УДК 532.591

РАССЕЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН КРАЕМ ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуется дифракция плоских поверхностных волн плавающей полубесконечной пластиной в жидкости конечной глубины. Построено явное аналитическое решение этой задачи методом Винера — Хопфа. Получены простые точные формулы для коэффициентов отражения и прохождения, а также их асимптотики. Приведены результаты численных расчетов по полученным формулам.

Задача о поведении плавающей упругой пластины на волнах ранее изучалась при исследовании изгибно-гравитационных волн в жидкости с ледяным покровом (см. обзоры [1, 2]). В настоящее время эта задача представляет интерес в связи с проектированием искусственных островов и плавающих аэропортов, а также платформ различного назначения. Существуют различные численные методы решения таких задач, в частности для полубесконечной пластины (см., например, [3–5]). Однако все эти методы позволяют получить достоверные результаты только в области больших и умеренных длин волн и становятся некорректными при малых длинах набегающих волн. Аналитическое решение методом Винера — Хопфа построено в [6] для косого набегания в жидкости конечной глубины, в [7] для стратифицированной жидкости, в [8] для прямого набегания в бесконечно глубокой жидкости, в [9] для косого набегания с использованием уравнения Тимошенко — Миндлина для изгибных колебаний пластины. Во всех этих работах полученное решение зависит от неизвестных коэффициентов, для определения которых нужно решить систему линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты системы имеют сложный вид. В [10] удалось обратить эту систему и найти точные значения искомых коэффициентов, а также явное выражение для потенциала скоростей и простые точные формулы для коэффициентов прохождения и отражения в случае прямого набегания в бесконечно глубокой жидкости. В данной работе такие формулы получены для случая жидкости конечной глубины.

Постановка задачи. Будем предполагать, что жидкость идеальная несжимаемая конечной глубины H. Поверхность жидкости частично закрыта тонкой упругой полубесконечной пластиной. Плоская волна малой амплитуды набегает под прямым углом к пластине, причем длина волны значительно больше толщины пластины. Введем декартову систему координат (x, y) с центром O в кромке пластины и осью Ox, направленной вдоль пластины (рис. 1). Осадкой платформы в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды. Задача решается в линейной постановке.

Потенциал скоростей жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (y < 0). \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта № 1 СО РАН.

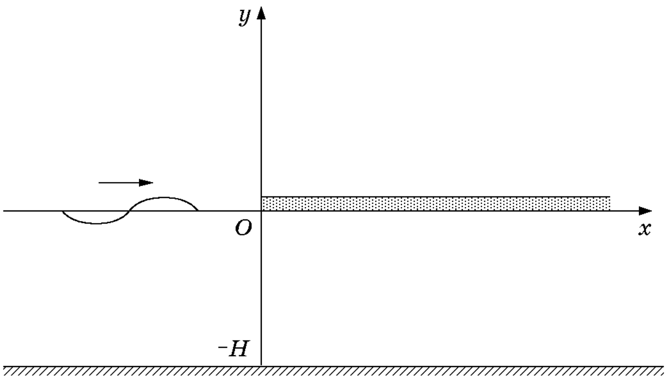

Рис. 1. Схема течения

Граничные условия можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad (y=-H, \quad -\infty<x<\infty), \qquad \varphi_y=\eta_t \quad (y=0, \quad -\infty<x<\infty),$$

$$D\,\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\rho_0 h\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=p, \qquad p=-\rho(\varphi_t+g\eta) \qquad (y=0, \quad x>0), \tag{2}$$

$$\varphi_t+g\eta=0 \qquad (y=0, \quad x<0).$$

Здесь η — вертикальное смещение поверхности жидкости (пластины); g — ускорение свободного падения; D — цилиндрическая жесткость пластины; h, ρ_0 — толщина и плотность пластины; t — время. На краю пластины момент и перерезывающая сила должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0 \qquad (x=0, \quad y=0). \tag{3}$$

Введем безразмерные переменные $\varphi'=\varphi/(A\sqrt{gl}\,)$, $x'=x/l$, $y'=y/l$, $t'=t\sqrt{g/l}$, $H'=H/l$, где A — амплитуда падающей волны; $l=g/\omega^2$ — характерная длина. Далее штрихи будем опускать. Потенциал φ представим в виде

$$\varphi=(\varphi_0+\varphi_1)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad \varphi_0=\mathrm{e}^{i\gamma x}\mathrm{ch}(\gamma(y+H))/\mathrm{ch}\,(\gamma H),$$

где φ_0 — потенциал падающей волны; φ_1 — дифрагированный потенциал; γ — волновое число в набегающей волне, определяемое из дисперсионного соотношения для поверхностных волн на воде глубины H: $\gamma\,\mathrm{th}\,(\gamma H)-1=0$. Тогда из (1)–(3) можно получить краевую задачу для φ_1. Функция $\varphi_1(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0 \qquad (y=-H, -\infty<x<\infty); \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\varphi_1=0 \qquad (y=0, \quad x<0); \tag{5}$$

$$\Big(\beta\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}+1-\delta\Big)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\varphi_1=B\,\mathrm{e}^{i\gamma x} \qquad (y=0, \quad x>0); \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad (x=0, \quad y=0). \tag{7}$$

Здесь $\beta=D/(\rho g l^4)$, $\delta=\rho_0 h/(\rho l)$ — безразмерные параметры задачи; $B=\delta-\beta\gamma^4$. Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x|\to\infty$ и условия регулярности

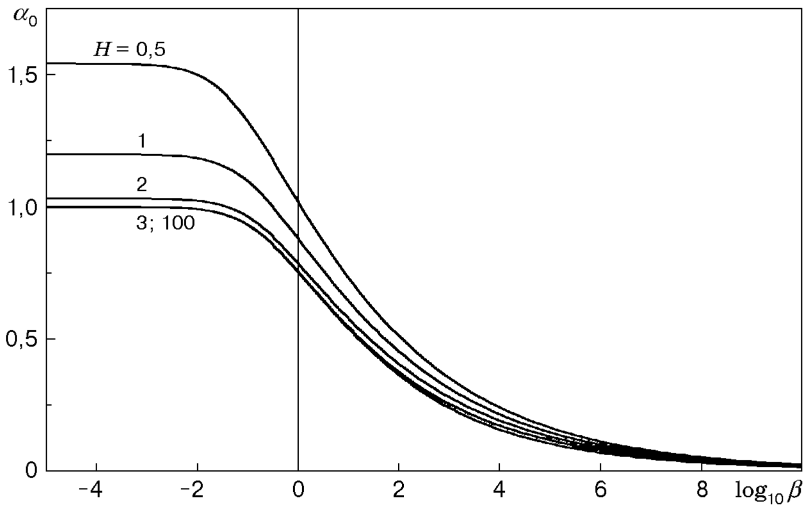

Рис. 2. Зависимость волнового числа α_0 от β при различных значениях H

вблизи кромки (локальная ограниченность энергии). Вследствие сделанных предположений параметр $\delta \ll 1$. В дальнейшем положим δ равным нулю.

Дисперсионные соотношения. Рассмотрим характер распространения волн в жидкости со свободной поверхностью и под пластиной. Найдем решения уравнения Лапласа с условием (4) на дне и соответствующим условием на верхней границе вида $e^{i\alpha x}\operatorname{ch}(\alpha(y+H))/\operatorname{ch}(\alpha H)$.

1. *Поверхностные волны.* Для поверхностных волн значения α должны удовлетворять дисперсионному соотношению $\alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1 = 0$, которое имеет два действительных корня $\pm\gamma$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm\gamma_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, расположенных симметрично относительно действительной оси [3].

2. *Изгибно-гравитационные волны.* Для волн, распространяющихся в пластине (так называемых изгибно-гравитационных волн), дисперсионное соотношение $(\beta\alpha^4 + 1)\alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1 = 0$ имеет два действительных корня $\pm\alpha_0$, счетное множество чисто мнимых корней $\pm\alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, симметричных относительно действительной оси, а также четыре комплексных корня, симметричных относительно действительной и мнимой осей [3]. Обозначим через α_{-1} корень, лежащий в первом квадранте, через α_{-2} — корень во втором квадранте.

Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, остальные корни определяют краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины. На рис. 2 показана зависимость волнового числа α_0 от β при различных значениях H. При $H \geqslant 3$ значения α_0 практически не зависят от H. Однако при малых значениях H и β зависимость от глубины становится существенной, при этом $\alpha_0 \to \infty$ при $H \to 0$. Асимптотика корня α_0 при предельных значениях параметров H и β дается следующими соотношениями: при $H \to 0$ $\quad \alpha_0 \to (\beta H)^{-1/6}$, при $H \to \infty$ значение α_0 стремится к действительному корню уравнения $\beta\alpha^5 + \alpha - 1 = 0$, соответствующего бесконечно глубокой жидкости [10]. При $\beta \to \infty$ $\quad \alpha_0 \to (\beta H)^{-1/6}$, при $\beta \to 0$ $\quad \alpha_0 \to \gamma$.

Аналитическое решение задачи. Решение задачи будем строить методом Винера — Хопфа в интерпретации Джонса [11]. Введем в рассмотрение функции комплексной переменной α

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int\limits_0^\infty e^{i\alpha x}\varphi_1(x, y)\,dx, \qquad \Phi_-(\alpha, y) = \int\limits_{-\infty}^0 e^{i\alpha x}\varphi_1(x, y)\,dx, \tag{8}$$

$$\Phi(\alpha, y) = \Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y).$$

Функция $\Phi_+(\alpha, y)$ определена в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > 0$, а функция $\Phi_-(\alpha, y)$ — в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha < 0$. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости.

Исследуем поведение функций $\Phi_\pm(\alpha, y)$. При $x \to -\infty$ дифрагированный потенциал представляет собой отраженную волну вида $R\,\mathrm{e}^{-i\gamma x}$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню γ_1. Поэтому $\Phi_-(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha < |\gamma_1|$, за исключением полюса при $\alpha = \gamma$. При $x \to \infty$ потенциал φ_1 представляет собой проходящую волну с волновым числом α_0, волну с волновым числом γ, компенсирующую φ_0, и множество экспоненциально затухающих мод. Поэтому функция $\Phi_+(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > -c$, за исключением полюсов в точках $\alpha = -\alpha_0$ и $\alpha = -\gamma$ ($c = \min\{\operatorname{Im}\alpha_{-1}, |\alpha_1|\}$ — положительное число, соответствующее наименее затухающей моде в пластине).

Функция $\Phi(\alpha, y)$ представляет собой образ Фурье для функции $\varphi_1(x, y)$ и удовлетворяет уравнению $\partial^2\Phi/\partial y^2 - \alpha^2\Phi = 0$. Общее решение этого уравнения с условием (4) на дне имеет вид

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha)\,\mathrm{ch}\,(\alpha(y + H))/\mathrm{ch}\,(\alpha H). \tag{9}$$

Обозначим через $D_\pm(\alpha)$ интегралы типа (8), где функция φ_1 под интегралом заменяется левой частью краевого условия (5), а через $F_\pm(\alpha)$ — аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (6). Эти интегралы представляют собой преобразование Фурье обобщенных функций [12]. Для них выполняются соотношения

$$D_+(\alpha) + D_-(\alpha) = C(\alpha)(\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1), \quad F_+(\alpha) + F_-(\alpha) = C(\alpha)[(\beta\alpha^4 + 1)\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1]. \tag{10}$$

Из краевых условий (5) и (6) имеем $D_-(\alpha) = 0$, $F_+(\alpha) = -B/(i(\alpha + \gamma))$. С учетом этого соотношения (10) запишем в виде

$$D_+(\alpha) = C(\alpha)(\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1), \quad F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)} = C(\alpha)[(\beta\alpha^4 + 1)\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1]. \tag{11}$$

Из последних двух уравнений получим

$$D_+(\alpha) = \frac{\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1}{(\beta\alpha^4 + 1)\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1}\Big(F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha + \gamma)}\Big). \tag{12}$$

Обозначим $K(\alpha) = K_1(\alpha)/K_2(\alpha)$, где $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$ — дисперсионные функции для волн на воде и в пластине соответственно: $K_1(\alpha) = \alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1$, $K_2(\alpha) = (\beta\alpha^4 + 1)\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H) - 1$. Следует отметить, что эти функции четные.

В соответствии с методом Винера — Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т. е. представить ее в виде

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha), \tag{13}$$

где функции $K_\pm(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и функции $\Phi_\pm(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет соответственно нули и полюса на действительной оси в точках $\pm\gamma$ и $\pm\alpha_0$. Легко показать, что $|\alpha_1| < |\gamma_1|$. Поэтому будем рассматривать области аналитичности S_+ и S_- (S_+ — полуплоскость $\operatorname{Im}\alpha > -c$ с разрезами, исключающими точки α_0 и γ, S_- — полуплоскость $\operatorname{Im}\alpha < c$ с разрезами, исключающими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$) (рис. 3).

Введем функцию $g(\alpha) = K(\alpha)\beta(\alpha^2 - \alpha_0^2)(\alpha^2 - \alpha_{-1}^2)(\alpha^2 - \alpha_{-2}^2)/(\alpha^2 - \gamma^2)$. Функция $g(\alpha)$ не имеет нулей, ограничена и стремится на бесконечности к единице. Факторизуем $g(\alpha)$ следующим образом [11]: $g(\alpha) = g_+(\alpha)g_-(\alpha)$, где

$$g_\pm(\alpha) = \exp\Big[\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp id}^{\infty\mp id}\frac{\ln g(x)}{x - \alpha}\,dx\Big], \qquad d < c. \tag{14}$$

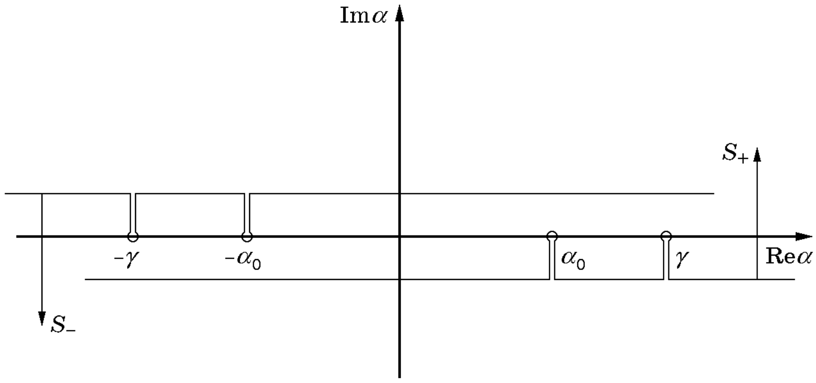

Рис. 3. Области $S_\pm$ аналитичности функций $\Phi_\pm$

Определим функции $K_\pm(\alpha)$:

$$K_+(\alpha) = \frac{(\alpha+\gamma)g_+(\alpha)}{\sqrt{\beta}(\alpha+\alpha_0)(\alpha+\alpha_{-1})(\alpha+\alpha_{-2})}, \quad K_-(\alpha) = \frac{(\alpha-\gamma)g_-(\alpha)}{\sqrt{\beta}(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\alpha_{-1})(\alpha-\alpha_{-2})}. \quad (15)$$

При этом $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$.

Уравнение (12) запишем в виде

$$K_-(\alpha)\Big(F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha+\gamma)}\Big) = \frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)},$$

или

$$K_-(\alpha)F_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha+\gamma)}\,(K_-(\alpha) - K_-(-\gamma)) = \frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{BK_-(-\gamma)}{i(\alpha+\gamma)}.$$

В левой части этого равенства имеем функцию, аналитическую в области S_-, а в правой — функцию, аналитическую в S_+. Аналитическим продолжением их можно определить функцию во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля эта функция является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при $|\alpha| \to \infty$.

Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше $O(r^{-\lambda})$ ($\lambda < 1$, r — расстояние до кромки пластины). Тогда функция $F_-(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ имеет порядок не выше $O(|\alpha|^{\lambda+3})$, а $D_+(\alpha)$ — не выше $O(|\alpha|^{\lambda-1})$ [12]. Функции $K_\pm(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^{-2})$, так как $g_\pm(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$\frac{D_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{BK_-(-\gamma)}{i(\alpha+\gamma)} = \frac{BK_-(-\gamma)}{i}\,(a + b\alpha),$$

где a и b – неизвестные константы, которые будем определять из условий (7).

Выражая из последнего уравнения $D_+(\alpha)$, с учетом (9) и (11) находим

$$\varphi_1(x,y) = \frac{BK_-(-\gamma)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha x}\,\frac{\operatorname{ch}(\alpha(y+H))K_+(\alpha)}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_1(\alpha)}\Big(a + b\alpha - \frac{1}{\alpha+\gamma}\Big)d\alpha,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,(x,0) = \mathrm{e}^{i\gamma x} + \frac{BK_-(-\gamma)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha x}\,\frac{\alpha \operatorname{th}(\alpha H)K_+(\alpha)}{K_1(\alpha)}\Big(a + b\alpha - \frac{1}{\alpha+\gamma}\Big)d\alpha. \quad (16)$$

Контур интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей S_+ и S_-. Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0 и γ снизу, а точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$ сверху.

Рассмотрим случай $x > 0$. Используя (13), второе выражение в (16) можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) = \mathrm{e}^{i\gamma x} + \frac{BK_-(-\gamma)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,\alpha\,\mathrm{th}\,(\alpha H)}{K_-(\alpha)K_2(\alpha)}\Big(a + b\alpha - \frac{1}{\alpha+\gamma}\Big)d\alpha.$$

При $x > 0$ замыкаем контур интегрирования в нижней полуплоскости и получаем полюса в точках $-\gamma$, $-\alpha_j$ ($j = -2, -1, \ldots$). Вычет в точке $-\gamma$ компенсируется набегающей волной. Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) = -BK_-(-\gamma)\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}\,\alpha_j\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)}\Big(a - b\alpha_j - \frac{1}{\gamma-\alpha_j}\Big).$$

Подставляя данное выражение в краевые условия (7), получим систему линейных алгебраических уравнений второго порядка для определения неизвестных a и b

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Коэффициенты матрицы вычисляются по формулам

$$A_{11} = \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j^3\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)}, \qquad A_{12} = iA_{21},$$

$$A_{21} = \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j^4\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)}, \qquad A_{22} = -\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j^5\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)}.$$

Величины C_1, C_2, входящие в правую часть уравнения (17), имеют вид

$$C_1 = \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j^3\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)(\gamma-\alpha_j)}, \quad C_2 = \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j^4\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)(\gamma-\alpha_j)}.$$

Систему (17) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \gamma U_3 - U_4 & -\gamma U_4 + U_5 \\ \gamma U_4 - U_5 & -\gamma U_5 + U_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $U_m = \displaystyle\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j^m\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H)}{K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)(\gamma-\alpha_j)}$.

Покажем, что коэффициенты U_5 и U_6 равны нулю. Тогда полученную систему можно точно обратить. Заменяя сумму интегралом и учитывая, что $\alpha_j^5\,\mathrm{th}\,(\alpha_j H) = -K_1(\alpha_j)/\beta$, получим

$$U_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi i\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_1(\alpha)\alpha^{m-5}\,d\alpha}{(\gamma+\alpha)K_-(\alpha)K_2(\alpha)}, \qquad m = 5,\ 6.$$

С учетом (13) имеем

$$U_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi i\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^{m-5}K_+(\alpha)\,d\alpha}{\gamma+\alpha}, \qquad m = 5,\ 6.$$

Подынтегральная функция регулярна в верхней полуплоскости и убывает при $|\alpha| \to \infty$ не медленнее, чем α^{-2}. Следовательно, $U_5 = U_6 = 0$. Из системы (18) находим $a = 1/\gamma$, $b = -1/\gamma^2$.

Подставляя значения коэффициентов a и b в (16), получим

$$\varphi_1(x,0) = -\frac{BK_-(-\gamma)}{2\pi i\gamma^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\alpha x} \, \frac{K_+(\alpha)\alpha^2 \, d\alpha}{K_1(\alpha)(\gamma+\alpha)}.$$

Теперь можно найти отраженную и прошедшую волны. При $|x| \to \infty$ потенциал имеет вид $\varphi(x,0) = R\,\mathrm{e}^{-i\gamma x}$, $x \to -\infty$, $\varphi(x,0) = T\,\mathrm{e}^{i\alpha_0 x}$, $x \to \infty$. Для R и T получим следующие выражения:

$$R = \frac{\beta\gamma K_+^2(\gamma)}{2K_1'(\gamma)}, \qquad T = -\frac{\beta\gamma^2 K_-(-\gamma)\alpha_0^2}{(\gamma-\alpha_0)K_-(-\alpha_0)K_2'(-\alpha_0)}.$$

С учетом сделанной нормировки в данном случае амплитуда $|R|$ представляет собой коэффициент отражения. Подставляя в последние формулы выражения (15), получим значения амплитуд $|R|$ и $|T|$. Интеграл в формуле (14) можно снести на действительную ось [11]. В результате получим

$$|g_+(\gamma)| = \sqrt{g(\gamma)} = \sqrt{\frac{\beta(\gamma^2-\alpha_0^2)|\gamma^2-\alpha_{-1}^2|\,|\gamma^2-\alpha_{-2}^2|\,|K_1'(\gamma)|}{2\gamma|K_2(\gamma)|}},$$

$$|K_+(\gamma)| = \sqrt{\frac{2\gamma(\gamma-\alpha_0)|K_1'(\gamma)|}{(\gamma+\alpha_0)|K_2(\gamma)|}}.$$

Для коэффициента отражения имеем формулу $|R| = |(\gamma-\alpha_0)/(\gamma+\alpha_0)|$. Аналогично находим

$$|K_+(\alpha_0)| = \sqrt{\frac{(\gamma+\alpha_0)|K_1(\alpha_0)|}{2\alpha_0(\gamma-\alpha_0)|K_2'(\alpha_0)|}}.$$

Тогда формула для $|T|$ принимает вид

$$|T| = \frac{2}{\gamma+\alpha_0}\sqrt{\frac{\gamma|K_1'(\gamma)|}{\operatorname{th}(\alpha_0 H)|K_2'(\alpha_0)|}}.$$

В [6, 9] получено точное энергетическое соотношение между амплитудами $|R|$ и $|T|$, которое для случая нормального набегания волн можно записать в виде

$$|R|^2 + |T|^2\,\frac{\alpha_0 \operatorname{th}(\alpha_0 H)|K_2'(\alpha_0)|}{|K_1'(\gamma)|} = 1.$$

Найденные выражения для амплитуд удовлетворяют ему. Отметим, что полученные точные значения $|R|$ и $|T|$ совпадают с приведенными в [9] приближенными значениями, где выражение для $|R|$ получено в предположении непрерывности смещений на кромке, т. е. при $a = b = 0$, а формула для $|T|$ выведена из энергетического соотношения. В действительности коэффициенты a и b отличны от нуля, но $a + b\gamma = 0$. Этим можно объяснить хорошее согласие расчетов по этим формулам с расчетами при учете параметра δ [9].

Теперь можно вычислить все интересующие величины в проходящей волне. Амплитуда перемещений пластины в проходящей волне вычисляется по формуле $|\eta| = |T|\alpha_0 \operatorname{th}(\alpha_0 H)$. Правая часть этого равенства представляет собой коэффициент прохождения

$$T^* = \frac{2\alpha_0}{\gamma+\alpha_0}\sqrt{\frac{\gamma|K_1'(\gamma)|\operatorname{th}(\alpha_0 H)}{|K_2'(\alpha_0)|}}.$$

Следует отметить, что в литературе имеются различные определения коэффициента прохождения. Большинство авторов определяют его как отношение амплитуды вертикального смещения в проходящей волне к амплитуде возвышения набегающей волны [3–6]. Однако в [9] под коэффициентом прохождения понимается отношение амплитуды потенциала в проходящей волне к амплитуде потенциала в набегающей волне.

Деформация пластины вычисляется по формуле

$$e_{xx} = -\frac{h}{2}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}.$$

Максимальная деформация пластины в проходящей волне имеет амплитуду $e_{\max} = Ahe/(2l^2)$, $e = |T|\alpha_0^3\,\mathrm{th}\,(\alpha_0 H)$.

Предельные случаи. Найдем асимптотические формулы для коэффициентов отражения и прохождения в предельных случаях больших и малых значений параметров H и β. При $\beta \to \infty$, что соответствует очень жесткой пластине или коротким набегающим волнам, имеем $\alpha_0 = (\beta H)^{-1/6} + O(\beta^{-1/2})$. Тогда

$$|R| = 1 - 2(\beta H)^{-1/6}/\gamma + O(\beta^{-1/2}), \quad T^* = 2\beta^{-1/3}H^{1/6}\sqrt{K_1'(\gamma)/(6\gamma)} + O(\beta^{-1/2}).$$

При $\beta \to 0$ (этот случай соответствует очень мягкой пластине или длинным набегающим волнам) $\alpha_0 = \gamma - \beta\gamma^4/K_1'(\gamma) + O(\beta^2)$. Для коэффициентов получаем формулы

$$|R| = \beta\,\frac{\gamma^3}{2K_1'(\gamma)} + O(\beta^2), \qquad T^* = 1 - \beta\,\frac{6\gamma^3 + 3\gamma^3 H(\gamma^2+1)}{2K_1'(\gamma)} + O(\beta^2).$$

В случае малой глубины ($H \to 0$) $\alpha_0 = (\beta H)^{-1/6} + O(H^{1/2})$. Тогда

$$|R| = 1 - 2\gamma(\beta H)^{1/6} + O(H^{1/3}), \qquad T^* = 2\beta^{-1/6}H^{1/3}\sqrt{\gamma K_1'(\gamma)/6} + O(H^{1/2}).$$

При $H \to \infty$ получаем модель бесконечно глубокой жидкости [10].

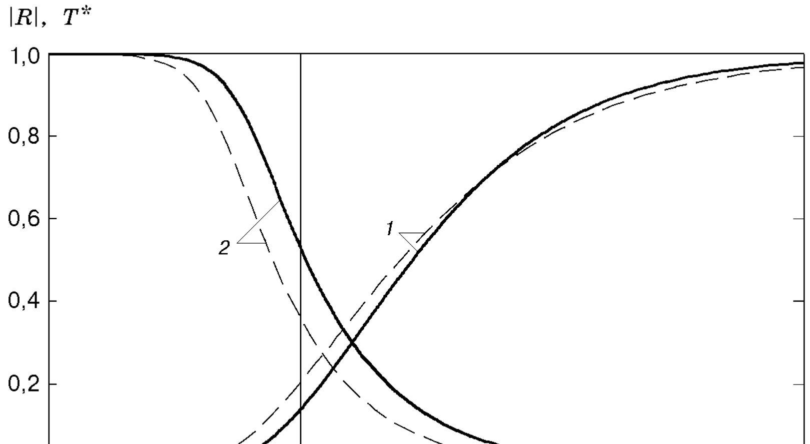

Рис. 4. Зависимости коэффициентов отражения $|R|$ (кривые *1*) и прохождения T^* (кривые *2*) от β:
сплошные линии — $H = 100$, штриховые — $H = 0{,}5$

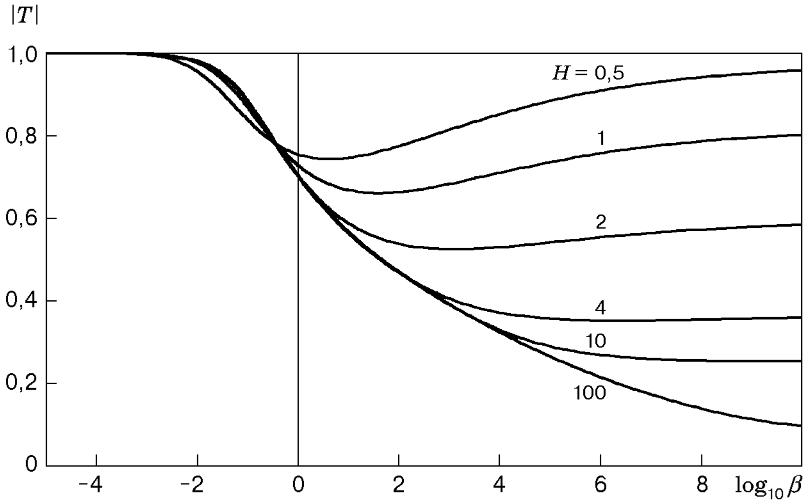

Рис. 5. Зависимость амплитуды потенциала $|T|$ от β при различных значениях H

Численные результаты. Проведенные расчеты показали, что коэффициенты отражения и прохождения слабо зависят от глубины жидкости и существенно меняются при изменении параметра β. На рис. 4 показана зависимость коэффициентов отражения и прохождения от β при $H = 100$ и $H = 0{,}5$. Значения коэффициентов $|R|$ и T^* при $H = 100$ в рассматриваемом диапазоне параметра β практически не отличаются от соответствующих значений для бесконечно глубокой жидкости [10]. При малых значениях β пластина ведет себя как тонкая пленка и практически не препятствует распространению волны. Коэффициент отражения мал, а коэффициент прохождения близок к единице. При больших значениях β пластина очень жесткая, коэффициент отражения стремится к единице, а коэффициент прохождения — к нулю.

На рис. 5 представлена зависимость амплитуды потенциала $|T|$ от β при различных значениях H. Здесь наблюдается существенная зависимость от глубины жидкости. На рис. 6 показана зависимость безразмерных максимальных деформаций пластины в проходящей волне от β при различной глубине жидкости. Из рис. 6 следует, что при малых

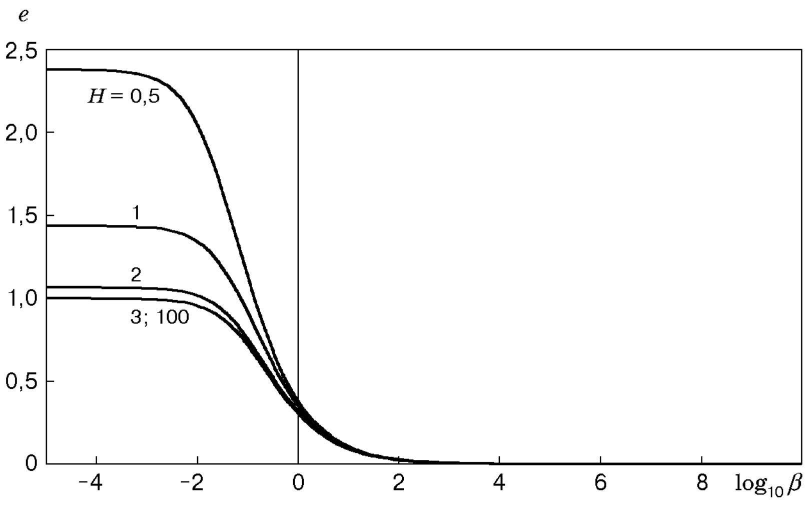

Рис. 6. Зависимость безразмерных максимальных амплитуд деформаций e от β при различных значениях H

значениях H и β деформации пластины могут быть значительными, что объясняется большими значениями волнового числа α_0 (см. рис. 2). Таким образом, наиболее опасными для пластины являются длинные волны, особенно при небольшой глубине жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Squire V. A., Dugan J. P., Wadhams P., et al.** Of ocean waves and sea ice // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995. V. 27. P. 115–168.
2. **Марченко А. В.** Изгибно-гравитационные волны // Тр. Ин-та общ. физики РАН. 1999. Т. 56: Динамика волн на поверхности жидкости. С. 65–111.
3. **Fox C., Squire V. A.** Reflection and transmission characteristics at the edge of short fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95, N C7. P. 11.629–11.639.
4. **Fox C., Squire V. A.** On the oblique reflection and transmission of ocean waves at short fast sea ice // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347, N 1682. P. 185–218.
5. **Букатов А. Е., Завьялов Д. Д.** Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 3. С. 121–126.
6. **Evans D. V., Davies T. V.** Wave-ice interaction: Report / Davidson lab.; Stevens Inst. of Technol. N 1313. New Jersey, 1968.
7. **Варламов В. В.** О рассеянии внутренних волн краем упругой пластины // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 3. С. 413–421.
8. **Гольдштейн Р. В., Марченко А. В.** Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 6. С. 924–930.
9. **Balmforth N. J., Craster R. V.** Ocean waves and ice sheets // J. Fluid Mech. 1999. V. 395. P. 89–124.
10. **Ткачева Л. А.** Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. (В печати.)
11. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
12. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 22/XI 2000 г.