УДК 532.59:629.576

ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЕ ВОДОЕМА

А. В. Погорелова, В. М. Козин[*,**]

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре
[*] Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 681013 Комсомольск-на-Амуре
[**] Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, 681000 Комсомольск-на-Амуре
E-mails: milova@yandex.ru, kozinvictor@rambler.ru

Исследовано прямолинейное нестационарное движение нагрузки по упругой плавающей пластине, в случае когда глубина водоема меняется в направлении движения нагрузки. Анализируется влияние глубины водоема, толщины пластины, размеров и интенсивности нагрузки, скорости равномерного движения на амплитуду и максимальный прогиб пластины.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, упругая пластина, нестационарное движение.

1. Рассмотрим плавающую на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечную однородную упругую пластину, по которой со скоростью $U(t')$ перемещается тело (система поверхностных давлений q'). Система координат $O'x'y'z'$ располагается следующим образом: плоскость $x'O'y'$ совпадает с невозмущенной поверхностью раздела пластина — вода, направление оси x' совпадает с направлением движения нагрузки, ось z' направлена вертикально вверх. Предполагается, что движение жидкости потенциальное, $\Phi'(x', y', z', t')$ — функция потенциала скоростей движения жидкости, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta\Phi' = 0$. Пусть глубина водоема является функцией переменной x': $H' = H'(x')$ (H' — глубина водоема без учета глубины погружения пластины в условиях статического равновесия).

Перейдем к безразмерной постановке задачи, введя характерный линейный размер — глубину водоема H_0, соответствующую начальному положению (в момент времени $t' = 0$) центра нагрузки $x' = y' = 0$:

$$x = \frac{x'}{H_0}, \quad y = \frac{y'}{H_0}, \quad z = \frac{z'}{H_0}, \quad u = \frac{U}{\sqrt{gH_0}}, \quad H = \frac{H'}{H_0},$$

$$t = t'\sqrt{\frac{g}{H_0}}, \quad \Phi = \frac{\Phi'}{H_0\sqrt{gH_0}}, \quad \tilde{w} = \frac{w'}{H_0}, \quad q = \frac{q'}{\rho_2 g H_0}.$$

Здесь w', $\tilde{w}$ — размерная и безразмерная величины прогиба пластины соответственно; $H = H(x)$ — безразмерная глубина водоема.

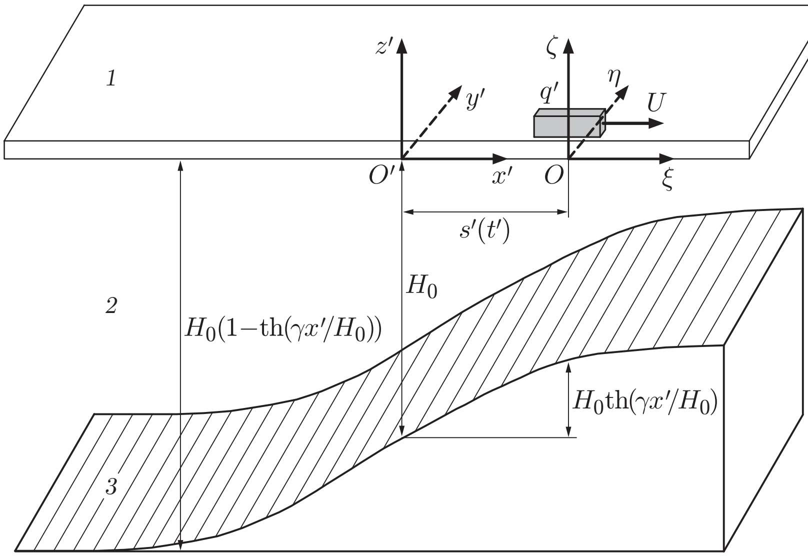

Рис. 1. Схема задачи:
1 — пластина, *2* — жидкость, *3* — дно водоема

Линеаризованные граничные и начальные условия для функций $\tilde{w}$ и Φ имеют вид

$$\varkappa\nabla^4\tilde{w} + \varepsilon\,\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2} + \tilde{w} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -q, \qquad z = 0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}, \qquad z = 0; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}} = 0, \qquad z = -H. \tag{1.3}$$

Здесь $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $\varkappa = D/(\rho_2 g H_0^4)$; $\varepsilon = \rho_1 h/(\rho_2 H_0)$; $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластины; ρ_1, ρ_2 — плотности пластины и воды соответственно.

При условии, что в момент времени $t = 0$ нагрузка покоится и отсутствуют любые возмущения, кроме статической деформации пластины, начальные условия для функции $\Phi(x, y, z, t)$ записываются в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0,\ t=0} = 0, \qquad \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \varepsilon\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\Big)\Big|_{z=0,\ t=0} = 0. \tag{1.4}$$

Предполагается, что в безразмерной постановке глубина водоема изменяется по закону $H = 1 - \mathrm{th}\,(\gamma x)$, где γ — тангенс угла наклона донной поверхности к плоскости $x'O'y'$ в точке, соответствующей начальному положению центра нагрузки (рис. 1).

Введем новую систему координат $O\xi\eta\zeta$, совмещенную с нагрузкой:

$$\xi = x - s, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z/(1 - \mathrm{th}\,(\gamma x)) \tag{1.5}$$

($s = s(t)$ — безразмерное расстояние, пройденное нагрузкой за время t). Заметим, что в новой системе координат на дне водоема выполняется условие $\zeta = -1$, а величина прогиба пластины определяется по формуле

$$w = \tilde{w}/(1 - \mathrm{th}\,(\gamma x)). \tag{1.6}$$

Предположим, что величина γ мала ($|\gamma| \ll 1$). Заметим, что при малых значениях γx ($|\gamma x| \ll 1$) можно считать $\mathrm{th}\,(\gamma x) \approx \gamma x$, т. е. донная поверхность в некоторой достаточно малой области представляет собой склон, при этом γ — тангенс угла между плоскостью склона и плоскостью $x'O'y'$. Если $\gamma > 0$, то движение нагрузки происходит в направлении уменьшения глубины водоема (далее это движение будем называть движением “к берегу”), если $\gamma < 0$, то нагрузка движется в направлении увеличения глубины водоема (движение “от берега”).

Переходя в исходных уравнениях к новым координатам (1.5), при малых значениях γ ($|\gamma x| \ll 1$) получаем следующие выражения для частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \dots, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\gamma\zeta \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \zeta} + \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = (1 + \gamma(\xi + s) + \dots) \frac{\partial}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (1 + 2\gamma(\xi + s) + \dots) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2u \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \xi} - \dot{u} \frac{\partial}{\partial \xi} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.$$

В новых координатах уравнение неразрывности для жидкости записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + 2\gamma\Big(\zeta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi\, \partial \zeta} + (\xi + s) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}\Big) + O(\gamma^2) = 0, \quad |\gamma| \ll 1. \qquad (1.7)$$

Исключая из уравнения (1.1) с помощью (1.2) функцию w, запишем граничное условие для функции потенциала скоростей жидкости Φ на поверхности раздела пластина — жидкость:

$$\varkappa\Big((1 + \gamma(\xi + s))\, \nabla^4 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + 4\gamma\Big(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3\, \partial \zeta} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi\, \partial \eta^2\, \partial \zeta}\Big)\Big) + (1 + \gamma(\xi + s)) \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} +$$
$$+ \varepsilon(1 + \gamma(\xi + s))\Big(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^2\, \partial \zeta} - \dot{u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi\, \partial \zeta} - 2u \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t\, \partial \xi\, \partial \zeta} + u^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^2\, \partial \zeta}\Big) +$$
$$+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \dot{u} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - 2u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial \xi} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial q}{\partial t} - u \frac{\partial q}{\partial \xi} + O(\gamma^2) = 0, \quad \zeta = 0, \ |\gamma| \ll 1. \qquad (1.8)$$

Здесь $\nabla^2 = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2$.

Граничное условие на дне водоема для функции Φ принимает вид

$$(1 + \gamma(\xi + s)) \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + O(\gamma^2) = 0, \qquad \zeta = -1, \quad |\gamma| \ll 1. \qquad (1.9)$$

Начальные условия (1.4) для функции $\Phi(\xi, \eta, \zeta, t)$ преобразуются к виду

$$(1 + \gamma\xi) \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + O(\gamma^2) = 0, \qquad \zeta = 0, \quad t = 0, \quad |\gamma| \ll 1,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varepsilon(1 + \gamma\xi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta\, \partial t} + O(\gamma^2) = 0, \qquad \zeta = 0, \quad t = 0, \quad |\gamma| \ll 1. \qquad (1.10)$$

2. При малых значениях угла наклона донной поверхности ($|\gamma| \ll 1$) асимптотическое решение уравнения (1.7) с условиями (1.8)–(1.10) будем искать в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \gamma\Phi_1 + O(\gamma^2), \qquad |\gamma| \ll 1, \qquad (2.1)$$

где Φ_0 — потенциал скоростей движения жидкости, соответствующий постоянной глубине водоема $H = 1$ ($\gamma = 0$). Заметим, что задача о нахождении потенциала скоростей движения жидкости в случае движения прямоугольной в плане нагрузки по упругой пластине при постоянной глубине водоема решалась в работе [1]. Согласно [1] решение Φ_0 имеет вид

$$\begin{gathered}
\Phi_0(\xi,\eta,\zeta,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1 \exp(\sigma s)\,\mathrm{ch}\,(k(\zeta+1)) \times \\
\times \exp\left(ik((\xi-x_1)\cos\theta + (\eta-y_1)\sin\theta)\right) dx_1\,dy_1, \\
F_1 = \frac{q(x_1,y_1)\sigma}{\mathrm{ch}\,(k)(1+\varepsilon k\,\mathrm{th}\,(k))}\int\limits_0^t u(\tau)\exp(-\sigma s(\tau))\,\frac{\sin(\sqrt{\beta}\,(t-\tau))}{\sqrt{\beta}}\,d\tau, \\
\beta = \frac{k\,\mathrm{th}\,(k)(1+\varkappa k^4)}{1+\varepsilon k\,\mathrm{th}\,(k)}, \qquad \sigma = ik\cos\theta.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Подставляя выражение (2.1) в уравнения (1.7)–(1.10), для функции Φ_1 получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\zeta^2} = -2\Big(\zeta\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\xi\,\partial\zeta} + (\xi+s)\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta^2}\Big) \tag{2.3}$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{gathered}
\varkappa\nabla^4\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta} + \varepsilon\Big(\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial t^2\,\partial\zeta} - \dot u\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi\,\partial\zeta} - 2u\,\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial t\,\partial\xi\,\partial\zeta} + u^2\,\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}\Big) + \\
+ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} - \dot u\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} - 2u\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t\,\partial\xi} + u^2\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi^2} = \\
= -\Big(\varkappa\Big((\xi+s)\nabla^4\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta} + 4\Big(\frac{\partial^4\Phi_0}{\partial\xi^3\,\partial\zeta} + \frac{\partial^4\Phi_0}{\partial\xi\,\partial\eta^2\,\partial\zeta}\Big)\Big) + (\xi+s)\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta} + \\
+ \varepsilon(\xi+s)\Big(\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial t^2\,\partial\zeta} - \dot u\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\xi\,\partial\zeta} - 2u\,\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial t\,\partial\xi\,\partial\zeta} + u^2\,\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}\Big)\Big), \quad \zeta = 0;
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi} - (\xi+s)\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}, \qquad \zeta = -1; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \varepsilon\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\zeta\,\partial t} = -\varepsilon\xi\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta\,\partial t}, \qquad \zeta = 0, \quad t = 0. \tag{2.6}$$

Общее решение уравнения (2.3) будем искать в виде

$$\Phi_1(\xi,\eta,\zeta,t) = \Phi_{1,0}(\xi,\eta,\zeta,t) + \Phi_{1,1}(\xi,\eta,\zeta,t), \tag{2.7}$$

где $\Phi_{1,0}(\xi,\eta,\zeta,t)$ — общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.3); $\Phi_{1,1}(\xi,\eta,\zeta,t)$ — частное решение неоднородного уравнения (2.3).

Частным решением уравнения (2.3) является функция

$$\begin{gathered}
\Phi_{1,1} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1 \exp(\sigma s)\zeta[A\,\mathrm{sh}\,(k(\zeta+1)) + B\zeta\,\mathrm{ch}\,(k(\zeta+1))] \times \\
\times \exp\left[ik((\xi-x_1)\cos\theta + (\eta-y_1)\sin\theta)\right] dx_1\,dy_1, \\
A = -k(x_1+s) + \sigma/(2k), \qquad B = -\sigma/2.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Решение $\Phi_{1,0}(\xi,\eta,\zeta,t)$ будем искать в виде

$$\Phi_{1,0} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\sigma s}[A_1 \operatorname{ch}(k(\zeta+1)) + B_1 \operatorname{sh}(k(\zeta+1))] \times$$
$$\times \exp[ik((\xi-x_1)\cos\theta + (\eta-y_1)\sin\theta)]\,dx_1\,dy_1. \qquad (2.9)$$

Здесь A_1, B_1 — неизвестные функции переменных x_1, y_1, t, k, θ. Подставляя (2.7)–(2.9) в граничные условия (2.4), (2.5), можно выразить коэффициент B_1 через известные функции и получить дифференциальное уравнение для A_1:

$$B_1 = F_1 A; \qquad (2.10)$$

$$A''_{1tt} + \beta A_1 = f_2(x_1, y_1, t, k, \theta); \qquad (2.11)$$

$$f_2(x_1,y_1,t,k,\theta) = \frac{1}{1+\varepsilon k \operatorname{th}(k)}\big[-(x_1+s)(\varepsilon k \operatorname{th}(k) F''_{1tt} + k\operatorname{th}(k)(1+\varkappa k^4)F_1) -$$
$$-(\operatorname{th}(k)+k)(1+\varkappa k^4)F_1 A - (\operatorname{th}(k) + \varepsilon(\operatorname{th}(k)+k))(F_1A)''_{tt} + 4\varkappa\sigma k^3 \operatorname{th}(k) F_1\big].$$

Решая уравнение (2.11) с использованием интегрального преобразования Лапласа и начальных условий (2.6), находим следующее выражение для функции A_1:

$$A_1 = \int\limits_0^t f_2(\tau)\,\frac{\sin(\sqrt{\beta}\,(t-\tau))}{\sqrt{\beta}}\,d\tau. \qquad (2.12)$$

Таким образом, получено выражение для составляющей $\Phi_1(\xi,\eta,\zeta,t)$ потенциала скоростей движения жидкости при переменной глубине водоема:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\sigma s}\big\{A_1 \operatorname{ch}(k(\zeta+1)) +$$
$$+ F_1\big[A(\zeta+1)\operatorname{sh}(k(\zeta+1)) + B\zeta^2 \operatorname{ch}(k(\zeta+1))\big]\big\} \times$$
$$\times \exp[ik((\xi-x_1)\cos\theta + (\eta-y_1)\sin\theta)]\,dx_1\,dy_1. \qquad (2.13)$$

С использованием кинематического (1.2) и динамического (1.1) граничных условий, а также выражения (1.6) получаем уравнение для нахождения прогиба пластины $w(\xi,\eta,t)$:

$$(1-\gamma(\xi+s))(\varkappa\nabla^4+1)w - 4\varkappa\gamma\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial\xi\,\partial\eta^2}\Big) + q + \frac{\partial\Phi}{\partial t} - u\,\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} +$$
$$+ \varepsilon(1+\gamma(\xi+s))\Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\,\partial t} - u\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta\,\partial\xi}\Big) + O(\gamma^2) = 0, \quad |\gamma| \ll 1,\ \zeta = 0. \qquad (2.14)$$

Будем искать функцию прогиба пластины $w(\xi,\eta,t)$ в виде

$$w = w_0 + \gamma w_1 + O(\gamma^2), \qquad |\gamma| \ll 1, \qquad (2.15)$$

где w_0 — прогиб пластины при постоянной глубине водоема $H = 1$ ($\gamma = 0$). В соответствии с [1] выражение для w_0 имеет вид

$$w_0 = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_1+I_2}{1+\varkappa k^4} \times$$
$$\times \exp(ik((\xi-x_1)\cos\theta + (\eta-y_1)\sin\theta))\,dx_1\,dy_1, \qquad (2.16)$$
$$I_1 = F'_{1t}(1+\varepsilon k \operatorname{th} k)\,\mathrm{e}^{\sigma s}\operatorname{ch} k, \qquad I_2 = q(x_1,y_1).$$

Для нахождения величины w_1 из (2.14) с учетом (2.15) получаем уравнение

$$(\varkappa\nabla^4+1)w_1 = 4\varkappa\Big(\frac{\partial^3 w_0}{\partial\xi^3}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial\xi\,\partial\eta^2}\Big)+(\xi+s)(\varkappa\nabla^4+1)w_0-\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+u\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}-$$

$$-\,\varepsilon\Big(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\zeta\,\partial t}-u\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\zeta\,\partial\xi}\Big)-\varepsilon(\xi+s)\Big(\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta\,\partial t}-u\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta\,\partial\xi}\Big),\qquad \zeta=0. \qquad (2.17)$$

Представляя прогиб пластины $w_1(\xi,\eta,t)$ в виде интеграла Фурье по переменным ξ и η, из уравнения (2.17) с учетом (2.2), (2.13), (2.16) находим выражение для w_1:

$$w_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{I_3+I_4+I_5}{1+\varkappa k^4}\,\times$$

$$\times\exp\left(ik((\xi-x_1)\cos\theta+(\eta-y_1)\sin\theta)\right)dx_1\,dy_1; \qquad (2.18)$$

$$I_3 = [(AF_1)'_t(\operatorname{th}k+\varepsilon(k+\operatorname{th}k))+A'_{1t}(1+\varepsilon k\operatorname{th}k)]\,\mathrm{e}^{\sigma s}\operatorname{ch}k,$$

$$I_4 = \varepsilon F'_{1t}(x_1+s)k\operatorname{th}k\,\mathrm{e}^{\sigma s}\operatorname{ch}k, \qquad I_5=(I_1+I_2)\Big(x_1+s-\frac{4\varkappa\sigma k^2}{1+\varkappa k^4}\Big).$$

С учетом (1.6), (2.15), (2.16), (2.18) прогиб пластины будем искать по приближенной формуле

$$w' \approx (w_0+\gamma w_1)H_0(1-\operatorname{th}(\gamma x)), \qquad |\gamma|\ll 1. \qquad (2.19)$$

3. Проведем анализ полученных результатов в предположении, что в заданной подвижной системе координат давление q (нагрузка) равномерно распределено по прямоугольной области и не зависит от времени, т. е. $q = q_0$ при $\xi\in[-L/2;L/2]$, $\eta\in[-L/(2\omega);L/(2\omega)]$, где L — безразмерная длина нагрузки; $\omega=L/B$ — удлинение нагрузки; B — безразмерная ширина нагрузки.

Если закон изменения скорости нагрузки в зависимости от времени имеет вид

$$u(t)=u_1\operatorname{th}(\mu t),$$

то расстояние, пройденное телом, вычисляется по формуле

$$s(t)=\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau=\frac{u_1}{\mu}\ln(\operatorname{ch}(\mu t)).$$

Проведем сравнение результатов расчетов по формуле (2.19) с известными теоретическими и экспериментальными данными [2, 3] о прогибе ледяной пластины в случае движения по ней нагрузки при постоянной глубине водоема. На рис. 2 показаны результаты экспериментов [2], результаты теоретических расчетов [3] и результаты расчетов по формуле (2.19) в случае равномерного движения нагрузки после начального ускорения при следующих значениях параметров: размерные длина и ширина нагрузки $L'=2{,}34$ м, $B'=0{,}79$ м соответственно; размерное давление, полученное для нагрузки массой 235 кг [3], $q_0'=1{,}2\cdot10^3$ Н/м^2; $H_0=6{,}8$ м, $\rho_2=1026$ кг/м^3, $h=0{,}17$ м, $\rho_1=870$ кг/м^3, $E=6{,}1\cdot10^8$ Н/м^2, $\nu=0{,}33$, $t'=40$ с, $\mu'=1$ с$^{-1}$, $\gamma=0$, $\eta=0$. Видно, что при постоянной глубине водоема результаты расчета прогиба упругой пластины хорошо согласуются с известными теоретическими [3] и экспериментальными [2] данными.

Для анализа влияния переменной глубины водоема на прогиб пластины численные расчеты по формуле (2.19) проводились при следующих значениях параметров пластины, нагрузки и жидкости: $\rho_2=1000$ кг/м^3, $\rho_1=900$ кг/м^3, $E=10^9$ Па, $q_0'=1\div4$ кПа, $\nu=1/3$, $h=0{,}1\div1{,}5$ м.

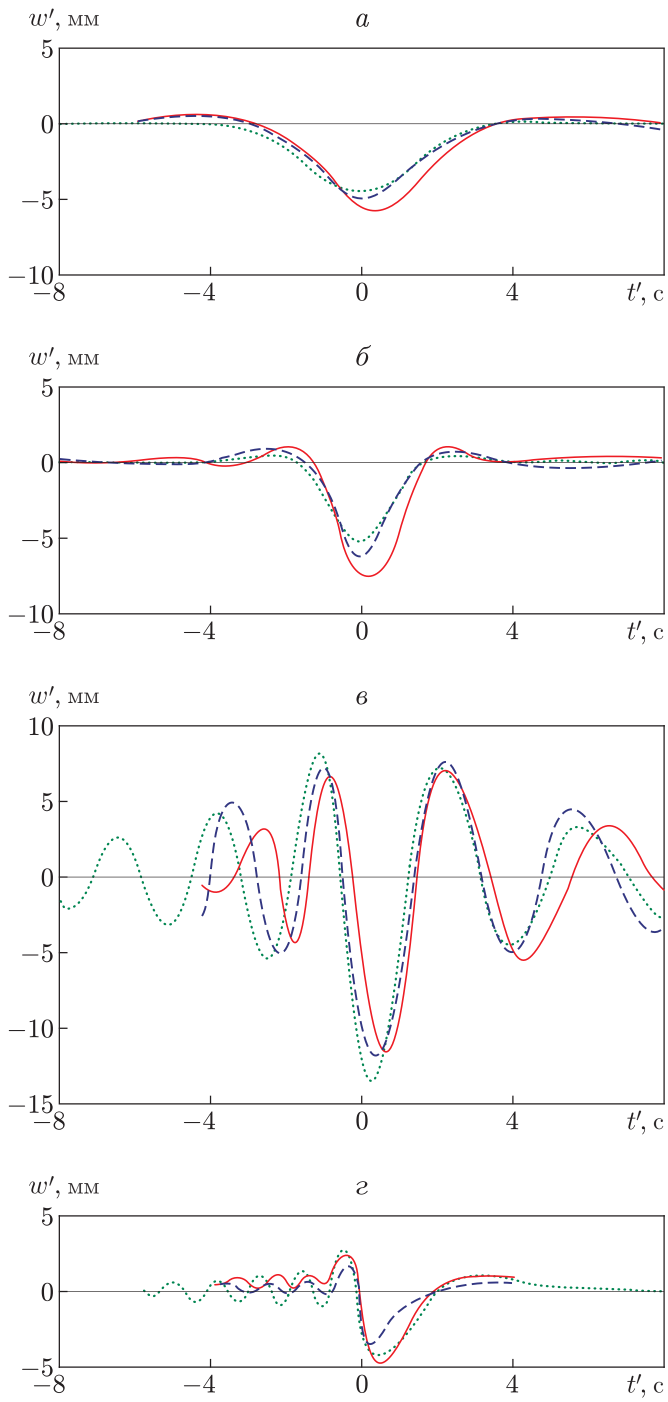

Рис. 2. Профили прогибов, полученные экспериментально в работе [2] (сплошные линии), теоретически в работе [3] (штриховые линии) и по формуле (2.19) (пунктирные линии):
а — $U = 2{,}2$ м/с, *б* — $U = 4{,}2$ м/с, *в* — $U = 6{,}2$ м/с, *г* — $U = 8{,}9$ м/с

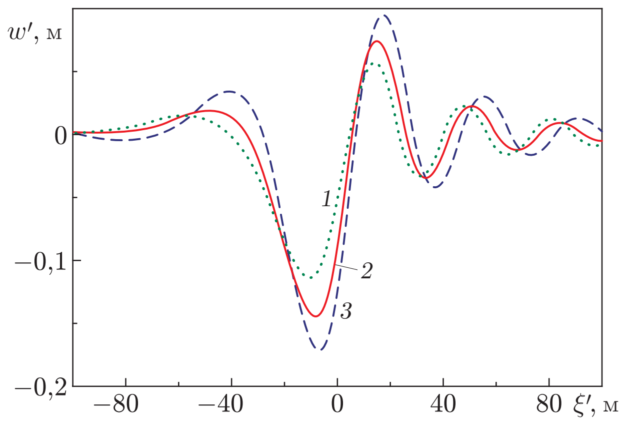

Рис. 3

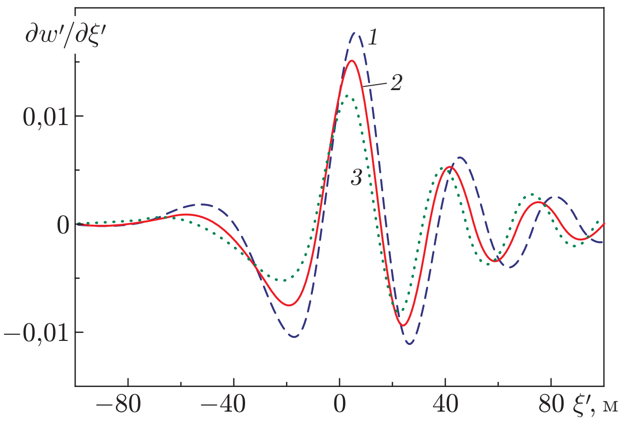

Рис. 4

Рис. 3. Прогиб ледяной пластины w' при различных значениях γ:
1 — $\gamma = 0{,}005$; *2* — $\gamma = 0$; *3* — $\gamma = -0{,}005$

Рис. 4. Производная прогиба ледяной пластины $\partial w'/\xi'$ при различных значениях γ:
1 — $\gamma = -0{,}005$; *2* — $\gamma = 0$; *3* — $\gamma = 0{,}005$

На рис. 3 для $\eta = 0$ представлены результаты расчетов прогибов w пластины толщиной $h = 0{,}5$ м под действием нагрузки с параметрами $L' = 20$ м, $\omega = 2$, $q_0' = 2 \cdot 10^3$ Па в случае ее равномерного движения после начального ускорения ($t' = 40$ с, $u_1' = 10$ м/с, $\mu' = 1$ с$^{-1}$) при начальной глубине водоема $H_0 = 7$ м и различных значениях γ. Видно, что при заданных параметрах водоема, пластины и нагрузки движение "к берегу" или "от берега" приводит соответственно к уменьшению или увеличению значений амплитуды прогиба w пластины по сравнению с аналогичными значениями, полученными при постоянной глубине водоема.

Исследуем влияние переменной глубины водоема на величину $\partial w/\partial x$ при $\eta = 0$. В работе [4] экспериментально установлено, что значение $\alpha = \max\limits_{x\in(-\infty;+\infty)} |\partial w/\partial x| \geqslant 0{,}04$ соответствует раскрытию магистральных трещин в ледяном покрове и полному разрушению ледяного покрова. На рис. 4 при тех же значениях параметров, что и на рис. 3, приведены кривые $(\partial w'/\partial\xi')\big|_{\eta=0}$. Из рис. 4 следует, что изменение глубины водоема может привести к увеличению или уменьшению угла наклона плавающей пластины по сравнению с аналогичными значениями для ровного дна.

На рис. 5 представлена зависимость коэффициента α от времени при $L' = 20$ м, $\omega = 2$, $q_0' = 2 \cdot 10^3$ Н/м^2, $h = 0{,}5$ м, $\mu' = 1$ с$^{-1}$, $\eta = 0$ и различных значениях начальной глубины водоема H_0, величины γ и скорости равномерного движения нагрузки u_1'. Заметим, что при указанных выше значениях параметров пластины, нагрузки и жидкости минимальная фазовая скорость распространения изгибно-гравитационных волн в пластине для водоема бесконечной глубины $u_{\min} = 2(Dg^3/(27\rho_2))^{1/8} \approx 10$ м/с. Результаты анализа кривых *1, 4, 5* на рис. 5 показывают, что движение "от берега" или "к берегу" при одной и той же начальной глубине H_0 приводит соответственно к увеличению или уменьшению коэффициента α. Представляет интерес определение условий, при которых достигается максимальное значение коэффициента α (при движении "от берега", "к берегу" или при постоянной глубине). Анализ кривых *2–4* на рис. 5 показывает, что при движении со скоростью $u_{\min} \approx 10$ м/с с глубины 5 м на глубину 7 м значения коэффициента α больше, чем в случае движения с глубины 9 м на глубину 7 м и в случае движения при постоянной глубине водоема 7 м.

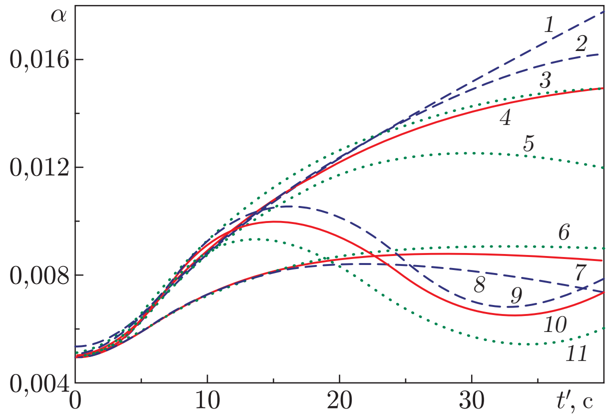

Рис. 5. Зависимость коэффициента α от времени в случае равномерного движения нагрузки после ускорения:
1 — $H_0 = 7$ м, $\gamma = -0{,}005$, $u'_1 = 10$ м/с; *2* — $H_0 = 5$ м, $\gamma = -0{,}005$, $u'_1 = 10$ м/с; *3* — $H_0 = 9$ м, $\gamma = 0{,}005$, $u'_1 = 10$ м/с; *4* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0$, $u'_1 = 10$ м/с; *5* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0{,}005$, $u'_1 = 10$ м/с; *6* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0{,}005$, $u'_1 = 6$ м/с; *7* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0$, $u'_1 = 6$ м/с; *8* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = -0{,}005$, $u'_1 = 6$ м/с; *9* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = -0{,}005$, $u'_1 = 14$ м/с; *10* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0$, $u'_1 = 14$ м/с; *11* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0{,}005$, $u'_1 = 14$ м/с

Кривые *6–8* на рис. 5 характеризуют влияние глубины водоема на коэффициент α при докритических скоростях движения, кривые *9–11* — влияние глубины водоема при сверхкритических скоростях (критической скоростью будем называть скорость, при которой достигается наибольшее значение коэффициента α). Анализ кривых *6–11* на рис. 5 позволяет сделать вывод, что при движении с докритическими скоростями "к берегу" или со сверхкритическими скоростями "от берега" значение коэффициента α больше его значения в случае постоянной глубины водоема.

На рис. 6, 7 для пластины толщиной $h = 0{,}1$; $0{,}5$ м соответственно представлены зависимости коэффициента α вдоль оси движения нагрузки ($\eta = 0$) от скорости равномерного движения нагрузки u'_1 при $t' = 40$ с, $\mu' = 1$ с$^{-1}$ и различных значениях γ и H_0. Заметим, что при указанных выше значениях параметров пластины, нагрузки и жидкости для пластин толщиной $h = 0{,}1$, $0{,}5$ м минимальная фазовая скорость распространения изгибно-гравитационных волн в пластине при бесконечной глубине водоема равна $u_{\min} \approx 5{,}5$; $10{,}0$ м/с соответственно. Теоретические значения минимальной фазовой скорости при значениях параметров, соответствующих рис. 6, 7, равны: $u_{\min} = 4{,}94$ м/с при $h = 0{,}1$ м, $H_0 = 3$ м; $u_{\min} = 5{,}38$ м/с при $h = 0{,}1$ м, $H_0 = 7$ м; $u_{\min} = 8{,}0$ м/с при $h = 0{,}5$ м, $H_0 = 7$ м; $u_{\min} = 9{,}51$ м/с при $h = 0{,}5$ м, $H_0 = 14$ м. На рис. 6, 7 видно, что в случае мелкой воды ($\sqrt{gH_0} \leqslant u_{\min}$) влияние переменной глубины водоема на коэффициент α является существенным. Наиболее значительное влияние переменная глубина водоема оказывает на коэффициент α при движении с околокритическими скоростями в случае мелкой воды. При этом коэффициент α существенно увеличивается при движении "от берега" и уменьшается при движении "к берегу". При докритических скоростях движение "к берегу" приводит к увеличению коэффициента α, а движение "от берега" — к его уменьшению по сравнению со случаем движения при постоянной глубине водоема. При большой глубине ($\sqrt{gH_0} > u_{\min}$) влияние величины γ на коэффициент α незначительно. Из рис. 6, 7 следует, что при $h = 0{,}5$ м глубина $H_0 = 7$ м является малой; а при $h = 0{,}1$ м — большой.

Кроме того, при движении "от берега" значение критической скорости увеличивается, а при движении "к берегу" уменьшается.

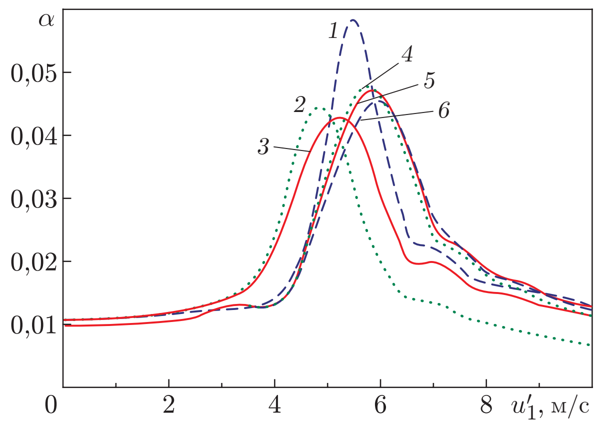

Рис. 6

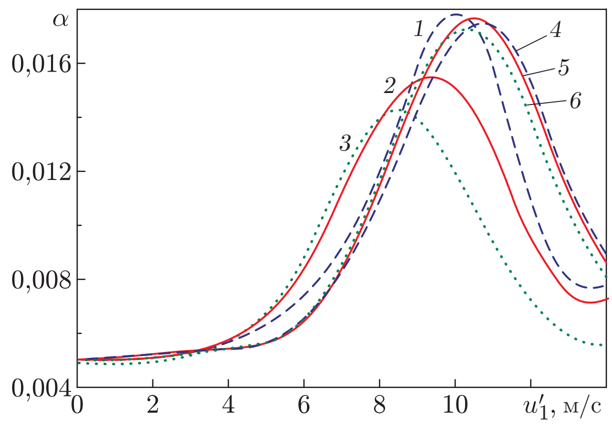

Рис. 7

Рис. 6. Зависимость коэффициента α от скорости движения u'_1 в случае равномерного движения нагрузки после ускорения при $L' = 10$ м, $\omega = 2$, $q'_0 = 10^3$ Н/м^2, $h = 0{,}1$ м, $\mu = 1$ с$^{-1}$, $t = 40$ с:
1 — $H_0 = 3$ м, $\gamma = -0{,}005$; *2* — $H_0 = 3$ м, $\gamma = 0{,}005$; *3* — $H_0 = 3$ м, $\gamma = 0$; *4* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0{,}005$; *5* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0$; *6* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = -0{,}005$

Рис. 7. Зависимость коэффициента α от скорости движения u'_1 в случае равномерного движения нагрузки после ускорения при $L' = 20$ м, $\omega = 2$, $q'_0 = 2 \cdot 10^3$ Н/м^2, $h = 0{,}5$ м, $\mu = 1$ с$^{-1}$, $t = 40$ с:
1 — $H_0 = 7$ м, $\gamma = -0{,}005$; *2* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0$; *3* — $H_0 = 7$ м, $\gamma = 0{,}005$; *4* — $H_0 = 14$ м, $\gamma = -0{,}005$; *5* — $H_0 = 14$ м, $\gamma = 0$; *6* — $H_0 = 14$ м, $\gamma = 0{,}005$

С использованием результатов расчетов по формуле (2.19) проанализируем возможность разрушения ледяного покрова с помощью катера на воздушной подушке (КВП) при переменной глубине водоема. Рассмотрим движение двух десантных катеров: российского КВП "Мурена" с параметрами $L' = 30{,}2$ м, $\omega = 2{,}3$, $q'_0 = 4 \cdot 10^3$ Па (давление соответствует максимальному водоизмещению 166 т) и американского катера LCAC с параметрами $L' = 26{,}4$ м, $\omega = 1{,}85$, $q'_0 = 4{,}8 \cdot 10^3$ Па (давление соответствует максимальному водоизмещению 185 т).

На рис. 8, 9 при $H_0 = 5$ м представлены зависимости коэффициента α от скорости равномерного движения u'_1 для катеров "Мурена" и LCAC соответственно при $\mu' = 1$ с$^{-1}$, $\eta = 0$, $t' = 40$ с и различных значениях коэффициента γ и толщины пластины h. Заметим, что в случае ледяной пластины с указанными выше параметрами при $h = 0{,}5$; $0{,}7$; $1{,}0$; $1{,}5$ м минимальная фазовая скорость принимает значения $u_{\min} = 10{,}0$; $11{,}4$; $13{,}0$; $15{,}2$ м/с соответственно. Видно, что для ледяного покрова толщиной $0{,}5 \div 0{,}7$ м при движении КВП "Мурена" и LCAC с околокритическими скоростями $\alpha \approx 0{,}04$, следовательно, разрушение ледяного покрова возможно. При этом в случае движения катера в направлении "от берега" с околокритическими скоростями значение коэффициента α увеличивается и, следовательно, возможность разрушения ледяного покрова толщиной $0{,}5 \div 0{,}7$ м возрастает. Данный результат согласуется с экспериментальными данными работы [7], в которой описано разрушение ледяного покрова толщиной $0{,}4 \div 0{,}7$ м с помощью КВП "Мурена". Увеличение интенсивности нагрузки q'_0 и уменьшение толщины ледяного покрова также приводят к увеличению коэффициента α. Для $h \geqslant 1$ м значение коэффициента α является малым при любых значениях γ, следовательно, разрушение ледяного покрова толщиной $h \geqslant 1$ м с помощью рассматриваемых катеров невозможно. В работе [7] также указано, что

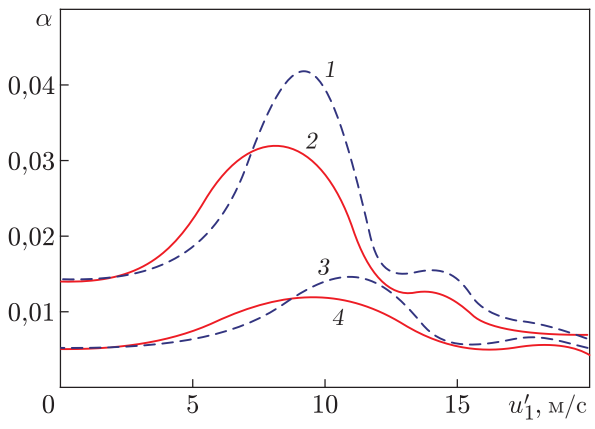

Рис. 8

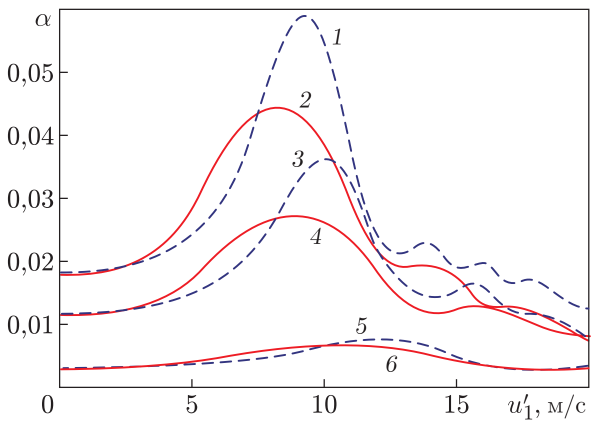

Рис. 9

Рис. 8. Зависимость коэффициента α от скорости в случае равномерного движения катера на воздушной подушке "Мурена":
1, 2 — $h = 0{,}5$ м; *3, 4* — $h = 1$ м; сплошные кривые — $\gamma = 0$, штриховые — $\gamma = -0{,}005$

Рис. 9. Зависимость коэффициента α от скорости в случае равномерного движения катера на воздушной подушке LCAC:
1, 2 — $h = 0{,}5$ м; *3, 4* — $h = 0{,}7$ м; *5, 6* — $h = 1{,}5$ м; сплошные кривые — $\gamma = 0$, штриховые — $\gamma = -0{,}005$

в случае ледяного покрова толщиной 1 м после совершения КВП "Мурена" пяти проходов по льду, ослабленному пятью майнами диаметром $3 \div 5$ м, расстояние между которыми составляет 10 м, разрушались только перемычки между майнами и кромки льда вблизи майны, а полного разрушения льда не происходило.

4. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. При малом угле наклона донной поверхности получены интегрально-асимптотические формулы для расчета прогиба плавающей упругой пластины при нестационарном движении по ней нагрузки. Проанализировано влияние переменной глубины водоема на амплитуду прогиба и максимальное значение угла наклона плавающей пластины. Показано, что в зависимости от толщины пластины и скорости нагрузки изменение глубины водоема может приводить либо к увеличению амплитуды прогиба пластины, либо к ее уменьшению по сравнению с соответствующим значением при постоянной глубине водоема. В частности, в случае большой глубины водоема H_0 ($\sqrt{gH_0} > u_{\min}$) малый угол наклона донной поверхности не оказывает существенного влияния на прогиб плавающей упругой пластины. Наиболее значительное увеличение амплитуды прогиба и максимального угла наклона плавающей пластины наблюдается в случае малой глубины водоема H_0 ($\sqrt{gH_0} \leqslant u_{\min}$) при движении по пластине с критическими скоростями в направлении увеличения глубины водоема.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kozin V. M., Pogorelova A. V.** Nonstationary motion of an amphibian air-cushion vehicle on ice fields // Proc. of the 7th (2006) ISOPE Pacific/Asia offshore mechanics symp., Dalian (China), Sept. 17–21, 2006. Cupertino: ISOPE, 2006. P. 81–86.
2. **Takizava T.** Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // Cold Regions Sci. Technol. 1985. V. 11. P. 171–180.

3. **Bukatov A. E., Zharkov V. V.** Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt 1. Surface waves // Intern. J. Offshore Polar Engng. ISOPE. 1997. V. 7, N 1. P. 1–12.
4. **Козин В. М.** Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов / В. М. Козин, А. В. Онищук, Б. Н. Марьин и др. Владивосток: Дальнаука, 2005.
5. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
6. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
7. **Козин В. М.** Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Акад. естествознания, 2007.

Поступила в редакцию 11/I 2013 г.,
в окончательном варианте — 23/VIII 2013 г.