков на границах области. Эти сведения практически невозможно получить в натуральном эксперименте.

Цель данной работы — выяснение закономерностей конвективного движения и теплообмена вязкого сжимаемого газа в прослойке между охлажденной внутренней и нагретой внешней концентрическими сферическими поверхностями. Газ предполагается совершенным $p = R^* \rho T$, зависимости коэффициентов теплопроводности λ и динамической вязкости от температуры определяются формулой Сатерленда

$$\lambda = 0,254 \cdot 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{T + 201/\Delta T} \cdot \frac{\sqrt{\Delta T}}{\lambda_{\infty}};$$

$$\mu = 1,465 \cdot 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T + 110,4/\Delta T} \cdot \frac{\sqrt{\Delta T}}{\mu_{\infty}}.$$

Удельная теплоемкость c_p зависит от температуры линейно. Единственной массовой силой является сила тяжести.

Наличие температурного градиента в поле сил тяжести делает невозможным гидростатическое равновесие, в полости возникают конвективные токи, оказывающие большое влияние на процесс теплопередачи. Распределение температуры меняется, увеличивается скорость прогрева среды, заполняющей полость. Возникающие течения симметричны относительно вертикальной оси z цилиндрической системы координат x, θ, z , проходящей через центр концентрических сферических поверхностей.

Исследование течений и переноса тепла в газе проводится на основе численного решения системы нестационарных уравнений конвективного теплообмена, которая записывается в виде

$$(1) \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{2\mu}{\text{Re} x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \frac{\rho u}{x} - \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho c_p g_z + \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\mu}{\text{Re} x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} - \frac{\rho u w}{x} - \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\rho u}{x} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\lambda}{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial(\rho u c_p T)}{\partial x} -$$

$$- \frac{\rho u c_p T}{x} - \frac{\partial(\rho w c_p T)}{\partial z} + \text{Ec} R^* \left[\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] +$$

$$+ \text{Ec} \frac{\mu}{\text{Re}} \Phi,$$

$$\text{где } \Phi = \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{u}{x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\};$$

t — время; u, w — проекции вектора скорости v на оси x, z соответственно; p — давление; ρ — плотность; T — температура; Φ — диссипативная

функция. За масштаб температуры принимается разность температур нагретой и холодной поверхностей $\Delta T' = T'_2 - T'_1$, (здесь и в дальнейшем размерные величины обозначаются штрихом), масштаб скорости равен скорости звука $V' = \sqrt{\kappa R^* T_m}$ при средней по зазору температуре $T_m = \frac{T'_1 + T'_2}{2}$ в условиях гидростатического равновесия при отсутствии массовых сил. Масштабы плотности, удельной теплоемкости, коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности равны соответствующим величинам при температуре T_m . За масштаб длины взята ширина прослойки $\delta' = r'_2 - r'_1$, времени — величина $\delta'/(V')^2$, давления — $\rho_m (V')^2$, силы тяжести — g' . Безразмерные комплексы, входящие в систему, имеют вид

$$\text{Re} = V' \delta' / \nu', \quad c_F = g' \delta' / (V')^2, \quad \text{Ec} = (V')^2 / c_{pm} \Delta T'.$$

Стационарное распределение скорости, плотности и температуры достигается в процессе установления при $t \rightarrow \infty$. В начальный момент считаем, что газ неподвижен во всей области ($u = w = 0$).

При заданных постоянных температурах на границах области $r = r_1$, $T = T_1$; $r = r_2$, $T = T_2$ температура внутри слоя меняется только вдоль радиуса, где она распределяется в соответствии с решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\lambda}{x} \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Плотность при $t = 0$ определяется уравнением состояния, согласно заданному распределению температуры. В качестве граничных условий на сферических поверхностях берутся условия прилипания

$$r = r_1, r = r_2, u = w = 0,$$

где r — текущее значение радиуса; плотность вычисляется по уравнению неразрывности с учетом граничных условий для компонент скорости.

Течение и теплообмен при стационарном режиме в случае постоянной температуры сферических поверхностей зависит от следующих безразмерных величин: числа Грасгофа $\text{Gr} = g' \beta'_m \Delta T' \delta'^{1/3} / (\nu'_m)^2$, числа Прандтля $\text{Pr} = \mu'_m c'_{pm} / \lambda'_m$, критерия гидростатической сжимаемости c_F , отношения радиусов сфер r_2/r_1 , отношения теплоемкостей $\kappa = c'_p / c'_v$. В данной работе исследовалось влияние на течение и теплообмен критерия Gr и отношения радиусов r_2/r_1 . Значения остальных определяющих критериев были фиксированы: $\text{Pr} = 0,71$, $\kappa = 1,4$, $c_F = 0,05$. В расчетах вариация числа Gr при неизменном значении c_F достигалась изменением критерия Re по формуле $\text{Re} = \sqrt{(\text{Gr}/c_F) T_m}$.

Для нахождения предельного (не зависящего от времени) решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), существование и единственность которого при заданных граничных и начальных условиях следует из физического смысла задачи, применялась явная разностная схема с уточнением на каждом временном слое [7].

Система разностных уравнений была получена методом балансов, суть которого состоит в интегрировании каждого уравнения исходной системы (1) по ячейке области и в последующей замене интегралов конечными суммами. Конечно-разностные уравнения записываются в операторной форме, чем существенно облегчается написание программы для ЭВМ.

Разберем методику получения разностного уравнения на примере квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка, зависящего от двух пространственных переменных и записанного в дивергентном виде

$$(2) \quad a_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2,$$

где x_j — декартовы координаты; $a_{jk} = a_{jk}(v, x, t)$ — гладкие функции в замкнутой области R , внутри которой отыскивается решение уравнения (2).

Введем в области R ортогональную криволинейную систему координат z_i , выбор которой обусловлен геометрией области и видом граничных условий уравнения (2).

Координатные линии $z_i = \text{const}$ образуют в области R криволинейную ортогональную сетку с числом узлов L по z_1 и N по z_2 . Выберем произвольные четыре ячейки сетки, имеющие общий узел, например ячейки с координатами узла $z_{1l} = lh_1$, $z_{2m} = mh_2$; h_1, h_2 — шаги сетки в направлении z_1 и z_2 соответственно. Вспомогательная ячейка и нумерация узлов показаны на фиг. 1.

Пусть Ω — вспомогательная ячейка с центром в (z_{1l}, z_{2m}) и сторонами, проходящими через узлы с координатами

$$(z_{1l+1/2}, z_{2m}), (z_{1l}, z_{2m+1/2}), (z_{1l}, z_{2m-1/2}), (z_{1l-1/2}, z_{2m}).$$

Полуцелые индексы обозначают, например,

$$z_{1l+1/2} = lh_1 + h_1/2; \quad z_{2m-1/2} = mh_2 - h_2/2.$$

Уравнение (2) проинтегрируем по ячейке Ω и для аппроксимации интегралов в правой части уравнения воспользуемся формулой Грина. В операторной форме можно записать

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x_j} d\Omega = \oint W n_j ds,$$

где n_j — проекция внешней нормали к контуру Γ ячейки Ω на ось x_j .

Для удобства записи пронумеруем стороны Ω , как показано на фиг. 1. Через W_k обозначим значение подынтегральной функции на k -й стороне ($k = 1, 2, 3, 4$), через $W_{l, m}$ — в узле (lh_1, mh_2) .

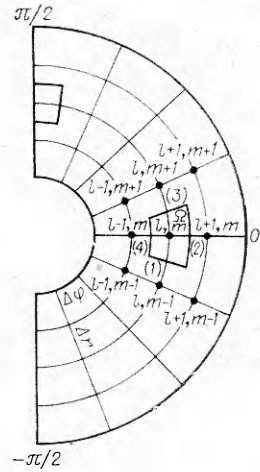
Полагаем W_k постоянной вдоль соответствующей стороны и равной ее значению в узле с полуцелыми индексами, где W_k вычисляется по симметричным формулам, например,

$$(3) \quad W_1 = W_{l+1/2, m} = (W_{l, m} + W_{l+1, m})/2.$$

Контурный интеграл распишем по сторонам Ω с учетом (3). Одновременно перейдем от координат x_j к координатам z_i . Тогда

$$(4) \quad \oint W n_j ds = W_1 \int_{\Gamma_1} n_{j1} H_1^1 dz_1 + W_3 \int_{\Gamma_3} n_{j3} H_3^1 dz_1 + W_2 \int_{\Gamma_2} n_{j2} H_2^2 dz_2 + W_4 \int_{\Gamma_4} n_{j4} H_4^2 dz_2,$$

где H^1, H^2 — коэффициенты Ламэ для системы z_i . При вычислении по (4) необходимо следить за тем, чтобы $H_k^i dz_i > 0$.



Фиг. 1

Как следует из (2), W в (4) линейно зависит от производных, для вычисления которых воспользуемся формулой [8]

$$(5) \quad \partial/\partial x_j = (l_{ij}/H^i) \partial/\partial z_i,$$

где l_{ij} — проекция единичного касательного вектора к координатной линии z_i на ось x_j . С учетом (5) имеем

$$\int_{\Gamma} \left(a_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) n_j ds = \int_{\Gamma} a_{jk} n_j \left(\frac{l_{ij}}{H^i} \frac{\partial v}{\partial z_i} \right) ds.$$

Интеграл, стоящий справа, берется по частям на каждой из сторон i ячейки Ω . Для определения производных, входящих в (5), использовались симметричные формулы, обеспечивающие $\partial/\partial x_j$ точность аппроксимации второго порядка. Например,

$$\begin{aligned} \partial v / \partial z_1 &= (v_{l, m+1} - v_{l, m-1} + v_{l+1, m-1} - v_{l-1, m-1}) / 4h_1; \\ \partial v / \partial z_2 &= (v_{l+1, m} - v_{l, m}) / h_2. \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче пространственная ячейка $\bar{\Omega}$ выбирается следующим образом. Область между сферами разбиваем на секторы плоскостями R_θ , проходящими через ось симметрии с углом $\Delta\theta$ между ними. Из-за симметрии задачи достаточно найти решение в одном секторе. Будем искать решение в секторе, ограниченном плоскостями R_0 и R_θ , которые соответствуют углам $\theta = 0$ и $\theta = \Delta\theta$. В плоскости R_0 введем полярную систему координат r, φ . Тогда стороны пространственной ячейки $\bar{\Omega}$ образуются сторонами Ω (см. фиг. 1) при повороте плоскости R_0 на угол $\Delta\theta$ относительно оси z . Боковые стороны $\bar{\Omega}$ лежат на плоскостях R_0 и R_θ сектора, в котором определяется решение. Ячейки $\bar{\Omega}$, непосредственно примыкающие к оси симметрии, образуются поворотом на $\Delta\theta$ половины ячейки Ω . Из-за экономии места интегральная запись уравнений не приводится. В силу симметрии задачи подинтегральная функция не зависит от θ и

$$\int \int \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial W}{\partial X} x dx dz d\theta = \Delta\theta \int \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial X} x dx dz,$$

где X — любая из координат t, x, z . Способы вычисления контурных интегралов для ячеек на оси z ($\varphi = \pm\pi/2$) и для находящихся на расстоянии от нее ($-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$) различны. Для $-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$ имеем

$$\begin{aligned} \int \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial (Wx)}{\partial x} dx dz &= \int_{\Gamma} (Wx) n_x ds = \left[(W_1 x_1 - W_3 x_3) \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \sin \varphi - \right. \\ &\quad \left. - (W_1 x_1 + W_3 x_3) \cos \varphi \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right] \Delta r + \left[(W_2 x_2 - W_4 x_4) r + \right. \\ &\quad \left. + (W_2 x_2 + W_4 x_4) \frac{\Delta r}{2} \right] \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\sin \Delta\varphi}{2} \right) \left[W_2 \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - W_4 \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right]; \\ \int \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial (Wx)}{\partial z} dx dz &= \int_{\Gamma} (Wx) n_z ds = \left[(W_2 x_2 - W_4 x_4) r + (W_2 x_2 + W_4 x_4) \frac{\Delta r}{2} \right] \times \\ &\quad \times \sin^2 \Delta\varphi - \left[(W_1 x_1 - W_3 x_3) \cos \varphi \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + (W_1 x_1 + W_3 x_3) \sin \varphi \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right] \Delta r. \end{aligned}$$

Для $\varphi = +\pi/2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial(Wx)}{\partial x} dx dz &= (W_1 x_1) \Delta r \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \left[W_2 \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - W_4 \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] \times \\ &\quad \times \left(\frac{\Delta \varphi - \sin \Delta \varphi}{2} \right); \\ \int_{\Omega} \frac{\partial(Wx)}{\partial z} dx dz &= - (W_1 x_1) \Delta r \sin \frac{\Delta \varphi}{2} + \left[W_2 \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - W_4 \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] \times \\ &\quad \times \frac{\sin^2 \Delta \varphi}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично записываются разностные выражения для $\varphi = -\pi/2$.

Численное решение позволяет получить гидродинамическую структуру течения и картину распределения температур $T(r, \varphi)$ для различных режимов течения, характеризующихся числом Грасгофа Gr и отношением радиусов r_2/r_1 . Зная распределение температур, можно вычислить локальные числа Нуссельта $(\partial T / \partial r)_i$ на границах области, а затем коэффициент конвекции ε_{ki} , определенный выражением

$$(6) \quad \varepsilon_{ki} = \frac{\lambda_{\partial}}{\lambda_m} = \lambda_i \frac{r_i^2}{r_1 r_2} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_i,$$

который показывает превышение теплообмена в режиме конвекции по сравнению с режимом чистой теплопроводности.

В выражении (6) $(\partial \bar{T} / \partial r)_i$ — среднее значение числа Нуссельта вдоль границы области, равное

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_i = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_i \cos \varphi d\varphi, \quad i = 1, 2.$$

Для аппроксимации производной, входящей в последнее выражение, применялись трехточечные формулы второго порядка точности вида

$$\partial T / \partial r \simeq (3T_{l-1, m} - 4T_{l, m} + T_{l+1, m}) / 2\Delta r.$$

По описанной разностной методике составлена программа на языке BESM — ALGOL (для БЭСМ-6) и транслятора, подключенного к мониторингной системе «Дубна». Это дало экономию машинного времени в 2,2 раза по сравнению с обычным алгольным транслятором.

Основная серия расчетов, результаты которых приводятся ниже, выполнена по сетке $N_r \times N_{\varphi} = 17 \times 33$. Эта сетка является оптимальной с точки зрения допустимой погрешности счета и необходимых затрат машинного времени. Для обоснования выбора числа узлов разностной сетки по различным координатным осям были выполнены расчеты на сетках 17×17 ; 17×33 ; 31×31 . О влиянии сетки на величину коэффициента конвекции можно судить по данным таблицы, составленным для $Gr = 0,5 \cdot 10^4$, $С_F = 0,05$, $r_2/r_1 = 2$. Данные, приведенные в таблице, соответствуют стационарному режиму. При счете без погрешности $\varepsilon_{k1} = \varepsilon_{k2}$. Невязка определяется выражением $\Delta \varepsilon = (\varepsilon_{k2} - \varepsilon_{k1}) / \varepsilon_{k2} \times 100\%$.

Из сравнения коэффициентов конвекции для $l \times m = 17 \times 17$ и $l \times m = 31 \times 31$ следует, что простым увеличением коли-

Сетка $l \times m$	ε_{k1}	ε_{k2}	Н- вязка, %	ε_k
17×17	1,3150	1,3418	2	1,3284
31×31	1,4747	1,4921	1,2	1,4834
17×33	1,4855	1,4929	0,5	1,4892

чества узлов сетки не всегда удается существенно понизить величину невязки. Этот эффект можно объяснить неравномерностью сетки, обусловленной криволинейностью области.

При выборе равномерной сетки ($l - 1 = m - 1$) предполагалось, что форма ячейки Ω будет близка к квадратной, но в действительности она зависит от положения ячейки на радиусе. Степень искажения ячейки характеризуется отклонением от единицы отношения сторон ячейки

$$K = \Delta r / r \Delta \varphi = \delta(m - 1) / (l - 1)r\pi,$$

где $l - 1$ — число шагов Δr по радиусу; $m - 1$ — число шагов $\Delta \varphi$ по углу от $\varphi = -\pi/2$ до $\varphi = +\pi/2$.

В случае $\delta = 1$ это соотношение приводится к виду

$$(7) \quad K = (m - 1) / (l - 1)r\pi.$$

Отсюда при условии $l - 1 = m - 1$ получаем $K = 1/r\pi$, т. е. искажение не зависит от количества узлов сетки вдоль r и φ и будет минимальным, если $r = 1/\pi = 0,32$.

Данные таблицы получены для отношения радиусов $r_2/r_1 = 2$, которое при $\delta = 1$ приводит к соотношению $1 \leq r \leq 2$ и, следовательно, $1/2\pi \leq K \leq 1/\pi$. Очевидно, для уменьшения искажения ячейки нужно брать $l - 1 \neq m - 1$. Оптимальная сетка, определенная соотношением $(m - 1) / (l - 1)r\pi$ при $1 \leq r \leq 2$, удовлетворяет неравенству $\pi \leq (m - 1) / (l - 1) \leq 2\pi$, которое показывает, что в среднем число узлов по φ должно быть приблизительно в 4,5 раза больше, чем по r .

Из-за ограниченности памяти ЭВМ общее число узлов сетки обычно остается неизменным $l \times m = \text{const}$. При соотношении шагов Δr и $\Delta \varphi$, определенном равенством (7), существенно возрастает ошибка аппроксимации производной по r , что отрицательно сказывается на результатах счета. Оптимальная сетка подбирается путем тщательного численного эксперимента. В нашем случае $N_r \times N_\varphi = 17 \times 33$, для которой соотношение $(m - 1) / (l - 1) = 2$.

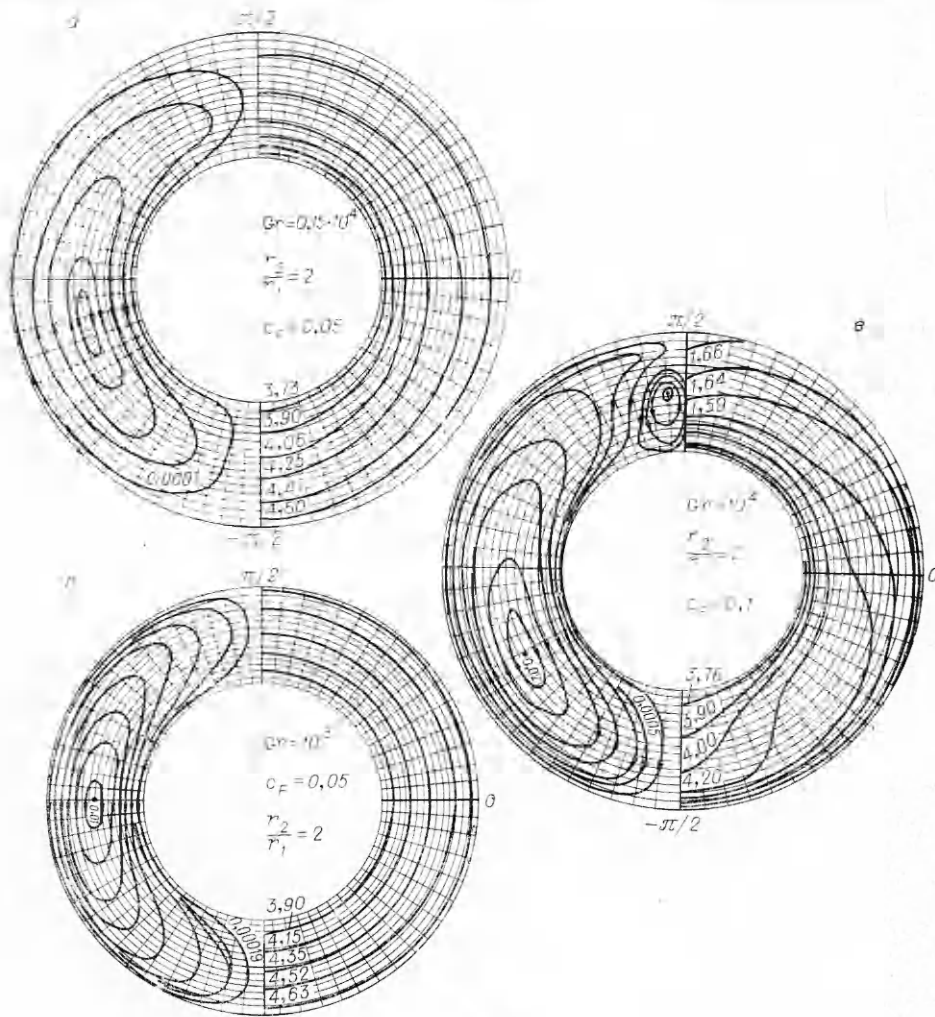
Для $Gr \leq 10^4$ на этой сетке невязка составляет около 0,5%. По мере увеличения Gr невязка быстро растет и при $Gr = 0,5 \cdot 10^5$ и 10^5 она достигает 7 и 9% соответственно. Такое увеличение невязки и, следовательно, погрешности счета объясняется в данном случае усложнением структуры течения. При этих числах Грасгофа в окрестности угла $\varphi = +\pi/2$ образуется вторичный вихрь. Более слабый вихрь появляется у вертикали $\varphi = -\pi/2$ вблизи внешней и внутренней сфер.

На область вторичного вихря при численном решении приходилось 2—3 расчетных узла по r , т. е. сетка была весьма грубой, особенно, если вихрь не распространялся на всю ширину зазора. Этот недостаток устранялся переходом к более мелкой сетке 31×33 , хотя такая подробная сетка не требовалась для основной части расчетной области. Более рациональный подход состоит, по-видимому, в сгущении сетки по r и φ в окрестности вертикалей $\varphi = \pm\pi/2$, который позволит снизить погрешность вычислений, не слишком увеличивая общее время счета.

Шаг по времени определяется условиями устойчивости

$$\Delta t \leq \min(h^2/4\nu, h/|a|)$$

(или $\Delta t \leq h/|a|$, так как обычно $h/|a| \ll h^2/4\nu$), полученными методами Фурье для модельного уравнения $\partial u / \partial t = a \partial u / \partial x + \nu \partial^2 u / \partial x^2$, где a — величина, связанная с максимальной из скоростей u, w ; $\nu = \text{const}$, определяемая максимальной величиной кинематической вязкости.



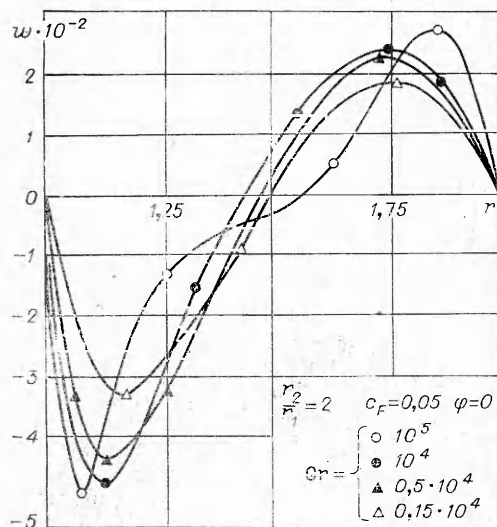
Фиг. 2*

Для получения картины распределения скорости, температуры и зависимости коэффициента конвекции от определяющих критериев были выполнены расчеты, в которых числа Грасгофа и отношение радиусов менялись в следующих пределах: $10^3 \leq Gr \leq 10^5$, $1,2 \leq r_2/r_1 \leq 3$.

О характере движения, возникающего в слое, и особенностях температурного поля можно судить по фиг. 2, где изображены картины линий тока ψ и изотермы для некоторых значений числа Грасгофа. Конвекция практически не влияет на теплообмен при $Gr = 10^3$, хотя на фиг. 2,а ясно видно наличие восходящего и нисходящего потоков. Общее количество переданного тепла в этом случае находится на уровне режима теплопроводности, о чем свидетельствует и величина коэффициента конвекции, равная 0,98.

Если при $Gr = 10^3$ изотермы фактически не отличаются от окружающей, то с увеличением числа Грасгофа они искривляются (фиг. 2,б),

* На фиг. 2, в вместо 1, 66; 1, 64 и 1, 59 следует читать 4, 66; 4, 64 и 4, 59.



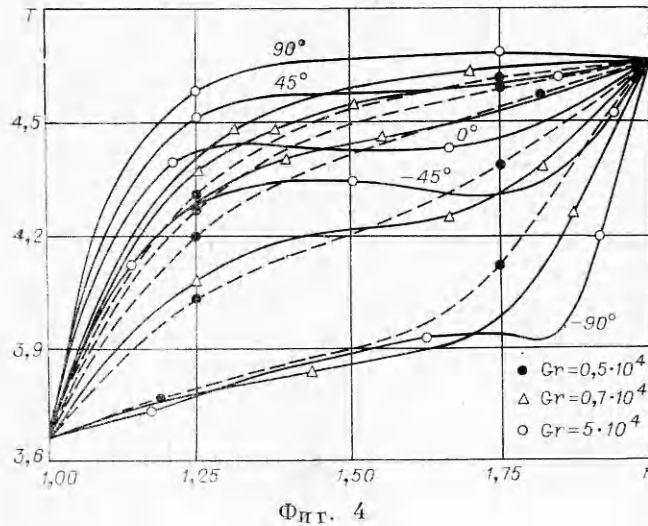
Фиг. 3

В соответствии с таким характером течения газ в верхней части области прогрев сильнее и изотермы здесь достаточно далеко отстоят от внешней стенки (фиг. 2, *а*), сгущаясь вблизи внутренней. В нижней части области наблюдается обратный эффект: охлажденный газ понижает температуру у внутренней сферы. У внешней сферы нагретый газ уносится течением вверх и изотермы вплотную примыкают к стенке.

При $Gr = 10^4$, соответствующем достаточно развитому режиму конвекции, вблизи сфер формируются тепловая и скоростная пограничные слои. Результаты, представленные на фиг. 3, позволяют проследить формирование пограничного слоя и ядра течения по мере роста числа Грасгофа. Кривые построены для $r_2/r_1 = 2$. На фиг. 3 изображен профиль вертикальной составляющей скорости w при $\varphi = 0$ для различных значений радиуса r . В областях, смежных со сферами, газ имеет большую скорость течения по сравнению со скоростью в центральной и основной частях вихря. Этот эффект усиливается при стремлении Gr к максимальному из рассмотренных. Максимум скорости восходящего потока w_2 расположен на большем расстоянии от границы по сравнению с максимумом скорости w_1 нисходящего потока, поскольку протяженность внешней нагретой стенки больше холодной внутренней и динамический слой газа здесь толще.

На фиг. 4 показаны профили температуры как функции радиуса для различных значений угла φ . Видно характерное для конвекции температурное расслоение с наличием в центральной части области зоны, где градиент температуры мал и относительно равномерен. Этот участок соответствует центральной малоскоростной части вихря, где тепло в основном передается путем теплопроводности. Основная передача тепла сосредоточена вблизи границ области, где градиент вдоль радиуса велик. С ростом угла φ от $-\pi/2$ до $\pi/2$ величина резкого возрастания градиента у внутренней сферы увеличивается, у внешней — уменьшается. Такой характер профиля обусловлен большой скоростью передачи тепла в тангенциальном направлении в высокоскоростном пограничном слое. При изменении отношения r_2/r_1 форма профиля для соответствующего значе-

а при $Gr = 10^4$ претерпевают сильное изменение (фиг. 2, *б*). Это связано с характером движения в полости. Газ поднимается вдоль нагретой внешней сферы и опускается вдоль охлажденной внутренней. При этом для всех рассмотренных отношений r_2/r_1 и чисел Грасгофа $Gr < 10^5$ имеет место одноячейный поток (серповидный вихрь). Вторичный вихрь, который появляется при $Gr = 10^4$ у внутренней сферы вблизи вертикали $\varphi = \pm \pi/2$, мал по размеру и локализации, поэтому также принимается одноячейным. По мере увеличения числа Грасгофа при неизменном отношении r_2/r_1 увеличивается интенсивность циркуляции в полости, центр вихря смещается вниз по углу (фиг. 2, *а — б*).



Фиг. 4

ния угла остается, по существу, одной и той же, изменяется лишь величина температуры для данного радиуса и протяженность по r характерных участков профиля. Все эти свойства профилей подтверждаются качественно экспериментом [3].

Обработка результатов численного решения методами теории подобия позволила получить критериальную формулу для определения коэффициента конвекции ε_k в зависимости от числа Рэлея Ra

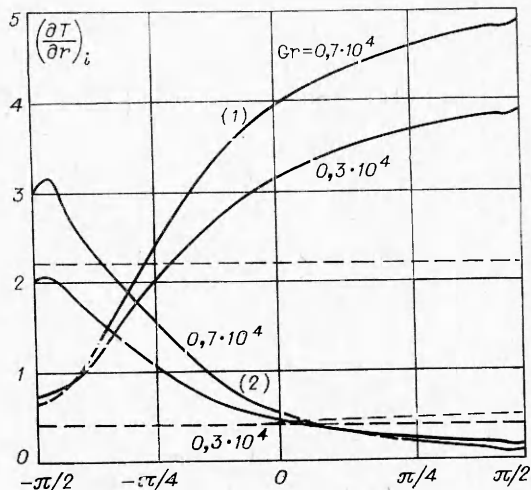
$$(8) \quad \varepsilon_k = 0,143 \cdot Ra^{0,273}$$

в диапазоне $7 \cdot 10^2 \leq Ra \leq 7 \cdot 10^4$ и $1,2 \leq r_2/r_1 \leq 3$. Соответствующая экспериментальная формула для сферического слоя, полученная в [3], имеет вид

$$\varepsilon_k = 0,12 \cdot Ra^{0,276}.$$

Она справедлива в диапазоне $1,4 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 2,5 \cdot 10^6$, $Pr = 0,71$ и $1,09 \leq r_2/r_1 \leq 2,81$. Критерии подобия в обоих случаях одинаковы.

Кроме интегральной характеристики теплообмена, были рассчитаны локальные тепловые потоки на внутренней и внешней сферах, представленные для двух значений числа Gr на фиг. 5. Штрихом показан тепловой поток в неподвижном газе. В направлении течения величина $(\partial T / \partial r)_i$ ($i = 1, 2$) падает, становясь меньше, чем в режиме теплопроводности в связи с тем, что газ постепенно приобретает температуру, близкую к температуре поверхности, вдоль которой движется. Сравнения для различных значений числа Gr



Фиг. 5

показывают, что с ростом Gr максимальные значения тепловых потоков возрастают.

Полученные результаты позволили сделать следующие выводы: в рассмотренном диапазоне изменения числа Gr и отношения радиусов имеет место устойчивое одновихревое движение, коэффициент конвекции слабо зависит от отношения r_2/r_1 , и для расчета ϵ_k можно использовать формулу (8), зависящую только от числа Рэлея.

Поступила 12 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Болринцев Д. И. Теплопередача через жидкостные и газовые прослойки. — ЖТФ 1950, т. XX, вып. 9.
2. Bishop E. H., Kolflat R. S., Mack I. R., Scanlan J. A. Convective heat transfer between concentric spheres. — In: Proceedings of 1964 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Stanford, Stanford University Press, 1964.
3. Scanlan J. A., Bishop E. H., Powe R. E. Natural convection heat transfer between concentric spheres. — «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1970, vol. 13.
4. Yin S. H., Powe R. E., Scanlan J. A., Bishop E. H. Natural convection flows pates in sphericall annuli. — «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1973, vol. 16, N 9.
5. Mack I. R., Hardee H. C. Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers. — «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1968, vol. 11.
6. Барелко В. В., Штессель Э. А. О законе теплопередачи при свободной конвекции в цилиндрических и сферических прослойках. — «Инж.-физ. журн.», 1973, т. XXIV, № 1.
7. Петражицкий Г. Б., Бекнева Е. В., Станкевич Н. М. Расчет течения и теплообмена при свободном движении жидкости в горизонтальном кольцевом канале. — «Труды Львовского политехи. п-та», 1970, № 46.
8. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., «Наука», 1965.

УДК 532.135

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРАНИЦ

Ф. А. Гарифуллин, А. Б. Габитова

(Казань)

При исследовании устойчивости равновесия упруговязкой жидкости в работе [1] предполагалось исчезновение возмущения температуры на ограничивающих слой плоскостях. Эти условия соответствуют предельному случаю бесконечной теплопроводности границ. В случае конечных величин теплопроводности разделяющих границ следует учитывать проникновение температурных возмущений в массив. В работе рассмотрена задача устойчивости слоя упруговязкой жидкости, заключенного между двумя полубесконечными массивами конечной теплопроводности.

В общем случае для упруговязкой жидкости тензор напряжения в материальной точке дается как функционал истории деформации [2]. Заданием конкретного вида ядер функционала можно получить частные реологические модели.

Методы измерения материальных постоянных, входящих в реологические соотношения, являются сложными и требуют сложной реометрической аппаратуры.