

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПРОСЛОЙКИ

Ю. М. Волчков, Л. А. Дергилева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуются краевые эффекты в напряженном состоянии прослойки при ее растяжении и сдвиге жесткими плитами. На основе уравнений безмоментного и моментного упругих слоев решаются задачи, качественно моделирующие напряженно-деформированное состояние в «мягком» слое, заключенном между двумя «жесткими».

В слоистых конструкциях на межслойных поверхностях вблизи свободных границ возникают большие градиенты напряжений (краевые или межслойные эффекты), которые становятся причиной разрывов и расслоений на границах слоев с сильно различающимися механическими свойствами (на границах «жестких» и «мягких» слоев). Межслойные эффекты не описываются классическими уравнениями теории пластин и оболочек или моделями слоистых пластин, в которых пренебрегается продольными напряжениями в «мягких» слоях. В [1] краевые эффекты в слоистой пластине исследуются на основе уравнений уточненной теории анизотропных пластин Амбарцумяна в «мягких» слоях и уравнений Кирхгофа — Лява в «жестких». Краевой эффект выделяется методом пограничных функций. Большинство численных алгоритмов определения межслойных напряжений строится на основе метода конечных элементов.

В данной работе изучается напряженное состояние тонкой упругой прослойки, заключенной между абсолютно жесткими плитами, при ее растяжении и сдвиге в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

В [2] изложена процедура построения уравнений упругого слоя на основе разложений смещений и напряжений в плоской задаче теории упругости по полиномам Лежандра. Для каждой из искомых функций (смещений и напряжений) используется несколько аппроксимаций. Вывод уравнений упругого слоя в первом приближении (уравнений моментного слоя) содержится в [3], там же выписаны общие решения этих уравнений. Уравнения первого приближения — это уравнения относительно обычных для теории пластин величин: осредненных по толщине перемещений, углов поворотов, усилий и моментов. Аналогично можно построить уравнения безмоментного слоя, в которые входят только осредненные по толщине слоя перемещения и усилия. Не приводя вывод используемых ниже уравнений, отметим их основные свойства.

Если толщина слоя h мала, то в силу принципа Сен-Венана краевые условия на его торцах можно разделить на две группы: условия, влияющие на решение при всех $|x_1| \leq l$ (назовем их основными), и условия, влияющие на решение лишь в окрестности сечений $x_1 = \pm l$ (рис. 1). При построении одномерных уравнений слоя потребуем, чтобы краевая задача была разрешима при любых основных краевых условиях и порядок дифференциальных уравнений слоя не зависел от вида краевых условий на его поверхностях (это позволяет корректно ставить условия сопряжения на межслойных поверхностях).

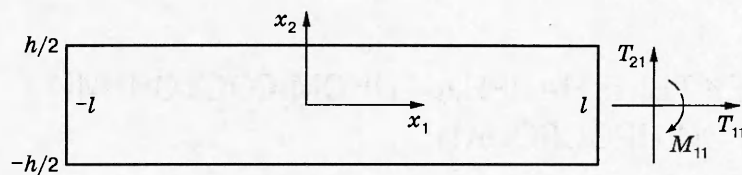


Рис. 1

1. Уравнения безмоментного упругого слоя. Систему уравнений безмоментного слоя запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{11}^0}{dx_1} + \frac{6\mu}{h^2}(u_1^+ - u_1^-) - \frac{12\mu}{h^2}u_1^0 &= 0, & \frac{d\sigma_{21}^0}{dx_1} + \frac{6a}{h^2}(u_2^+ + u_2^-) - \frac{12a}{h^2}u_2^0 &= 0, \\ \sigma_{11}^0 - a \frac{du_1^0}{dx_1} - \frac{b}{h}(u_2^+ - u_2^-) &= 0, & \sigma_{21}^0 - \mu \frac{du_2^0}{dx_1} - \frac{b}{\mu}(u_1^+ - u_1^-) &= 0, \\ \sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^- &= \frac{12\mu}{h} \left[\frac{1}{2}(u_1^+ + u_1^-) - u_1^0 \right], & \sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^- &= 2\sigma_{12}^0, \\ \sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^- &= \frac{12a}{h} \left[\frac{1}{2}(u_2^+ + u_2^-) - u_2^0 \right], & \sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^- &= 2 \left[\frac{a}{h}(u_2^+ - u_2^-) + b \frac{du_1^0}{dx_1} \right], \\ a &= \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}, & b &= \frac{E\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u_i^0, σ_{ij}^0 — средние по толщине слоя смещения и напряжения; μ — модуль сдвига; $u_i^\pm, \sigma_{ij}^\pm$ — смещения и напряжения при $x_2 = \pm h/2$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Растяжение прослойки. При растяжении прослойки (незаштрихованная часть на рис. 2, а) условия на поверхностях слоя и краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_1^+ = u_1^- &= 0, & u_2^\pm &= \pm V, \\ \sigma_{11}^0 = \sigma_{21}^0 &= 0 \text{ при } x_1 = 0, & u_1^0, u_2^0 &\rightarrow 0 \text{ при } x_1 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) находим

$$\sigma_{21}^0 = u_2^0 = 0, \quad \sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^- = \frac{2a}{h}V + b \frac{du_1^0}{dx_1}, \quad \sigma_{12}^- = -\sigma_{12}^+ = 6\mu \frac{1}{h}u_1^0,$$

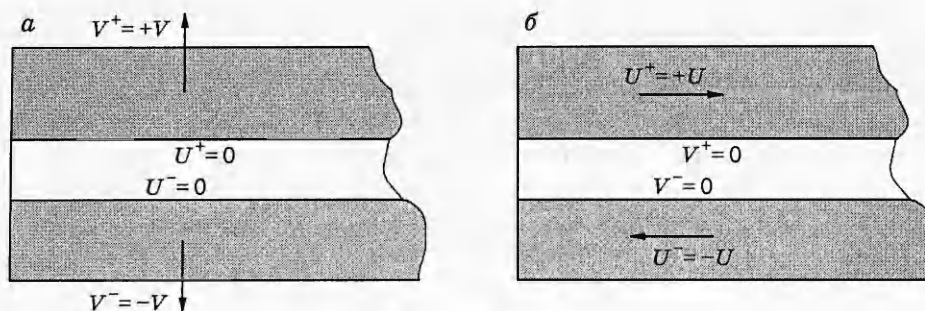


Рис. 2

и определение смещений и напряжений в прослойке сводится к решению задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{11}^0}{dx_1} - \frac{12\mu}{h^2} u_1^0 &= 0, & \sigma_{11}^0 - a \frac{du_1^0}{dx_1} - 2b \frac{V}{h} &= 0, \\ \sigma_{11}^0 &= 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, & u_1^0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_1 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из (1.3) получаем

$$u_1^0 = \frac{2bV}{a\omega_1} \exp\left(-\frac{\omega_1 x_1}{h}\right), \quad \omega_1 = 2\sqrt{\frac{3\mu}{a}},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^+ &= \sigma_{22}^- = (2a/h)V[1 - (b/a)^2 \exp(-\omega_1 x_1/h)], \\ \sigma_{12}^+ &= -\sigma_{12}^- = 2\sqrt{3\mu a} bV \exp(-\omega_1 x_1/h)/(ha). \end{aligned}$$

Вдали от края $x_1 = 0$ в прослойке реализуется однородное напряженное состояние, соответствующее одноосной деформации. В этом состоянии

$$\sigma_{11}^0 = 2bV/h, \quad \sigma_{22}^0 = 2aV/h, \quad \sigma_{21}^0 = 0, \quad \tau_{\max} = (\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)/2 = 2\mu V/h.$$

Вблизи края $x_1 = 0$ напряженное состояние неоднородное. На поверхностях $x_2 = \pm h/2$ действуют значительные касательные напряжения. Максимальное их значение равно

$$2\sqrt{3\mu a} bV/(ha) = 2\sqrt{6} \mu V/(\sqrt{(1-\nu)(1-2\nu)} h)$$

и при $\nu = 1/3$ примерно в 3,5 раза больше $\tau_{\max}$ — максимального касательного напряжения в зоне одноосной деформации.

Сдвиг прослойки. В случае сдвига прослойки (рис. 2,б) имеем

$$\begin{aligned} u_1^+ &= \pm W, & u_2^+ &= u_2^- = 0, \\ \sigma_{11}^0 &= \sigma_{21}^0 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, & \sigma_{11}^0, u_2^0 &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_1 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.1) и (1.4) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^- &= -12\mu u_1^0/h, & \sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^- &= 2\sigma_{21}^0, \\ \sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^- &= -12a u_2^0/h, & \sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^- &= 2b \frac{du_1^0}{dx_1}, \end{aligned}$$

и определение смещений и напряжений в прослойке сводится к решению задач

$$\frac{d\sigma_{11}^0}{dx_1} - \frac{12\mu}{h^2} u_1^0 = 0, \quad \sigma_{11}^0 - a \frac{du_1^0}{dx_1} = 0, \quad (1.5)$$

$$\sigma_{11}^0 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad \sigma_{11}^0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_1 \rightarrow \infty;$$

$$\frac{d\sigma_{21}^0}{dx_1} - \frac{12a}{h^2} u_2^0 = 0, \quad \sigma_{21}^0 - \mu \frac{du_2^0}{dx_1} - 2\mu \frac{W}{h} = 0, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{21}^0 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad u_2^0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_1 \rightarrow \infty.$$

Из (1.5), (1.6) с учетом (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= 0, & u_1^0 &= 0, & \sigma_{21}^0 &= 2\mu W(1 - \exp(-\omega_2 x_1/h))/h, \\ u_2^0 &= 2W \exp(-\omega_2 x_1/h)/\omega_2, & \omega_2 &= 2\sqrt{3a/\mu} = 2\sqrt{6(1-\nu)/(1-2\nu)} \end{aligned}$$

и, следовательно, $\sigma_{22}^+ = -\sigma_{22}^- = 12aW \exp(-\omega_2 x_1/h)/(h\omega_2)$, $\sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^- = \sigma_{21}^0$. Таким образом, при условиях (1.4) в прослойке вдали от края $x_1 = 0$ реализуется однородное напряженное состояние чистого сдвига. Вблизи края $x_1 = 0$ напряженное состояние неоднородное, причем на поверхности $x_2 = -h/2$ возникают значительные растягивающие напряжения. Заметим, что

$$\omega_2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \omega_1,$$

и, следовательно, зона краевого эффекта при сдвиге прослойки существенно меньше зоны краевого эффекта при ее растяжении.

2. Уравнения моментного упругого слоя. Если на поверхностях слоя заданы смещения, то уравнения моментного упругого слоя можно привести к следующей системе дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \eta^2 u_0'' - \frac{3(1-\gamma)}{2} u_0 &= -\frac{3(1-\gamma)}{4} (u^+ + u^-) - \frac{\gamma\eta}{2} (v^+ - v^-)', \\ 2\eta^2 u_1'' - 15(1-\gamma)u_1 - 6\gamma\eta v_0' &= -\frac{15(1-\gamma)}{2} (u^+ - u^-) - 3\gamma\eta(v^+ + v^-)', \\ (1-\gamma)\eta^2 v_0'' + 2\gamma\eta u_1' - 6v_0 &= -\frac{\eta(1-\gamma)}{2} (u^+ + u^-) - 3(v^+ + v^-) + (1-\gamma)f. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Усилия и моменты выражаются через u_0 , u_1 , v_0 по формулам

$$\begin{aligned} t_{11} &= \alpha(\eta u_0' + \gamma(v^+ - v^-)/2), \quad m_{11} = \alpha(\eta u_1' - 3\gamma v_0 + 3\gamma(v^+ + v^-)/2), \\ t_{22} &= \alpha(\gamma\eta u_0' + (v^+ - v^-)/2), \quad m_{22} = \alpha(\gamma\eta u_1' - 3v_0 + 3(v^+ + v^-)/2), \\ t_{12} &= \eta v_0' + (u^+ - u^-)/2, \quad m_{12} = -3u_0 + 3(u^+ + u^-)/2, \\ \sigma_{12}^\pm &= t_{12} \pm m_{12} + r_{12}, \quad \sigma_{22}^\pm = t_{22} \pm m_{22}, \quad r_{12} = -5u_1 + 5(u^+ - u^-)/2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В случае плоской деформации $\gamma = \nu/(1-\nu)$, в случае плоского напряженного состояния $\gamma = \nu$.

Уравнения (2.1), (2.2) записаны в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{\mu}, \quad \bar{u}_i = \frac{2u_i}{h\varepsilon_0}, \quad \xi = \frac{x_1}{L_0}, \quad \zeta = \frac{2x_2}{h}, \quad \eta = \frac{h}{2L_0}, \\ \bar{f}_i^0 &= \frac{f_i^0 h}{2\sigma_0}, \quad \sigma_{11}^0 = \frac{1}{h} T_{11} = \frac{T_{11}}{h\sigma_0}, \quad \sigma_{21}^0 = \frac{1}{h} T_{21} = t_{21} = t_{12} = \frac{T_{21}}{h\sigma_0}, \quad m_{11} = \frac{6M_{11}}{h^2\sigma_0}, \\ u_0 &= \frac{1}{h\varepsilon_0} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{u_1}{h} dx_2, \quad u_1 = \frac{6}{h^2\varepsilon_0} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{u_1}{h} x_2 dx_2, \quad v_0 = \frac{1}{h\varepsilon_0} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{u_2}{h} dx_2, \end{aligned}$$

где σ_0 — характерное напряжение. Размерные величины указаны на рис. 1.

Растяжение прослойки. На поверхностях слоя заданы условия

$$u_1^+ = u_1^- = 0, \quad u_2^\pm = \pm V. \quad (2.3)$$

Краевые условия имеют вид

$$t_{11}(0) = t_{21}(0) = m_{11}(0) = 0. \quad (2.4)$$

Считаем, что вдали от края $\xi = 0$ в прослойке реализуется однородное напряженное состояние.

Из (2.1), (2.3) получаем

$$u_0 \rightarrow 0, \quad u_1 \rightarrow 0, \quad v_0 \rightarrow 0, \quad t_{11} \rightarrow \alpha\gamma V, \quad t_{22} \rightarrow \alpha V \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Вблизи края $\xi = 0$ напряженное состояние неоднородное. Из (2.1)–(2.5) следует

$$u_1 \equiv 0, \quad v_1 \equiv 0, \quad t_{12} \equiv 0, \quad r_{12} \equiv 0,$$

$$u_0 = \frac{\gamma V}{\eta \omega_1} \exp\left(-\frac{\omega_1 \xi}{\eta}\right), \quad i_{11} = \frac{2\gamma V}{1-\gamma} \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_1 \xi}{\eta}\right)\right], \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3(1-\gamma)}{2}}.$$

На поверхностях слоя $\zeta = \pm 1$ действуют нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_{22}^{\pm} = \frac{2V}{1-\gamma} \left[1 - \gamma^2 \exp\left(-\frac{\omega_1 \xi}{\eta}\right)\right], \quad \sigma_{12}^{\pm} = \mp \frac{3\gamma V}{\omega_1} \exp\left(-\frac{\omega_1 \xi}{\eta}\right).$$

Вдали от края $\xi = 0$ в прослойке реализуется однородное напряженное состояние:

$$t_{11} = \frac{2\gamma V}{1-\gamma}, \quad t_{22} = \frac{2V}{1-\gamma}.$$

При этом максимальное касательное напряжение на бесконечности равно

$$\tau_{\max}^{\infty} = \frac{1}{2}(t_{22} - t_{11}) = V$$

и действует на площадке, наклоненной под углом 45° к оси x .

Таким образом, $\sigma_{12}^{\pm}(0)/\tau_{\max}^{\infty} = \mp 3\gamma/\omega_1$. Параметр ω_1 характеризует протяженность краевого эффекта.

На рис. 3 приведены графики изменения величины $\sigma_{12}^-(0)/\tau_{\max}^{\infty}$ в зависимости от ν . Существенная зависимость касательного напряжения вблизи свободного края при растяжении упругой прослойки от коэффициента Пуассона при плоской деформации (кривая 1) объясняется тем, что в этом случае равна нулю деформация в направлении, перпендикулярном поперечному сечению слоя ($\epsilon_3 = 0$). При плоской деформации касательные напряжения у свободной поверхности могут значительно превосходить касательные напряжения, соответствующие однородному напряженному состоянию (кривая 2).

Сдвиг прослойки. На поверхностях слоя заданы условия

$$u^+ = U, \quad u^- = U, \quad v^+ = 0, \quad v^- = 0. \quad (2.6)$$

При $\xi = 0$ краевые условия имеют вид

$$t_{11}(0) = t_{21}(0) = m_{11}(0) = 0. \quad (2.7)$$

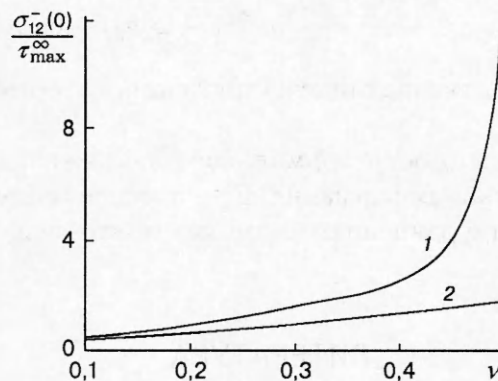


Рис. 3

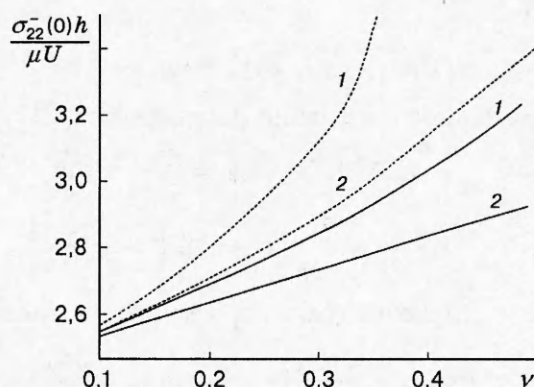


Рис. 4

На бесконечности реализуется одноосное напряженное состояние чистого сдвига

$$u_0(\infty) = v_0(\infty) = t_{11}(\infty) = 0, \quad u_1(\infty) = U. \quad (2.8)$$

Из (2.1) и (2.6)–(2.8) получаем

$$u_0 \equiv 0, \quad u_1 = \exp\left(-\frac{\omega_2 \xi}{\eta}\right) \left(C_1 \cos \frac{\beta}{\eta} \xi + C_2 \sin \frac{\beta}{\eta} \xi\right) + U,$$

$$v_0 = -\exp(-\omega_2 \xi / \eta) [C_1(b_1 \cos \beta \xi - b_2 \sin \beta \xi) + C_2(b_2 \cos \beta \xi + b_1 \sin \beta \xi)],$$

где

$$b_1 = \frac{A(15\gamma + 2(A^2 + B^2) - 15)}{6\gamma(A^2 + B^2)}, \quad b_2 = \frac{B(15\gamma - 2(A^2 + B^2) - 15)}{6\gamma(A^2 + B^2)},$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{-\gamma + 4\sqrt{5} + 9}, \quad \beta = \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{\gamma + 4\sqrt{5} - 9}, \quad C_1 = \frac{U(\eta\beta + 3b_2)}{\Delta},$$

$$C_2 = \frac{U(3b_1\gamma - \eta\omega_2)}{\Delta}, \quad \Delta = -\eta[\eta b_2(\omega_2^2 + \beta^2) + 3\gamma\beta(b_1^2 + b_2^2)].$$

По формулам (2.2) можно вычислить напряжения на поверхности слоя $\sigma_{12}^{\pm} = \eta v_0' - 5u_1 + 6U$, $\sigma_{22}^+ = -\sigma_{22}^- = \alpha(\gamma\eta u_1' - 3v_0)$. Вблизи края $\xi = 0$ напряженное состояние неоднородное, причем на поверхностях слоя возникают нормальные напряжения

$$\sigma_{22}^{\pm}(0) = \pm \frac{6(\gamma + 1)U}{\Delta} [\eta(\beta b_1 - \omega_2 b_2) + 6\gamma b_1 b_2].$$

На поверхности $\zeta = -1$ это растягивающие напряжения, которые могут служить причиной отрыва слоя.

На рис. 4 приведены зависимости нормального напряжения $\sigma_{22}^{\pm}(0)h/(\mu U)$ от коэффициента Пуассона ν (1 — плоская деформация, 2 — плоское напряженное состояние; штриховые кривые соответствуют уравнениям безмоментного слоя, сплошные — уравнениям моментного слоя).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блумберг Н. Н., Тамуж В. П. Краевые эффекты и концентрация напряжений в многослойных композитных пластинах // Механика композит. материалов. 1980. № 3. С. 424–435.

2. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1976. № 6. С. 126–137.
3. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.

Поступила в редакцию 14/I 1998 г.