УДК 627.157

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТА ДОННЫХ НАНОСОВ ДЛЯ РЕК С ПЕСЧАНЫМ ДНОМ

И. И. Потапов

Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск
E-mail: potapovII@rambler.ru

Исследуется проблема определения удельного расхода наносов, увлекаемых потоком жидкости, текущей над размываемым песчаным дном. Решена краевая задача для двухфазной смеси жидкости и твердых частиц в придонном активном слое и получена общая формула для определения удельного массового расхода наносов. Определены ограничения, налагаемые на реологическую модель движущейся смеси, при которых из модели можно исключить феноменологический параметр — концентрацию частиц в активном слое смеси. В рамках предложенной реологической модели получено уравнение деформаций русла для песчаного дна.

Ключевые слова: деформации русла, придонный активный слой, наносы, увлекаемые потоком жидкости, уравнение донных деформаций.

Введение. На основе подхода, предложенного в [1, 2], определен удельный массовый расход твердых частиц q_i, необходимый для замыкания двумерного уравнения деформаций русла:

$$(1-\varepsilon)\rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial s_i} = Q. \tag{1}$$

Здесь ε — пористость донного материала; ρ_s — плотность донных частиц; ζ — функция, задающая форму поверхности дна; q_i — удельный массовый расход твердых частиц; Q — источниковый (стоковый) член. При моделировании донных деформаций классическим вариантом замыкания уравнения (1) является использование зависимости вида [3–5]

$$q_i = q_0 |\tau_k^\zeta|^b \Big[\frac{\tau_i^\zeta}{|\tau_k|} - \Lambda_{ij}\,\frac{\partial \zeta}{\partial s_j}\Big] \tag{2}$$

(τ_k^ζ — касательные напряжения вблизи поверхности дна; τ_i^ζ — компоненты вектора напряжения на площадках, касательных к поверхности смеси в активном придонном слое).

Однако при использовании формулы (2) возникают трудности, обусловленные необходимостью определения параметров q_0, b, тензора Λ_{ij} и источникового члена Q, в общем случае являющихся функциями, зависящими от физико-механических и гранулометрических свойств донного материала.

Упрощенная формула (2) впервые экспериментально получена в работе [6] (для $q_0 \approx 8$, $b = 1{,}5$). Физическое обоснование этого результата для установившихся потоков дано в [7, 8]. Позднее формула (2) была подтверждена в работе [9], в которой с использованием вероятностного подхода получено значение $b = 1 \div 3$. В работе [10] с помощью метода,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-99035 р-офи).

основанного на анализе размерностей, установлено, что $b = 1{,}5 \div 2{,}5$. Развивая подход [7], авторы работ [3, 5] обосновали структуру формулы для дна, имеющего конечные уклоны $|\Lambda_{ij}| \neq 0$ при $b = 1{,}5$. Однако в указанных работах модели наносов, увлекаемых потоком жидкости, включали два и более феноменологических коэффициентов, для определения которых в конкретных случаях требовались дополнительные исследования.

Значительный вклад в методологию определения параметров q_0, b, тензора Λ_{ij} и источникового члена Q внесли работы [11–13], в которых на основе анализа движения двухфазной смеси жидкости и твердых частиц с использованием моделей Кулона — Ньютона [11] и Кулона — Прандтля [12, 13] получены аналитические формулы для определения удельного массового расхода q_i со степенным коэффициентом $1{,}0 \leqslant b \leqslant 1{,}5$.

Предложенные в работах [11, 12] формулы для расчета q_i содержат один феноменологический параметр f (концентрация частиц в придонном активном слое), который рассматривается как независимый и определяется экспериментальным путем. При этом отмечается, что проведение данных экспериментов существенно затруднено.

В работе [13] показано, что влияние характера распределения по глубине активного слоя концентрации f на удельный расход наносов минимально и параметр f с высокой степенью точности можно считать постоянным.

В настоящей работе определено ограничение, налагаемое на степенные коэффициенты реологической модели, при котором феноменологический параметр — концентрацию частиц в активном слое смеси — можно исключить. Показано, что используемый в работах [12, 13] параметр f (концентрация частиц в придонном активном слое) является зависимым и его можно исключить при выводе формул удельного массового расхода q_i, тогда как реологическая модель Кулона — Ньютона [11] с постоянной вязкостью активного слоя не позволяет исключить параметр f. Получены аналитические зависимости для q_i, позволяющие определить величины Λ_{ij} и Q.

1. Постановка задачи. Для определения удельного массового расхода твердых частиц используем формулу [2–5]

$$q_i = \rho_s \int\limits_0^h f u_i \, dm, \tag{1.1}$$

где u_i — вектор скорости движения активного слоя смеси; h — глубина активного слоя смеси.

Значения функций u_i, h, f определим из решения гидродинамических уравнений, полученных в предположении, что глубина движущегося активного слоя наносов h мала по сравнению с характерным размером русла в плане, а силы инерции малы по сравнению с силами трения ($\mathrm{Re} \ll 1$). Поэтому можно использовать уравнения движения [13]

$$\frac{\partial p}{\partial s_i} + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial s_i} + \frac{\partial \tau_i}{\partial m} = 0; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial m} = \rho g \cos \gamma, \tag{1.3}$$

дополняемые реологическими соотношениями [14], обобщенными в работе [1]:

$$\tau_i = -(\tau_s + \tau_b) \frac{\partial u_i}{\partial m} \Big| \frac{\partial u_k}{\partial m} \Big|^{-1}. \tag{1.4}$$

Здесь $\tau_b = \mu_*(h - m)^n |\partial u_k / \partial m|^k$; $\tau_s = p_s \operatorname{tg} \varphi$ — абсолютные значения касательного напряжения жидкой и твердой несвязной фаз; n, k — степенные коэффициенты реологической модели; τ_i — компоненты вектора напряжения на площадках, касательных к поверхности смеси в активном придонном слое; γ — острый угол между нормалью к верхней границе активного слоя (донной поверхности $\zeta = \zeta(x, y)$) и вертикальной линией; p — давление в активном придонном слое; $p_s = mf(\rho_s - \rho_w)g\cos\gamma$ — давление взвешенных в воде твердых частиц; $\rho = f\rho_s + (1-f)\rho_w$; ρ_w, ρ_s — плотности воды и частиц; m — координата на оси, направленной вниз по нормали к поверхности активного слоя ($m = 0$ на верхней границе активного слоя $\zeta = \zeta(x, y)$); s_i — ортогональные криволинейные координаты, связанные с поверхностью дна ζ (линия s_1 совпадает с направлением вектора скорости гидродинамического потока, а линия s_2 перпендикулярна ему); φ — угол внутреннего трения донных частиц.

Согласно [2, 4, 6] критерием начала движения частиц в активном слое ($m \leqslant h$) является условие $\tau_0 < |\tau_i|$, соответственно поверхность скольжения на глубине h, определяющая нижнюю границу активного слоя, находится из условия

$$|\tau_i(h)| = \tau_0, \tag{1.5}$$

где $\tau_0 = p_s \operatorname{tg}\varphi$ — касательное напряжение, при котором донные частицы начинают двигаться [4, 6]. В силу непрерывности скоростей u_i и напряжений $|\tau_i|$ на поверхности скольжения из (1.5) получаем граничные условия

$$u_i(h) = 0. \tag{1.6}$$

Условия (1.5), (1.6) и задаваемые на верхней границе придонного активного слоя ($m = 0$) условия для нормального и касательного напряжений:

$$\tau_i(0) = \tau_i^\zeta; \tag{1.7}$$

$$p(0) = p^\zeta \tag{1.8}$$

(p^ζ — нормальное давление на верхней границе активного слоя) позволяют замкнуть задачу (1.2), (1.4) и получить в аналитическом виде выражение для удельного массового расхода.

2. Определение удельного массового расхода наносов. Из уравнения (1.3) и условия (1.8) получим выражение для функции давления p в активном слое:

$$p = p^\zeta + m\rho g\cos\gamma.$$

Здесь $p^\zeta = \rho_w g(H - \zeta)$. В предположении, что уклон свободной поверхности речного потока много меньше уклона дна: $|\partial H/\partial s_i| \ll |\partial\zeta/\partial s_i|$ (H — свободная поверхность речного потока), находим

$$\frac{\partial p}{\partial s_i} = -\rho_w g\,\frac{\partial\zeta}{\partial s_i}, \qquad \frac{\partial p}{\partial s_i} + (f\rho_s + (1-f)\rho_w)g\,\frac{\partial\zeta}{\partial s_i} = f(\rho_s - \rho_w)g\,\frac{\partial\zeta}{\partial s_i} = A\Gamma_i, \tag{2.1}$$

где

$$\Gamma_i = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\cos\gamma}\,\frac{\partial\zeta}{\partial s_i}; \tag{2.2}$$

$$A = F_a f, \qquad F_a = \cos\gamma\operatorname{tg}\varphi\,(\rho_s - \rho_w)g. \tag{2.3}$$

Интегрируя уравнения (1.2) по глубине активного слоя, с учетом (2.1)–(2.3) получаем

$$\tau_i = \tau_i^\zeta - mA\Gamma_i. \tag{2.4}$$

Совместим ось s_1 с вектором $\boldsymbol{\tau}^\xi$, тогда в системе координат s_i вектор $\boldsymbol{\tau}^\zeta$ имеет компоненты $\tau_i^\zeta = (\tau_1^\zeta, 0)$.

Используя уравнения (1.4), (2.4) и граничные условия (1.5), (1.6) и учитывая, что при $m = h$ $\tau_b \equiv 0$, $\tau_s = hA$, определим глубину активного слоя h:

$$\sqrt{(\tau_1^\zeta - hA\Gamma_1)^2 + (hA\Gamma_2)^2} = hA. \tag{2.5}$$

Выбирая только положительный корень h внутри круга единичного радиуса $|\Gamma_i| < 1$, получаем

$$h = \frac{\tau_1^\zeta}{A\sqrt{1-\Gamma_2^2} + \Gamma_1}.$$

Для того чтобы определить градиент скорости $\partial u_i/\partial m$, необходимый для вычисления удельного массового расхода твердых частиц (1.1), используем соотношение

$$\frac{\partial u_i}{\partial m} = -\frac{\tau_i}{|\tau_k|}\Big|\frac{\partial u_k}{\partial m}\Big|. \tag{2.6}$$

Модуль $|\partial u_i/\partial m|$ в (2.6) определим из уравнения состояния (1.4):

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial m}\Big| = \sqrt[k]{\frac{|\tau_i| - mA}{\mu_*(h-m)^n}}. \tag{2.7}$$

Исключая из (2.7) модуль напряжений в каждой точке активного слоя $|\tau_i| = |\tau_1^\zeta - mA\Gamma_i| = A\sqrt{(\tau_1^\zeta - m\Gamma_1)^2 + (m\Gamma_2)^2}$ и выражая напряжения на поверхности слоя $\tau_1^\zeta = hA\big(\sqrt{1-\Gamma_2^2} + \Gamma_1\big)$ через глубину h, находим

$$\Big|\frac{\partial u_k}{\partial m}\Big| = \Big(\frac{A}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{1}{(h-m)^{n/k}} \sqrt[k]{\sqrt{(h(\sqrt{1-\Gamma_2^2} + \Gamma_1) - m\Gamma_1)^2 + (m\Gamma_2)^2} - m}. \tag{2.8}$$

Проинтегрировав по частям уравнение (1.1), получаем

$$q_i = \rho_s \int\limits_0^h f u_i\,dm = \rho_s f u_i m\Big|_0^h - \rho_s f \int\limits_0^h m\,\frac{\partial u_i}{\partial m}\,dm = \rho_s f \int\limits_0^h m\Big|\frac{\partial u_k}{\partial m}\Big|\,\frac{\tau_i}{|\tau_k|}\,dm. \tag{2.9}$$

В силу граничных условий (1.6) первое слагаемое в правой части (2.9) равно нулю. Для вычисления второго слагаемого подставим в (2.9) выражение (2.8) и выполним разложение подынтегральных выражений (2.9) по параметру Γ_i с точностью до второго порядка:

$$q_1 = \Big(\frac{A}{\mu_*}\Big)^{1/k} \int\limits_0^h \frac{f\rho_s m}{(h-m)^{n/k}} \sqrt[k]{\sqrt{(h(\sqrt{1-\Gamma_2^2} + \Gamma_1) - m\Gamma_1)^2 + (m\Gamma_2)^2} - m}\ \times$$

$$\times\ \frac{h(\sqrt{1-\Gamma_2^2} + \Gamma_1) - m\Gamma_1}{\sqrt{(h(\sqrt{1-\Gamma_2^2} + \Gamma_1) - m\Gamma_1)^2 + (m\Gamma_2)^2}}\,dm \approx \Big(\frac{F_a}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{\rho_s f^{(k+1)/k} k^2 h^{(2k-n+1)/k}}{(n-1-k)(n-1-2k)}\ \times$$

$$\times\Big(1 + \frac{\Gamma_1}{k} - \frac{1+k}{2k^2}\,\Gamma_1^2 - \frac{(n-1)^2 + k(6k^2+20k+9) - 9kn}{2k(n-1-3k)(n-1-4k)}\,\Gamma_2^2\Big); \tag{2.10}$$

$$q_2 = \Big(\frac{F_a}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{\rho_s f^{(k+1)/k} h^{(2k-n+1)/k}}{(n-1-k)(n-1-2k)}\,\frac{k^3}{n-1-3k}\,\Gamma_2. \tag{2.11}$$

Исключая из формул (2.10), (2.11) глубину активного слоя h, получаем

$$q_1 = \Big(\frac{F_a}{\mu_*}\Big)^{1/k} k^2 \rho_s f^{(k+1)/k} \frac{(\tau_1^\zeta/(F_a f\sqrt{1-\Gamma_2^2}+\Gamma_1))^{(2k-n+1)/k}}{(n-1-k)(n-1-2k)} \times$$
$$\times \Big(1+\frac{\Gamma_1}{k} - \frac{1+k}{2k^2}\,\Gamma_1^2 - \frac{(n-1)^2+k(6k^2+20k+9)-9kn}{2k(n-1-3k)(n-1-4k)}\,\Gamma_2^2\Big); \qquad (2.12)$$

$$q_2 = \Big(\frac{F_a}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{\rho_s f^{(k+1)/k}(\tau_1^\zeta/(F_a f\sqrt{1-\Gamma_2^2}+\Gamma_1))^{(2k-n+1)/k}}{(n-1-k)(n-1-2k)}\,\frac{k^3}{n-1-3k}\,\Gamma_2. \qquad (2.13)$$

Как и в одномерном случае [1], из формул (2.12), (2.13) следует, что феноменологический параметр f исключается из процесса вычисления удельного массового расхода q_i при условии равенства степенных показателей: $n\equiv k$. В этом случае формулы (2.12), (2.13) принимают вид

$$q_1 = \Big(\frac{1}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{\rho_s k^2 \tau_1^\zeta (\tau_1^\zeta)^{1/k}}{(k+1)F_a(\sqrt{1-\Gamma_2^2}+\Gamma_1)^{(k+1)/k}} \times$$
$$\times \Big(1+\frac{\Gamma_1}{k} + \frac{k-1}{2k^2}\,\Gamma_1^2 - \frac{(k+1)(6k^2+6k+1)}{2k(2k+1)(3k+1)}\,\Gamma_2^2\Big); \qquad (2.14)$$

$$q_2 = -\Big(\frac{1}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{\rho_s k^3 \tau_1^\zeta (\tau_1^\zeta)^{1/k}}{(k+1)(2k+1)F_a}\,\frac{\Gamma_2}{(\sqrt{1-\Gamma_2^2}+\Gamma_1)^{(k+1)/k}}. \qquad (2.15)$$

Условие $n\equiv k$ отражает требования, налагаемые на выбор уравнения состояния при постановке задачи (1.1)–(1.8). Поскольку полученная из уравнений равновесия зависимость (2.4) требует, чтобы касательное напряжение в активном слое уменьшалось с увеличением глубины этого слоя, используемое уравнение состояния (1.4) должно позволять воспроизводить такое поведение напряжений в активном слое [12, 13], чего не происходит, например, в случае среды Кулона — Ньютона [11] ($n=0$, $k=1$), когда напряжение растет с увеличением m.

Для исключения величин Γ_1, Γ_2 из знаменателя (2.14), (2.15) повторно выполним разложение этих выражений по данным параметрам с точностью до второго порядка:

$$q_1 = \Big(\frac{1}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{\rho_s k^2 \tau_1^\zeta (\tau_1^\zeta)^{1/k}}{(k+1)F_a(\sqrt{1-\Gamma_2^2}+\Gamma_1)^{(k+1)/k}} \times$$
$$\times \Big(1+\frac{\Gamma_1}{k} + \frac{k-1}{2k^2}\,\Gamma_1^2 - \frac{(k+1)(6k^2+6k+1)}{2k(2k+1)(3k+1)}\Gamma_2^2\Big) \approx$$
$$\approx \Big(\frac{1}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{k^2}{k+1}\,\frac{\rho_s \tau_1^\zeta (\tau_1^\zeta)^{1/k}}{F_a} \Big(1-\Gamma_1+\Gamma_1^2 - \frac{k+1}{2(2k+1)(3k+1)}\,\Gamma_2^2\Big); \qquad (2.16)$$

$$q_2 = -\Big(\frac{1}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{\rho_s k^3 \tau_1^\zeta (\tau_1^\zeta)^{1/k}}{(k+1)(2k+1)F_a}\,\frac{\Gamma_2}{(\sqrt{1-\Gamma_2^2}+\Gamma_1)^{(k+1)/k}} \approx$$
$$\approx -\Big(\frac{1}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{2k^3}{(k+1)(2k+1)(3k+1)}\,\frac{\rho_s \tau_1^\zeta (\tau_1^\zeta)^{1/k}}{F_a}\,((1+3k)\Gamma_2 - (2+3k)\Gamma_1\Gamma_2). \qquad (2.17)$$

Для сравнения с (2) и формулами, полученными в работах [11, 12], в соотношениях (2.16), (2.17) отбросим члены второго порядка по Γ_i и запишем полученные уравнения в векторном виде:

$$q_i = \Big(\frac{1}{\mu_*}\Big)^{1/k} \frac{k^2}{k+1} \frac{\rho_s \tau_1^\zeta (\tau_1^\zeta)^{1/k}}{F_a} \Big(\Big(1 - \frac{\Gamma_1}{2k+1}\Big) \frac{\tau_i^\zeta}{|\tau_k^\zeta|} - \frac{2k}{2k+1}\,\Gamma_i\Big). \qquad (2.18)$$

Нетрудно показать, что выражение (2.18) аналогично модельной формуле (2), однако в отличие от нее не содержит феноменологических коэффициентов, за исключением реологического степенного параметра k, который, как правило, принимается равным двум.

Частным случаем (2.18) являются формулы, полученные в работах [12, 13] (для параметров $k = 2$, $\mu_* = \rho_w \varkappa^2$, где $\varkappa$ — постоянная Кармана):

$$q_i = \frac{4}{3} \frac{\rho_s (\tau_1^\zeta)^{3/2}}{\varkappa \sqrt{\rho_w}\, F_a} \Big[\Big(1 - \frac{1}{5}\,\Gamma_1\Big) \frac{\tau_i^\zeta}{|\tau_k^\zeta|} - \frac{4}{5}\,\Gamma_i\Big].$$

3. Учет относительной скорости частиц. При использовании соотношения (1.1) для определения удельного массового расхода твердых частиц (односкоростная модель) скорости расхода твердых частиц и жидкости полагаются одинаковыми. Это не позволяет определить значения скорости в момент начала движения частиц. Для использования более точной двухскоростной формулы необходимо определить скорость v_i отставания частиц от гидродинамического потока и затем выполнить более точный расчет удельного массового расхода твердых частиц:

$$q_i = \rho_s f \int_0^h (u_i - v_i)\, dm. \qquad (3.1)$$

На практике достаточно найти поправку к удельному расходу (2.18), имеющую вид

$$\Delta q_i = -\rho_s f \int_0^h v_i\, dm. \qquad (3.2)$$

Следуя [12, 13], необходимую для вычисления поправки (3.2) скорость отставания частиц v_i определим из анализа баланса сил, действующих на частицы, находящиеся в единице объема:

$$F_i^w + F_i^s + F_i^g = 0. \qquad (3.3)$$

Здесь F_i^w — сила сопротивления, действующая на частицы со стороны воды [3, 12]:

$$F_i^w = f\, \frac{c_x \rho_w v_i |v_k|}{2d}, \qquad (3.4)$$

v_i — компоненты относительной скорости движения частиц; d — диаметр частиц; c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц; F_i^s — сила трения между частицами, определяемая из реологического соотношения (1.4) для напряжения твердой фазы:

$$F_i^s = -f F_a\, \frac{\partial m e_i}{\partial m}, \qquad (3.5)$$

e_i — единичный вектор направления потока увлекаемых частиц, зависящий от глубины активного слоя [13]:

$$e_1 = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{m}{h}\,\Gamma_2\Big)^2, \qquad e_2 = -\frac{m}{h}\,\Gamma_2\Big(1 - \Big(1 - \frac{m}{h}\Big)\Gamma_1\Big),$$

F_i^g — сила тяжести в проекции на плоскость, касательную к поверхности дна:

$$F_i^g = -f F_a \Gamma_i. \qquad (3.6)$$

Из (3.3)–(3.6) для относительной скорости v_i получаем

$$\frac{c_x \rho_w v_i |v_k|}{2d} = F_a(1-\Gamma_i)E_i, \tag{3.7}$$

где

$$E_i = \Big(1+\Gamma_1 - \frac{2m^2\Gamma_2^2}{h^2},\ \Gamma_2 - \frac{m^2}{h^2}\,\Gamma_1\Gamma_2 - \frac{2m\Gamma_2(h-(h-m)\Gamma_1)}{h^2}\Big).$$

Из выражения (3.7) находим

$$v_i = v^*\,\frac{E_i}{\sqrt{|E_k|}},$$

где $v^* = \sqrt{2dF_a/(c_x\rho_w)}$.

Разлагая множитель $E_i/\sqrt{E_i}$ по степеням Γ_i и оставляя члены первого порядка малости, получаем

$$\frac{E_1}{\sqrt{E_k}} \approx 1 + \frac{\Gamma_1}{2}; \tag{3.8}$$

$$\frac{E_2}{\sqrt{E_k}} \approx \frac{h-2m}{h}\,\Gamma_2. \tag{3.9}$$

Используя соотношения (3.8), (3.9), найдем поправку расхода (3.2):

$$\Delta q_1 = \rho_s f v^* \int\limits_0^h v_1\,dm = \rho_s f v^*\Big(1+\frac{1}{2}\,\Gamma_1\Big)h = \rho_s v^*\Big(1-\frac{1}{2}\,\Gamma_1\Big)\frac{\tau_1^\zeta}{F_a}; \tag{3.10}$$

$$\Delta q_2 = \rho_s f v^* \int\limits_0^h v_2\,dm = 0. \tag{3.11}$$

Решение (3.10), (3.11) показывает, что поправка расхода твердых частиц в направлении s_2 является нулевой, поскольку скорость гидродинамического потока в данном направлении равна нулю, однако вследствие наличия уклонов дна расход наносов в направлении s_2 может существовать. Следовательно, при определении критерия начала движения твердых частиц в модели (3.1) необходимо использовать только компоненты скорости в направлении s_1, т. е. $|v_1| < |u_1|$.

Формулы (3.10), (3.11) можно представить в виде

$$\Delta q_i = \rho_s v^*\Big(1-\frac{1}{2}\,\Gamma_i\Big)\frac{\tau_i^\zeta}{F_a}. \tag{3.12}$$

С учетом поправки (3.12) выражение для удельного массового расхода твердых частиц принимает вид

$$q_i = \frac{k^2}{\sqrt[k]{\mu_*}\,(k+1)}\,\frac{\rho_s\tau_1^\zeta(\tau_1^\zeta)^{1/k}}{F_a}\,\Big(\Big(1-\frac{\Gamma_1}{2k+1}\Big)\frac{\tau_i^\zeta}{|\tau_k^\zeta|} - \frac{2k}{2k+1}\,\Gamma_i\Big) -$$
$$-\rho_s\sqrt{\frac{2d}{c_x\rho_w F_a}}\,\Big(1-\frac{1}{2}\,\Gamma_i\Big)\tau_1^\zeta\,\frac{\tau_i^\zeta}{|\tau_k^\zeta|}. \tag{3.13}$$

Из уравнения (3.13) можно получить условие начала движения наносов:

$$1-\sqrt{\frac{(k+1)^2}{k^4}\,\frac{2dF_a}{c_x\rho_w}\Big(\frac{\mu_*}{\tau_1^\zeta}\Big)^{2/k}}-\Big(1-\sqrt{\frac{(k+1)^2}{k^4}\,\frac{dF_a}{2\rho_w c_x}\Big(\frac{\mu_*}{\tau_1^\zeta}\Big)^{2/k}}\Big)\Gamma_1=0,$$

позволяющее определить критические напряжения τ_*:

$$\tau_*=\mu_*\Big(\frac{dF_a(2-\Gamma_1)^2(k+1)^2}{2k^4c_x\rho_w(1-\Gamma_1)^2}\Big)^{k/2}. \qquad (3.14)$$

При $k=2$, $\mu_*=\varkappa^2\rho_w$ выражение (3.14) совпадает с формулами из [12, 13].

4. Уравнение деформаций русла. Подставляя выражение для удельного массового расхода твердых частиц (3.13) в уравнение (1), с учетом зависимости (2.2) получаем уравнение деформаций русла в окончательном виде

$$(1-\varepsilon)\,\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s_i}\Big(\Lambda_{ij}\,\frac{\partial\zeta}{\partial s_j}\Big)+Q,$$

где

$$\Lambda_{ij}=\frac{mk^2(\tau_1^\zeta)^{(k+1)/k}}{\sqrt[k]{\mu_*}\,(k+1)F_a\operatorname{tg}\varphi\cos\gamma}\begin{bmatrix}1-\dfrac{k+1}{k^2}\sqrt[k]{\dfrac{\mu_*}{\tau_1^\zeta}}\sqrt{\dfrac{dF_a}{2c_x\rho_w}} & 0\\ 0 & \dfrac{2k}{2k+1}\end{bmatrix},$$

$$Q=m\,\frac{\partial}{\partial s_i}\Big[\frac{\tau_1^\zeta}{F_a}\Big(\frac{k^2}{k+1}\sqrt[k]{\frac{\tau_1^\zeta}{\mu_*}}-\sqrt{\frac{2dF_a}{c_x\rho_w}}\Big)\frac{\tau_i^\zeta}{|\tau_k^\zeta|}\Big],\qquad m=\begin{cases}1, & \tau_1^\zeta>\tau_*,\\ 0, & \tau_1^\zeta\leqslant\tau_*.\end{cases}$$

5. Выводы. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

В результате решения краевой задачи для двухфазной смеси жидкости и твердых частиц в придонном активном слое получена общая формула для определения удельного массового расхода наносов (3.13), не содержащая феноменологических параметров. Полученная формула обобщает известные модели [12, 13] и хорошо согласуется с экспериментальными данными для горизонтального дна [2–4] и дна, имеющего конечные поперечные [14] и продольные [15] уклоны.

Определены ограничения, налагаемые на реологическую модель движущейся смеси, при которых из модели можно исключить единственный феноменологический параметр f — концентрацию частиц в активном слое смеси.

Показано, что при использовании модели Кулона — Ньютона [11] исключить параметр f невозможно.

Получены аналитические зависимости, определяющие величины q_0, b, Λ_{ij}, Q.

В рамках предложенной реологической модели получено уравнение деформаций русла для песчаного дна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Потапов И. И.** О замыкании уравнения русловых деформаций для несвязного дна. Хабаровск, 2008. (Препр. / ДВО РАН. Вычисл. центр; № 117).
2. **Караушев А. В.** Теория и методы расчета речных наносов. Л.: Гидрометеоиздат, 1977.
3. **Bailard J. A.** An energetic total load sediment transport model for a plane sloping beach // J. Geophys. Res. 1981. V. 86, N C11. P. 10938–10954.

4. **Динамика** русловых потоков и литодинамика прибрежной зоны моря / Под ред. В. К. Дебольского и др. М.: Наука, 1994.
5. **Parker G., Seminara G., Solari L.** Bed load at low Shields stress on arbitrarily sloping beds: Failure of the Bagnold hypothesis // J. Water Resources Res. 2002. V. 38, N 11. P. 31–47.
6. **Meijer-Peter E., Muller R.** Formulae for bedload transport // Proc. of the 2nd Congr. Intern. assoc. for hydraul. structures res. Stockholm: S. n., 1948. P. 224.
7. **Bagnold R. A.** An approach to the sediment transport problem from general physics: US geolog. survey prof. paper. Washington, 1966.
8. **Bagnold R. A.** An energetics total load sediment transport model for a plane sloping beach // J. Geophys. Res. 1981. V. 86. P. 10938–10954.
9. **Einstein H. A.** The bed-load function for sediment transportation in open channel flows // Tech. Bull. US Dept. Agriculture. 1950. N 1026. P. 1–71.
10. **Yalin M. S.** An expression for bedload transportation // J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1963. V. 89, N 3. P. 221–250.
11. **Петров П. Г.** Движение донных наносов под воздействием потока жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 2. С. 182–185.
12. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 72–76.
13. **Петров А. Г., Петров П. Г.** Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 102–112.
14. **Lane E. W., Carlson E. J.** Some factors affecting the stability of channel constructed in coarse granular material // Proc. of the Intern. hydraul. convention. Minnesota: S. n., 1953. P. 37–48.
15. **Fernandez Luque, van Beek R. R.** Erosion and transport of bedload sediment // J. Hydraul. Resources. 1976. V. 14, N 2. P. 127–144.

Поступила в редакцию 14/V 2008 г.