

УДК 532.526

ИНВАРИАНТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНО УПРАВЛЯЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

К. Г. Гараев, В. А. Овчинников

Казанский государственный технический университет, 420111 Казань

Исследованы групповые свойства уравнений вариационной задачи о нахождении непрерывного закона распределения скорости вдува жидкости в несжимаемый ламинарный пограничный слой в плоском случае, обеспечивающего минимальное значение силы трения, действующей на обтекаемый профиль. Показано, что скорость оптимального вдува на клине при $x = 0$ конечна.

Ключевые слова: вязкая жидкость, оптимальное управление, группы преобразований.

При обтекании тел потоком вязкой жидкости или газа большое значение имеет уменьшение силы лобового сопротивления, которое для тел удобообтекаемой формы в основном определяется суммарной силой сопротивления трения. Одним из способов решения этой задачи является управление местными значениями градиентов продольной скорости на обтекаемой поверхности путем вдува жидкости в пограничный слой. Так как энергетические ресурсы (суммарный расход жидкости, мощность системы управления) ограничены, возникает задача оптимального управления пограничным слоем, впервые поставленная в [1]. В [2] с использованием теории инвариантных вариационных задач и инфинитезимального аппарата Ли — Овсянникова [3, 4] найден первый интеграл для сопряженной системы относительно множителей Лагранжа. В [5] исследованы групповые свойства уравнений плоского стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в оптимально управляемом пограничном слое [1, 6]. В настоящей работе проведена групповая классификация этих уравнений, выделены классы инвариантных краевых задач для случая степенного распределения скорости на внешней границе пограничного слоя и построены соответствующие им автомодельные решения.

Согласно [6, 7] нахождение закона распределения скорости вдува жидкости в ламинарный пограничный слой, обеспечивающего минимальное значение суммарной силы трения

$$X_{\text{тр}} = \int_0^{x_k} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx,$$

действующей на обтекаемый профиль, при заданной мощности системы управления

$$N = \int_0^{x_k} v_w^2(x) dx$$

сводится к совместному интегрированию уравнений Прандтля

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = u_0(y); \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_w(x), \quad u(x, \infty) = U_e(x) \quad (3)$$

и уравнений Эйлера — Лагранжа — Остроградского

$$v \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + u \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = 0, \quad \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\lambda_1(x, 0) = -\rho, \quad \lambda_1(x, \infty) = \lambda_2(x, \infty) = 0, \quad \lambda_1(x_k, y) = 0 \quad (y > 0), \quad \lambda_2(x_k, y) = 0.$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости соответственно на ось x , направленную вдоль контура тела, и ось y , направленную вдоль внешней нормали к обтекаемой поверхности; x_k — абсцисса конца участка вдува; ρ, ν, μ — плотность, кинематическая и динамическая вязкость жидкости; индекс e соответствует значениям величин на внешней границе пограничного слоя, w — на поверхности обтекаемого тела; $u_0(y)$ — начальный профиль скорости; $U_e(x), u_0(y)$ — заданные функции; $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ — множители Лагранжа.

Оптимальное управление находится по формуле $v_w(x) = \alpha \lambda_2(x, 0)$.

Используем найденный в работе [2] первый интеграл сопряженной системы (4), с учетом которого она может быть заменена системой вида

$$u \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) \lambda_1 + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = 0, \quad \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = 0,$$

эквивалентной одному уравнению второго порядка параболического типа

$$u \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = -\nu \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y^2} \quad (5)$$

с начальным условием

$$\lambda_2(x_k, y) = 0 \quad (y > 0) \quad (6)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial \lambda_2(x, 0)}{\partial y} = -\rho \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}, \quad \lambda_2(x, \infty) = 0. \quad (7)$$

Найдем основную группу непрерывных преобразований [3, 4], допускаемых системой уравнений (1), (5). В рассматриваемом случае задача группового анализа сводится к задаче групповой классификации относительно произвольного элемента $\theta(x) \equiv U_e dU_e/dx$. Группы преобразований, допускаемые системой (1), (5) при различных специализациях произвольного элемента, определяются своими алгебрами Ли инфинитезимальных операторов вида

$$X = \xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial}{\partial y} + \xi_u \frac{\partial}{\partial u} + \xi_v \frac{\partial}{\partial v} + \xi_{\lambda_2} \frac{\partial}{\partial \lambda_2}.$$

Построив определяющие уравнения и их общее решение, получим

$$\begin{aligned} \xi_x &= A_1 x + A_2, & \xi_y &= B_1 y + B(x), & \xi_u &= (A_1 - 2B_1)u, \\ \xi_v &= -B_1 v + u \frac{dB}{dx}, & \xi_{\lambda_2} &= D_1 \lambda_2 + D_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где A_1, A_2, B_1, D_1, D_2 — постоянные; $B(x)$ — произвольная функция. Постоянные A_1, A_2, B_1 связаны с произвольным элементом $\theta(x)$ определяющим уравнением

$$(A_1 x + A_2) \frac{d\theta}{dx} = (A_1 - 4B_1)\theta, \quad (9)$$

которое выполняет роль классифицирующего уравнения.

$\theta(x)$	Операторы
0	X_3, X_4, X_5
$\pm e^x$	$4X_3 - X_5$
1	$X_3, 4X_4 + X_5$
$\pm x^n$	$4X_4 - (n - 1)X_5, n \neq 0$

При произвольной функции $\theta(x)$ уравнение (9) удовлетворяется, только если $A_1 = A_2 = B_1 = 0$.

Следовательно, ядро основных алгебр Ли системы (1), (5) образовано операторами

$$X_1 = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \lambda_2}, \quad X_\infty = B \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{dB}{dx} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Результаты групповой классификации приведены в таблице ($X_3 = \partial/\partial x$, $X_4 = x \partial/\partial x + u \partial/\partial u$, $X_5 = y \partial/\partial y - 2u \partial/\partial u - v \partial/\partial v$).

Далее рассматривается степенное распределение скорости на внешней границе пограничного слоя $U_e = c_0 x^m$.

Пусть $m \neq 0$. В этом случае для инвариантности краевых условий (3), (7) с учетом (9) необходимо выполнение соотношений

$$B = A_2 = 0, \quad 2B_1 = (1 - m)A_1, \quad D_1 = A_1 - 2B_1, \quad D_2 = 0, \quad (10)$$

$$A_1(v'_w(x) + (1 - m)v_w(x)/(2x)) = 0.$$

Последнее соотношение для произвольной функции $v_w(x)$ выполняется при $A_1 = 0$, что соответствует тривиальному случаю тождественного преобразования. Считая $A_1 \neq 0$, получим $v_w(x) = cx^{(m-1)/2}$.

Таким образом, для того чтобы краевая задача (1), (3), (5), (7) была инвариантной краевой задачей [8], необходимо выполнение соотношений (8), (10). Если последние выполнены, то краевая задача запишется в терминах инвариантов группы, которая при этом будет представлена оператором

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - m}{2} y \frac{\partial}{\partial y} + mu \frac{\partial}{\partial u} + \frac{m - 1}{2} v \frac{\partial}{\partial v} + m\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2}. \quad (11)$$

Пусть $m = 0$. Для инвариантности краевых условий (3), (7) необходимо выполнение соотношений

$$B = 0, \quad 2B_1 = A_1, \quad D_1 = D_2 = 0, \quad (A_1x + A_2)v'_w(x) + A_1v_w(x)/2 = 0.$$

При $A_1 \neq 0$ из последнего уравнения получим $v_w(x) = c/\sqrt{A_1x + A_2}$. Группа будет представлена операторами

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{v}{2} \frac{\partial}{\partial v}, \quad X = \frac{\partial}{\partial x},$$

первый из которых есть частный случай оператора (11) при $m = 0$.

В обоих рассматриваемых случаях инвариантность начального условия (6) имеет место только при $A_1 = 0$, и, следовательно, не удастся найти ни одного инвариантного решения ранга 1 [3], удовлетворяющего всем краевым условиям. Если начальное условие (6) задать при $x = 0$, то оно будет инвариантным относительно преобразований, соответствующих оператору (11), и вариационная задача (1)–(3), (5)–(7) будет допускать автомодельное решение в силу автоматического удовлетворения начальному условию (2) для уравнений Прандтля [9]. В связи с этим при построении инвариантных решений откажемся от требования инвариантности условия (6).

Инвариантное решение $u = u(y)$, $v = v(y)$, $\lambda_2 = \lambda_2(y)$, соответствующее оператору переноса $X = \partial/\partial x$, позволяет получить точное решение уравнений Прандтля (1) при однородном отсасывании жидкости из пограничного слоя:

$$v(y) = v_0 = \text{const} < 0, \quad u(y) = U_e[1 - \exp(v_0 y/\nu)],$$

которое является точным решением системы уравнений Навье — Стокса в плоском случае [10], а также решение сопряженного уравнения (5) $\lambda_2(x) = \rho U_e \exp(v_0 y/\nu)$, удовлетворяющее граничным условиям (7).

Инвариантное решение, построенное с использованием оператора (11), допускаемого при любых значениях параметра m , может быть записано в виде

$$u = c_0 x^m \Phi'(\eta), \quad v = -\sqrt{\frac{2\nu c_0}{m+1}} x^{(m-1)/2} \left(\frac{m-1}{2} \eta \Phi' + \frac{m+1}{2} \Phi \right), \quad (12)$$

$$\lambda_2 = c_1 x^m g(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{c_0}{\nu}} y x^{(m-1)/2}.$$

Краевая задача (1), (3), (5), (7) на решении вида (12) редуцируется к следующей краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' + \beta(1 - \Phi^2) = 0, \quad \beta = 2m/(m+1); \quad (13)$$

$$\Phi(0) = c_w, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'(\infty) = 1; \quad (14)$$

$$\Phi''' g' - \Phi'' g'' - \beta\Phi'\Phi'' g - \beta(1 - \Phi^2)g' = 0; \quad (15)$$

$$g'(0) = -\rho c_0 \Phi''(0)/c_1, \quad g(\infty) = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения Фокнера — Скэн (13) при граничных условиях (14) с $c_w = 0$ известно как решение Хартри [11]. Используя это решение, найдем решение краевой задачи (15), (16).

Перейдем в (12), (15), (16) к безразмерным величинам: $\bar{x} = x/l$, $\bar{y} = y\sqrt{\text{Re}_r}/l$, $\text{Re}_r = U_r l/\nu$, $U_r = U_e(l)$, $\bar{u} = u/U_r$, $\bar{v} = v\sqrt{\text{Re}_r}/U_r$, $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2/(\rho U_r)$, $\bar{g} = c_1 g/(\rho c_0)$. Тогда соотношения (15), (16) запишутся в виде (далее черта над безразмерными величинами опущена)

$$\Phi''' g' - \Phi'' g'' - \beta\Phi'\Phi'' g - \beta(1 - \Phi^2)g' = 0; \quad (17)$$

$$g'(0) = -\Phi''(0), \quad g(\infty) = 0. \quad (18)$$

В результате решения двухточечной краевой задачи (17), (18) методом пристрелки получены значения $g(0) = 1; 0,756\,49; 0,703\,04; 0,679\,65; 0,666\,56; 0,658\,21$ при $m = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ соответственно.

На рис. 1 представлены зависимости

$$\lambda_2(x, y) = x^m g(\eta) \quad (19)$$

для случая $m = 1$, $c_w = 0$ при фиксированных значениях y и зависимости $\lambda_2(x, y)$, полученные в результате решения начально-краевой задачи (1)–(3), (5)–(7) при $v_w(x) = 0$ разностным методом при тех же значениях m и y . Из рис. 1 следует, что автомодельное решение (19), заведомо не удовлетворяющее начальному условию (6), в окрестности точки $x = 0$ близко к точному решению, полученному разностным методом, неограниченно приближаясь к нему при $x \rightarrow 0$. Заметим, что при $m = 1$ автомодельное решение (19) не имеет особенностей в начале координат.

На рис. 2 представлены автомодельное решение (19) при $c_w = 0$ и точное разностное решение при $v_w(x) = 0$. Сравнение этих решений показывает, что автомодельное решение

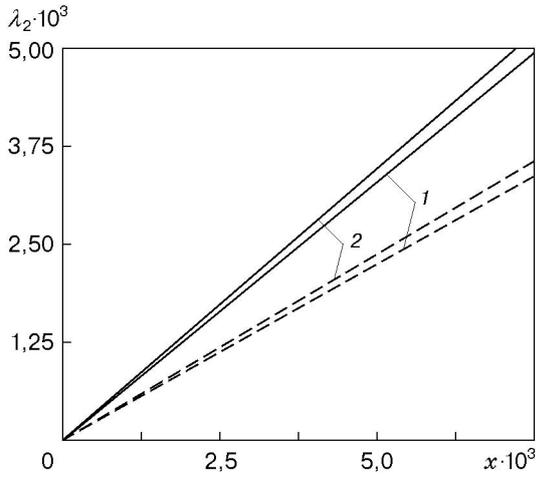


Рис. 1. Зависимости множителя Лагранжа λ_2 от продольной координаты x при $m = 1$:

сплошные линии — $y = 0$, штриховые — $y = 0,2$; 1 — автомодельное решение, 2 — разностное решение

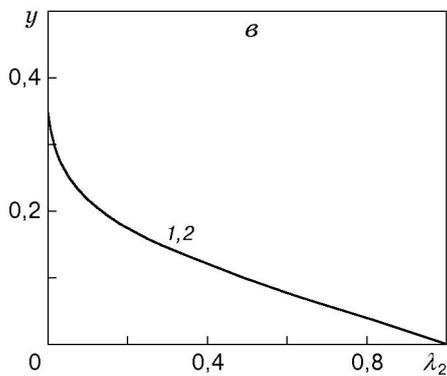
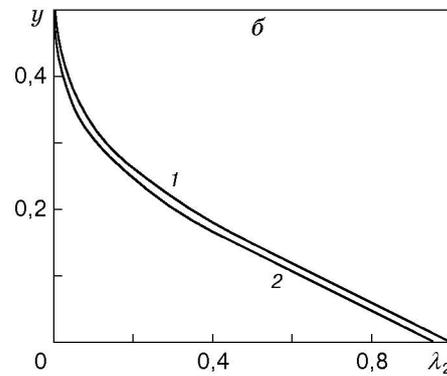
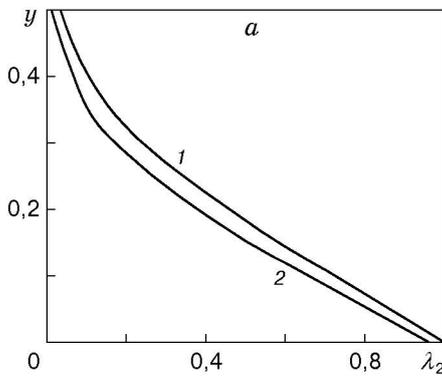


Рис. 2. Зависимости множителя Лагранжа λ_2 от поперечной координаты y при $m = 0$:

a — $x = 0,014$; $б$ — $x = 0,009$; $в$ — $x = 0,004$; 1 — автомодельное решение; 2 — разностное решение

аппроксимирует точное решение при значениях x , близких к нулю, практически совпадая с ним уже при $x = 0,004$. Этот вывод не распространяется на значение $x = 0$, так как в рассматриваемом случае автомодельное решение имеет особенность в начале координат. Однако при $m = 0$ уравнение (17) разрешимо в конечном виде относительно $g(\eta)$: $g(\eta) = a\Phi'(\eta) + b$, где a, b — постоянные интегрирования. Найдем a, b , удовлетворив граничным условиям (18): $a\Phi''(0) = -\Phi''(0)$, $b = -a$. Отсюда при $\Phi''(0) \neq 0$ получим $a = -1$, $b = 1$ (при $\Phi''(0) = 0$ напряжение трения на стенке обращается в нуль и задача минимизации трения теряет смысл). Итак, $g(\eta) = 1 - \Phi'(\eta)$ и, следовательно,

$$\lambda_2 = 1 - \Phi'(\eta)$$

или в размерном виде

$$\lambda_2 = \rho(U_\infty - u). \tag{20}$$

Отметим, что это выражение при $m = 0$ в общем случае произвольной структуры функции $u(x, y)$ является точным аналитическим решением уравнения (5), удовлетворяющим граничным условиям (7).

Численное решение начально-краевой задачи (5)–(7) для сопряженного уравнения в точке $x = 0$ при $m = 0$ получить невозможно, что обусловлено наличием особенности в этой точке в решении уравнений Прандтля. Сравнение этого решения с автомодельным в окрестности точки $x = 0$ (а при $m = 1$ и в самой точке $x = 0$), а также анализ решения (20) позволяют утверждать, что функция λ_2 , а следовательно, и $v_w(x)$ принимают конечные значения при $x = 0$, а именно $\lambda_2(0, 0) = 1$, $v_w(0) = \rho\sqrt{\text{Re}_r} \alpha$ при $m = 0$, $\lambda_2(0, 0) = v_w(0) = 0$ при $m \in (0; 1]$. Этот результат принципиально важен для реализации оптимального закона вдува и корректного удовлетворения ограничению на мощность системы управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимальные задачи газодинамики // Изв. вузов. Авиац. техника. 1963. № 2. С. 11–21.
2. **Гараев К. Г.** Об инвариантных вариационных задачах // Материалы I Поволж. конф. по автоматическому управлению, Куйбышев, 13–15 июня 1970 г. Казань: Тат. кн. изд-во, 1971. Кн. 1. С. 121–129.
3. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Гараев К. Г., Павлов В. Г.** Групповые свойства уравнений оптимально управляемого пограничного слоя // Изв. вузов. Авиац. техника. 1970. № 4. С. 5–9.
6. **Диваков О. Г., Сиразетдинов Т. К.** Об оптимальном управлении пограничным слоем // Изв. вузов. Авиац. техника. 1969. № 3. С. 5–13.
7. **Гараев К. Г.** К задаче оптимального управления трением в ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Авиац. техника. 1981. № 2. С. 27–31.
8. **Пухначев В. В.** Инвариантные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие движения со свободной границей // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 302–305.
9. **Гараев К. Г.** Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 3. С. 92–100.
10. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
11. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 28/V 2002 г.