$\mathcal{AMS}$ subject classification: 49M25, 65M06

Устойчивость в дискретной максимум-норме линеаризованной конечно-разностной схемы второго порядка для уравнения Аллена–Кана*

Т. Хоу, К. Ван, Я. Сюн, С. Сяо, Ш. Чзан

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin, 132013, China

E-mails: 270854140@qq.com (Хоу Т.), 1020361452@qq.com (Ван К.), 584161767@qq.com (Сюн Я.), 1239236881@qq.com (Сяо С.), 2981959761@qq.com (Чзан Ш.)

Хоу Т., Ван К., Сюн Я., Сяо С., Чзан Ш. Устойчивость в дискретной максимум-норме линеаризованной конечно-разностной схемы второго порядка для уравнения Аллена–Кана // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 2. — С. 215–222.

В данной статье конечно-разностные методы используются для решения уравнения Аллена–Кана с малыми параметрами возмущения и сильной нелинейностью. Рассматривается линеаризованная трехуровневая схема второго порядка по времени и конечно-разностная схема второго порядка по пространству. Устанавливается устойчивость дискретной ограниченности в максимум-норме: если первоначальные данные ограничены 1, то численные решения в более поздние моменты времени также могут быть равномерно ограничены 1. Будет показано, что основной результат может быть получен при наложении определенных ограничений на временно́й шаг.

DOI: 10.15372/SJNM20170208

Ключевые слова: уравнение Аллена–Кана, конечно-разностный метод, устойчивость дискретной ограниченности, максимум-норма.

Hou T., Wang K., Xiong Y., Xiao X., Zhang Sh. Discrete maximum-norm stability of a linearized second order finite difference scheme for Allen-Cahn equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 2. — P. 215–222.

In this paper, we use finite difference methods for solving the Allen–Cahn equation which contains small perturbation parameters and strong nonlinearity. We consider a linearized second-order three level scheme in time and a second-order finite difference approach in space, and we establish discrete boundedness stability in maximum norm: if the initial data is bounded by 1, then the numerical solutions in later times can also be bounded uniformly by 1. We will show that the main result can be obtained under certain

Keywords: Allen–Cahn equation, finite difference method, discrete boundedness stability, maximum norm.

1. Введение

В данной статье исследуются численные аппроксимации следующего уравнения Аллена–Кана:

*Работа поддержана Национальным естественно-научным фондом Китая (проекты № 11526036, № 11601014), Программой научных и технологических разработок Провинции Цзилинь (проект № 20160520108JH) и Научно-исследовательским проектом в области науки и техники Департамента образования Провинции Цзилинь (проект № 201646).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\epsilon^2 \Delta u - f(u), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T], \tag{1.1}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}, \tag{1.2}$$

$$u \,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.3}$$

где Ω — ограниченная регулярная область в R^d $(d = 1, 2, 3)$, Δ — оператор Лапласа, u — концентрация одного из двух металлических компонент сплава, а параметр $\epsilon > 0$ представляет ширину поверхности раздела. Без потери общности рассмотрим обычно используемый двухъямный потенциал, который дает

$$f(u) = u^3 - u.$$

Хорошо известно, что уравнение Аллена–Кана обладает следующими двумя свойствами:

1) принцип максимума:

$$|u(\boldsymbol{x}, t)| \le |u_0(\boldsymbol{x})|, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T]; \tag{1.4}$$

2) энергетическая устойчивость: определим функцию энергии в пространстве L^2:

$$E(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 |\nabla u|^2 + F(u) \right) d\boldsymbol{x},$$

где $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$. Видно, что функция энергии уменьшается со временем [5]:

$$\frac{d}{dt} E(u) \le 0 \ \ \forall \ t > 0. \tag{1.5}$$

Уравнение Аллена–Кана было впервые введено С.М. Алленом и Ж.В. Каном в [1] для описания движения границ раздела фаз в кристаллических твердых телах. Грубо говоря, оно описывает области с $u \approx 1$ и $u \approx -1$, которые растут и затухают за счет друг друга. Поскольку определяющие уравнения являются нелинейными, решению уравнения Аллена–Кана посвящено множество работ (см., например, [2–10]). Основными чертами численных решений являются высокая устойчивость и точность, которые налагают требование малости на временно́й шаг и размер пространственной сетки. Однако это требование сильно ограничивает размер системы и время моделирования. Поскольку для надежного вычисления фазового поля необходимо большое время моделирования, очень важно понимание свойств устойчивости основных численных схем. Большинство исследователей обращают внимание на дискретную устойчивость в L_2-норме.

В данной работе мы используем линеаризованную трехуровневую схему второго порядка по времени и трехуровневую конечно-разностную схему второго порядка по пространству для решения задачи (1.1)–(1.3). Мы докажем устойчивость дискретной ограниченности в максимум-норме: если первоначальные данные ограничены 1, то численные решения в более поздние моменты времени также могут быть равномерно ограничены 1. Будет показано, что основной результат может быть получен при наложении определенных ограничений на временно́й шаг.

Остальная часть статьи построена следующим образом. В пункте 2 приводится полностью дискретная схема для аппроксимации уравнения (1.1). Устойчивость дискретной ограниченности в максимум-норме установлена в п. 3. В п. 4 даны заключительные замечания.

2. Полностью дискретная схема

В остальной части статьи рассматривается только область регулярного решения в R^d $(d = 1, 2, 3)$. Без потери общности рассмотрим единичный квадрат в 2D и куб в 3D. Возьмем центральные конечные разности для аппроксимации пространственных производных. Обозначим через D_h дискретную матрицу для оператора Лапласа. Можно легко получить следующую дискретную матрицу оператора Лапласа в 1D:

$$D_h^{(1)} =: \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N\times N}, \tag{2.1}$$

где h — размер шага 1D однородной сетки, а N — число внутренних точек.

Используя обозначение тензорного произведения Кронекера, мы можем получить соответствующую дискретную матрицу в 2D:

$$D_h^{(2)} = I \otimes D_h^{(1)} + D_h^{(1)} \otimes I, \tag{2.2}$$

где I — $(N \times N)$-единичная матрица. Аналогичным образом дискретная матрица в 3D может быть представлена в виде

$$D_h^{(3)} = I \otimes I \otimes D_h^{(1)} + I \otimes D_h^{(1)} \otimes I + D_h^{(1)} \otimes I \otimes I. \tag{2.3}$$

Легко доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $D_h^{(d)}$, $d = 1, 2, 3$, *— дискретная матрица, определенная в* (2.1)–(2.3). *Тогда* $D_h = D_h^{(d)}$ *удовлетворяет следующим свойствам*:

- D_h *симметрична*;
- D_h *отрицательно определена, т. е.* $U^\top D_h U < 0$ *для любого* $U \in \mathbf{R}^N$;
- *элементы* $D_h = (b_{ij})$ *удовлетворяют соотношениям*:

$$b_{ii} = -b < 0 \quad \text{и} \quad b \ge \max_i \sum_{j\ne i} |b_{ij}|. \tag{2.4}$$

В конце данного пункта опишем нашу численную схему для решения задачи (1.1)–(1.3). Сначала используем линеаризованную схему второго порядка [5]:

$$\begin{aligned}\frac{U^{n+1} + a_1U^n - (1+a_1)U^{n-1}}{\tau} + \left(2 + \frac{a_1}{2}\right)\left((U^n)^{.3} - U^n\right) + \frac{a_1}{2}\left((U^{n-1})^{.3} - U^{n-1}\right) \\ = \epsilon^2\left(\left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right)D_hU^{n+1} + \left(2 - 2a_2 + \frac{3a_1}{2}\right)D_hU^n + a_2D_hU^{n-1}\right),\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $n \ge 1$, a_1 и a_2 — два свободных параметра, τ — размер временно́го шага, U^n — вектор численного решения и

$$(U^n)^{.3} = ((U_1^n)^3, (U_2^n)^3, \ldots, (U_N^n)^3)^\top.$$

Для первого шага используем следующую нелинейную схему второго порядка со стабилизирующим членом:

$$\frac{U^1-U^0}{\tau}+\frac{(U^1)^{\cdot 2}U^0+(U^0)^{\cdot 2}U^1}{2}-\frac{U^1+U^0}{2}+\frac{1}{6}(U^1-U^0)^{\cdot 3}=\frac{\epsilon^2 D_h(U^1+U^0)}{2}, \qquad (2.6)$$

где

$$(U^0)^{\cdot 2}U^1=\left((U_1^0)^2U_1^1,(U_2^0)^2U_2^1,\dots,(U_N^0)^2U_N^1\right)^\top,$$

$$(U^1)^{\cdot 2}U^0=\left((U_1^1)^2U_1^0,(U_2^1)^2U_2^0,\dots,(U_N^1)^2U_N^0\right)^\top,$$

$$(U^1-U^0)^{\cdot 3}=\left((U_1^1-U_1^0)^3,(U_2^1-U_2^0)^3,\dots,(U_N^1-U_N^0)^3\right)^\top.$$

3. Устойчивость дискретной ограниченности

В данном пункте будут получены наши основные результаты. Пусть $\|U^n\|_\infty = \max\{|U_1^n|,|U_2^n|,\dots,|U_N^n|\}$, $n=0,1,\dots$.

Теорема 3.1. *Пусть d — размерность пространства. Предположим, что начальное значение удовлетворяет $\max_{\boldsymbol{x}\in\bar\Omega}|u_0(\boldsymbol{x})|\le 1$. Пусть U^1 — решение схемы (2.6). Тогда мы имеем $\|U^1\|_\infty\le 1$ при условии, что размер временнóго шага удовлетворяет*

$$0<\tau\le\min\left\{\frac{h^2}{2d\epsilon^2},\frac{1}{4}\right\}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Из предположения об u_0 следует, что $\|U^0\|_\infty\le 1$. Заметим, что (2.6) можно переписать следующим образом:

$$U^1-\frac{\tau}{2}U^1+\tau(U^0)^{\cdot 2}U^1+\frac{\tau}{6}(U^1)^{\cdot 3}-\frac{\tau\epsilon^2}{2}D_hU^1=\frac{\tau\epsilon^2}{2}D_hU^0+U^0+\frac{\tau}{2}U^0+\frac{\tau}{6}(U^0)^{\cdot 3}. \qquad (3.2)$$

Предположим, что $\|U^1\|_\infty=|U_p^1|$. Тогда $|U_p^1|\ge|U_j^1|$ для всех $1\le j\le N$, а p-я компонента (3.2) есть

$$\left(1-\frac{\tau}{2}+\tau(U_p^0)^2\right)U_p^1+\frac{\tau}{6}\big(U_p^1\big)^3-\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}\big(U_{p+1}^1+U_{p-1}^1-2U_p^1\big)$$
$$=\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}\big(U_{p+1}^0+U_{p-1}^0-2U_p^0\big)+U_p^0+\frac{\tau}{2}U_p^0+\frac{\tau}{6}\big(U_p^0\big)^3. \qquad (3.3)$$

Для $\tau<2$ из леммы 2 следует, что величины

$$\left(1-\frac{\tau}{2}+\tau\big(U_p^0\big)^2\right)U_p^1,\qquad \frac{\tau}{6}\big(U_p^1\big)^3,\qquad -\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}\big(U_{p+1}^1+U_{p-1}^1-2U_p^1\big)$$

суть положительные или отрицательные одновременно. Взяв абсолютное значение (3.3), получим

$$\left(1-\frac{\tau}{2}+\tau(U_p^0)^2\right)\big|U_p^1\big|+\frac{\tau}{6}\big|U_p^1\big|^3$$
$$\le\left|\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}\big(U_{p+1}^0+U_{p-1}^0-2U_p^0\big)+\frac{1}{2}U_p^0\right|+\frac{1}{2}\big|U_p^0\big|+\left|\frac{\tau}{2}U_p^0+\frac{\tau}{6}\big(U_p^0\big)^3\right|. \qquad (3.4)$$

Используя $U_{p-1}^0\le\|U^0\|_\infty\le 1$, $U_p^0\le\|U^0\|_\infty\le 1$, $U_{p+1}^0\le\|U^0\|_\infty\le 1$ и $\frac{1}{2}\ge\frac{\tau d\epsilon^2}{h^2}$, находим, что

$$\left|\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}\big(U_{p+1}^0+U_{p-1}^0-2U_p^0\big)+\frac{1}{2}U_p^0\right| \le \left(\frac{1}{2}-\frac{\tau d\epsilon^2}{h^2}\right)\left|U_p^0\right|+\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}\left|U_{p+1}^0\right|+\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}\left|U_{p-1}^0\right|$$

$$\le \left(\frac{1}{2}-\frac{\tau d\epsilon^2}{h^2}\right)+\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}+\frac{\tau d\epsilon^2}{2h^2}=\frac{1}{2} \tag{3.5}$$

и

$$\left|\frac{\tau}{2}U_p^0+\frac{\tau}{6}\big(U_p^0\big)^3\right| \le \frac{\tau}{2}\left|U_p^0\right|+\frac{\tau}{6}\left|U_p^0\right|^3 \le \frac{\tau}{2}+\frac{\tau}{6}=\frac{2\tau}{3}. \tag{3.6}$$

Исходя из (3.5) и (3.6), (3.4) принимает вид

$$\left(1-\frac{\tau}{2}+\tau\big(U_p^0\big)^2\right)\|U^1\|_\infty+\frac{\tau}{6}\|U^1\|_\infty^3 \le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|U_p^0\right|+\frac{2\tau}{3}. \tag{3.7}$$

Предположим, что $\|U^1\|_\infty > 1$. Тогда имеем

$$1-\frac{\tau}{3}+\tau\left|U_p^0\right|^2 < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|U_p^0\right|+\frac{2\tau}{3}, \tag{3.8}$$

то есть

$$-\tau\left|U_p^0\right|^2+\frac{1}{2}\left|U_p^0\right|+\tau-\frac{1}{2} > 0, \tag{3.9}$$

что противоречит $|U_p^0| \le 1$ при условии, что $\tau \le \frac{1}{4}$. Таким образом, мы имеем $\|U^1\|_\infty \le 1$. Наши рассуждения окончены. □

Теорема 3.2. *Пусть d — размерность пространства. Предположим, что начальное значение удовлетворяет $\max_{\boldsymbol{x}\in\bar\Omega}|u_0(\boldsymbol{x})| \le 1$. Пусть U^n — решение схемы (2.5). Тогда мы имеем $\|U^n\|_\infty \le 1$ для всех $n \ge 2$ при условии, что размер временно́го шага удовлетворяет*

$$0<\tau\le\min\left\{\frac{1}{4},\frac{h^2}{2d\epsilon^2},\frac{(1+a_1)h^2}{4a_2d\epsilon^2},-\frac{a_1h^2}{(8-8a_2+6a_1)d\epsilon^2},-\frac{a_1}{2(4+a_1)},-\frac{4(1+a_1)}{a_1}\right\}, \tag{3.10}$$

где $-1<a_1<0$, $4-4a_2+3a_1>0$, $a_2>0$, или

$$0<\tau\le\min\left\{\frac{1}{4},\frac{h^2}{2d\epsilon^2},\frac{(1+a_1)h^2}{4a_2d\epsilon^2},-\frac{a_1}{4+a_1},-\frac{4(1+a_1)}{a_1}\right\}, \tag{3.11}$$

где $-1<a_1<0$, $4-4a_2+3a_1=0$, $a_2>0$, или

$$0<\tau\le\min\left\{\frac{1}{4},\frac{h^2}{2d\epsilon^2},-\frac{a_1h^2}{(8+6a_1)d\epsilon^2},-\frac{a_1}{2(4+a_1)},-\frac{8(1+a_1)}{a_1}\right\}, \tag{3.12}$$

где $-1<a_1<0$, $4-4a_2+3a_1>0$, $a_2=0$.

Доказательство. Сначала, как в теореме 3.1, если размер временно́го шага τ удовлетворяет $0<\tau\le\min\left\{\frac{1}{4},\frac{h^2}{2d\epsilon^2}\right\}$, мы имеем $\|U^1\|_\infty\le 1$. Докажем теорему по индукции. Предположим, что этот результат верен для $n=m-1$ и $n=m$, т.е. $\|U^{m-1}\|_\infty\le 1$ и $\|U^m\|_\infty\le 1$. Ниже проверим, верен ли этот верхний предел также для $n=m+1$. Рассмотрим следующие три случая.

Случай 1. Если $4-4a_2+3a_1>0$ и $a_2>0$, из (2.5) следует, что

$$\left(I-\tau\epsilon^2\left(a_2-\frac{a_1}{2}\right)D_h\right)U^{m+1} = -\frac{a_1}{2}U^m+\tau\epsilon^2\left(2-2a_2+\frac{3}{2}a_1\right)D_hU^m-\frac{a_1}{2}U^m+ \tau\left(2+\frac{a_1}{2}\right)\left(U^m-(U^m)^{.3}\right)+\frac{1+a_1}{2}U^{m-1}+\tau a_2\epsilon^2D_hU^{m-1}+ \frac{1+a_1}{2}U^{m-1}+\frac{\tau a_1}{2}\left(U^{m-1}-(U^{m-1})^{.3}\right). \quad (3.13)$$

Во-первых, поскольку $2a_2-a_1\geq 0$, как в теореме 3.1, легко убедиться в том, что

$$\left\|\left(I-\tau\epsilon^2\left(a_2-\frac{a_1}{2}\right)D_h\right)U^{m+1}\right\|_\infty \geq \|U^{m+1}\|_\infty. \quad (3.14)$$

Во-вторых, используя такой же метод, как и в (3.5), если размер временно́го шага τ удовлетворяет

$$\tau\leq\frac{(1+a_1)h^2}{4a_2d\epsilon^2}$$

и

$$\tau\leq-\frac{a_1h^2}{(8-8a_2+6a_1)d\epsilon^2},$$

имеем

$$\left\|\frac{1+a_1}{2}U^{m-1}+\tau a_2\epsilon^2D_hU^{m-1}\right\|_\infty\leq\frac{1+a_1}{2} \quad (3.15)$$

и

$$\left\|-\frac{a_1}{2}U^m+\tau\epsilon^2\left(2-2a_2+\frac{3}{2}a_1\right)D_hU^m\right\|_\infty\leq-\frac{a_1}{2} \quad (3.16)$$

соответственно.

Каждый элемент выражения $-\frac{a_1}{2}U^m+\tau\left(2+\frac{a_1}{2}\right)\left(U^m-(U^m)^{.3}\right)$ имеет вид

$$g(x)=-\frac{a_1}{2}x+\tau\left(2+\frac{a_1}{2}\right)(x-x^3),\quad |x|\leq 1. \quad (3.17)$$

Простое вычисление показывает, что $|g(x)|\leq-\frac{a_1}{2}$ для $x\in[-1,1]$, если $\tau\leq-\frac{a_1}{2(4+a_1)}$. В результате можно сделать вывод, что

$$\left\|-\frac{a_1}{2}U^m+\tau\left(2+\frac{a_1}{2}\right)\left(U^m-(U^m)^{.3}\right)\right\|_\infty\leq-\frac{a_1}{2},\quad \tau\leq-\frac{a_1}{2(4+a_1)}. \quad (3.18)$$

Аналогичным образом получим

$$\left\|\frac{1+a_1}{2}U^{m-1}+\frac{\tau a_1}{2}\left(U^{m-1}-(U^{m-1})^{.3}\right)\right\|_\infty\leq\frac{1+a_1}{2},\quad \tau\leq-\frac{4(1+a_1)}{a_1}. \quad (3.19)$$

Используя (3.13)–(3.19), имеем $\|U^{m+1}\|_\infty\leq 1$.

Случай 2. Если $4 - 4a_2 + 3a_1 = 0$ и $a_2 > 0$, то (2.5) принимает следующий вид:

$$\left(I - \tau\epsilon^2\left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right)D_h\right)U^{m+1} = -a_1U^m + \tau\left(2+\frac{a_1}{2}\right)(U^m-(U^m)^{.3}) + \frac{1+a_1}{2}U^{m-1} + \tau a_2\epsilon^2 D_hU^{m-1} + \frac{1+a_1}{2}U^{m-1} + \frac{\tau a_1}{2}(U^{m-1}-(U^{m-1})^{.3}). \quad (3.20)$$

Аналогично (3.18) получим

$$\left\|-a_1U^m + \tau\left(2+\frac{a_1}{2}\right)\left(U^m - (U^m)^{.3}\right)\right\|_\infty \leq -a_1, \quad \tau \leq -\frac{a_1}{4+a_1}. \quad (3.21)$$

Используя (3.14), (3.15) и (3.19)–(3.21), имеем $\|U^{m+1}\|_\infty \leq 1$.

Случай 3. Если $4 - 4a_2 + 3a_1 > 0$ и $a_2 = 0$, то (2.5) принимает следующий вид:

$$\left(I + \frac{\tau\epsilon^2 a_1}{2}D_h\right)U^{m+1} = -\frac{a_1}{2}U^m + \tau\epsilon^2\left(2+\frac{3}{2}a_1\right)D_hU^m - \frac{a_1}{2}U^m + \tau\left(2+\frac{a_1}{2}\right)\left(U^m - (U^m)^{.3}\right) + (1+a_1)U^{m-1} + \frac{\tau a_1}{2}\left(U^{m-1} - (U^{m-1})^{.3}\right). \quad (3.22)$$

Легко можно получить следующие выражения:

$$\left\|\left(I + \frac{\tau\epsilon^2 a_1}{2}D_h\right)U^{m+1}\right\|_\infty \geq \|U^{m+1}\|_\infty, \quad (3.23)$$

$$\left\|-\frac{a_1}{2}U^m + \tau\epsilon^2\left(2+\frac{3}{2}a_1\right)D_hU^m\right\|_\infty \leq -\frac{a_1}{2}, \qquad \tau \leq -\frac{a_1h^2}{(8+6a_1)d\epsilon^2}, \quad (3.24)$$

$$\left\|(1+a_1)U^{m-1} + \frac{\tau a_1}{2}\left(U^{m-1} - (U^{m-1})^{.3}\right)\right\|_\infty \leq 1 + a_1, \qquad \tau \leq -\frac{8(1+a_1)}{a_1}. \quad (3.25)$$

С использованием (3.18) и (3.22)–(3.25) мы получим $\|U^{m+1}\|_\infty \leq 1$. □

4. Выводы

Основным результатом данной работы является установление устойчивости в максимум-норме для дискретного уравнения Аллена–Кана. Мы показали, что основные результаты, полученные с использованием полностью дискретной конечно-разностной схемы, являются условно устойчивыми: устойчивость дискретной ограниченности в максимум-норме устанавливается при определенных ограничениях на временно́й шаг. В будущем нами будут рассмотрены свойства затухания дискретной энергии.

Литература

1. **Allen S.M., Cahn J.W.** A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening // Acta Metall. — 1979. — Vol. 27. — P. 1085–1095.
2. **Choi J.W., Lee H.G., Jeong D., et al.** An unconditionally gradient stable numerical method for solving the Allen–Cahn equation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications — 2009. — Vol. 388, iss. 9. — P. 1791–1803.

3. **Eyre D.J.** An unconditionally stable one-step scheme for gradient systems. — http://www.math.utah.edu/eyre/research/methods/stable.ps.
4. **Feng X., Prohl A.** Numerical analysis of the Allen–Cahn equation and approximation for mean curvature flows // Numer. Math. — 2003. — Vol. 94, № 1. — P. 33–65.
5. **Feng X., Song H., Tang T., and Yang J.** Nonlinearly stable implicit-explicit methods for the Allen–Cahn equation // Inverse Probl. Imaging. — 2013. — Vol. 7, iss. 3. — P. 679–695.
6. **Feng X., Tang T., and Yang J.** Stabilized Crank–Nicolson/Adams–Bashforth schemes for phase field models // East Asian J. on Appl. Math. — 2003. — Vol. 3, № 1. — P. 59–80.
7. **Kim J.** Phase-field models for multi-component fluid flows // Commun. Comput. Phys. — 2012. — Vol. 12, № 3. — P. 613–661.
8. **Shen J., Yang X.** Numerical approximations of Allen–Cahn and Cahn–Hilliard equations // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2010. — Vol. 28, iss. 4. — P. 1669–1691.
9. **Yang X.** Error analysis of stabilized semi-implicit method of Allen–Cahn equation. // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2009. — Vol. 11, iss. 4. — P. 1057–1070.
10. **Zhang J., Du Q.** Numerical studies of discrete approximations to the Allen–Cahn equation in the sharp interface limit // SIAM J. Sci. Comput. — 2009. — Vol. 31, iss. 4. — P. 3042–3063.

Поступила в редакцию 2 мая 2016 г.,
в окончательном варианте 8 октября 2016 г.