СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2014. Т. 17, № 3

УДК 512.64, 519.61

Об интервальных матрицах полного ранга*

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: shary@ict.nsc.ru

Шарый С.П. Об интервальных матрицах полного ранга // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 3. — С. 289–304.

Для интервальных матриц рассматривается задача определения полноранговости. Предложены признак полноранговости, основанный на выделении подматрицы с диагональным преобладанием, а также признаки на основе псевдообращения средней матрицы и сравнения норм матриц середин и радиусов исследуемой интервальной матрицы.

Ключевые слова: *интервальная матрица, полный ранг, признак полноранговости.*

Shary S.P. On the full rank interval matrices // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 3. — P. 289–304.

For interval matrices, the paper considers the problem of determining whether a matrix has a full rank. We propose the full rank criterion that relies on the search for diagonal dominance as well as criteria based on pseudoinversion of the midpoint matrix and comparison of the midpoint and the radius matrices for the interval matrix under study.

Key words: *interval matrix, full rank, full rank criteria.*

К 60-летию Анатолия Валентиновича Лакеева

1. Введение и постановка задачи

Интервалами будем называть замкнутые ограниченные и связные подмножества вещественной оси $\mathbb{R}$, т. е. множества вида $[\eta, \theta] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \eta \le x \le \theta \,\}$ для вещественных $\eta, \theta \in \mathbb{R}$, $\eta \le \theta$. Интервалы и интервальные величины обозначаются в работе буквами жирного шрифта, а неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Подчёркивание и надчёркивание — $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}$ — обозначают левый и правый концы интервала $\boldsymbol{a} \subset \mathbb{R}$, так что в целом $\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \le x \le \overline{\boldsymbol{a}} \}$. Кроме того, мы обозначаем $\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}})$ — середину интервала, $\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}})$ — радиус интервала, $|\boldsymbol{a}| = \max\{\, |\overline{\boldsymbol{a}}|, |\underline{\boldsymbol{a}}| \,\}$ — абсолютное значение (модуль) интервала, $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ — мигнитуду интервала (наименьшее удаление его точек от нуля):

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \begin{cases} \min\{\, |\overline{\boldsymbol{a}}|, |\underline{\boldsymbol{a}}| \,\}, & \text{если } 0 \notin \boldsymbol{a}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Интервальная матрица — это прямоугольная таблица из интервалов, которую мы обозначаем $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$, имея в виду, что на пересечении её i-й строки и j-го столбца стоит элемент $\boldsymbol{a}_{ij}$. К интервальным векторам и матрицам введённые выше операции mid, rad и $|\cdot|$ будут применяться покомпонентно и поэлементно. Аналогично, покомпонентным образом мы будем понимать неравенства между точечными векторами, а

---

*Работа частично финансировалась Программой Правительства России по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-5006.2014.9).

также теоретико-множественные включения и принадлежности. В частности, для матриц $A = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ одинаковых размеров отношение $A \in \boldsymbol{A}$ означает, что $a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}$ для всех элементов матриц.

Эта работа посвящена методам выявления некоторых свойств интервальных матриц.

Как известно, квадратная матрица называется неособенной (невырожденной, регулярной), если её определитель не равен нулю [1–3, 10, 13]. Это эквивалентно отсутствию линейной зависимости между строками (столбцами) такой матрицы. Иначе матрица называется особенной (вырожденной).

Интервальная квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *неособенной*, если неособенны все точечные матрицы $A \in \boldsymbol{A}$ [14, 19, 23]. Интервальная квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *особенной*, если она не является неособенной, и это равносильно тому, что матрица $\boldsymbol{A}$ содержит хотя бы одну особенную точечную матрицу. Ближайшим обобщением неособенных матриц как точечных, так и интервальных, являются матрицы полного ранга.

Рангом матрицы называется максимальное число её линейно независимых строк или столбцов. Как показывается в матричном анализе, эти числа совпадают между собой и равны максимальному из порядков ненулевых миноров рассматриваемой матрицы [1–3, 10, 13]. Вещественная $m \times n$-матрица называется *матрицей полного ранга*, если её ранг равен минимальному из чисел m и n (бо́льшим он быть не может). Назовём интервальную матрицу *матрицей полного ранга*, если она содержит точечные матрицы только полного ранга. Иначе говорим о том, что данная матрица имеет *неполный ранг.*

Интервальные матрицы интересуют нас, главным образом, в связи с интервальными системами линейных алгебраических уравнений вида:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m, \end{array}\right. \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a}_{ij}$ — интервальные коэффициенты, $\boldsymbol{b}_i$ — интервальные свободные члены, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $m \times n$-матрица, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный m-вектор, то (1) можно записать в краткой форме

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Системы (1) и (2) понимаются как совокупности точечных систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с $m \times n$-матрицами A, принадлежащими $\boldsymbol{A}$, и m-векторами b из $\boldsymbol{b}$. *Множеством решений* интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b \,) \,\bigr\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ (см., к примеру, [9, 14, 19, 23]).

Для систем (1) и (2) факт полноранговости матрицы важен при решении задачи восстановления зависимостей по неточным данным с интервальной неопределённостью, где возникают интервальные системы линейных алгебраических уравнений, в которых число переменных, как правило, не совпадает с количеством уравнений (см., в частности, [15] и цитированную там литературу). Эти системы очень часто являются переопределёнными, но нередко недоопределены (например, в спектроскопии). Если интервальная матрица, построенная по данным наблюдений, имеет неполный ранг, то это является свидетельством неудачной организации экспериментов, поскольку результаты некоторых из них оказались следствиями (линейными комбинациями) остальных. Напротив, полноранговая матрица данных является максимально информативной как в случае $m \leq n$, так и при $m \geq n$.

Для переопределённых интервальных систем линейных уравнений, в частности, справедливо

Предложение 1. *Если интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$, $m \geq n$, имеет полный ранг, то множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ является ограниченным.*

Доказательство. Для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ помимо определённого выше множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ введём также множество

$$\widetilde{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})\bigl(\, A^\top A x = A^\top b \,\bigr) \,\bigr\},$$

образованное решениями всех систем линейных уравнений $A^\top A x = A^\top b$ для $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Известно, что совместная система уравнений $Ax = b$ равносильна системе уравнений $A^\top A x = A^\top b$ [1, 2], и поэтому $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \widetilde{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Доказательство предложения 1 будет заключаться в том, что мы покажем ограниченность этого, в общем случае более широкого, множества $\widetilde{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Если A — $m \times n$-матрица полного ранга и $m \geq n$, то $A^\top A$ — неособенная $n \times n$-матрица. Поэтому решение $\check{x}$ системы $A^\top A x = A^\top b$ даётся формулой

$$\check{x} = \bigl(A^\top A\bigr)^{-1} A^\top b,$$

результат которой непрерывно зависит от A и b для матриц A полного ранга. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, которое задаётся правилом $(A, b) \mapsto \bigl(A^\top A\bigr)^{-1} A^\top b$ и определено для всех $m \times n$-матриц A полного ранга, $m \geq n$, и любых n-векторов b. Оно непрерывно, а множество $\widetilde{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является образом компакта $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{b} \subset \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m$ при этом непрерывном отображении. Как следствие, $\widetilde{\Xi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ также компактно (см., к примеру, [6]), и потому ограничено. По этой причине ограничено и содержащееся в нём исходное множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. □

Основная идея вышеприведённого доказательства совпадает с идеей, приведённой в книге [19, с. 92], но в [19] почему-то не оговаривается условие $m \geq n$, и рассуждения странно неряшливы в том, что касается топологических свойств множеств и отображений и связи решений различных систем уравнений.

Обратное к предложению 1 утверждение обусловлено дополнительными свойствами матрицы системы и множества решений и в общем случае может не выполняться (вопреки анонсированному в [11] результату). Рассмотрим в качестве примера систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [10, 11] \\ [40, 42] \\ [90, 93] \end{pmatrix}, \tag{3}$$

в которой интервальность присутствует лишь в правой части. В матрице этой системы все строки пропорциональны, так что матрица имеет неполный ранг 1. Кроме того, система (3), очевидно, несовместна, так как три её уравнения задают три параллельные полосы в $\mathbb{R}^2$, не пересекающиеся друг с другом. Таким образом, множество решений системы пусто, и поэтому ограничено.

Ниже в работе даются некоторые рецепты исследования полноранговости интервальных матриц. В общем случае проверка того, имеет ли интервальная матрица полный ранг, представляет собой NP-трудную задачу [23]. Это следует из того, что её частный случай — задача распознавания неособенности интервальной матрицы — также NP-трудна [18, 20].

2. Признаки на основе диагонального преобладания

Напомним, что точечная квадратная $n \times n$-матрица $A = (\, a_{ij})$ называется *матрицей с диагональным преобладанием* (или имеющей диагональное преобладание), если для всякого $i = 1, 2, \dots, n$ справедливо

$$|\, a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\, a_{ij}|. \tag{4}$$

Как известно, матрицы с диагональным преобладанием неособенны, и этот результат составляет содержание признака Адамара [3] (нередко его называют также теоремой Леви–Деспланка, см. [13]). Нетрудно перенести признак Адамара на интервальные матрицы.

Станем говорить, что интервальная матрица имеет *диагональное преобладание*, если диагонально преобладающими являются все содержащиеся в ней точечные матрицы. Нетрудно понять, что это определение эквивалентно следующему: интервальная $n \times n$-матрица $\boldsymbol{A} = (\, \boldsymbol{a}_{ij})$ обладает диагональным преобладанием, если для всех $i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяются неравенства

$$\langle\, \boldsymbol{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\, \boldsymbol{a}_{ij}|. \tag{5}$$

Теорема 1 (интервальный признак Адамара). *Если интервальная матрица имеет диагональное преобладание, т. е. удовлетворяет* (5), *то она неособенна.*

По-видимому, этот простой результат был впервые замечен и использован в работе [17].

Доказательство. Оно очевидным образом следует из обычного признака Адамара и определения диагонального преобладания интервальных матриц. □

Обращаясь к задаче исследования полноранговости, можно сказать, что если в интервальной $m \times n$-матрице найдётся квадратная подматрица размера $\min\{m, n\}$ с диагональным преобладанием, то эта интервальная матрица имеет полный ранг. Но свойство диагонального преобладания весьма капризно и не сохраняется при перестановках строк, тогда как полноранговость при этом не меняется. В связи с этим имеет смысл искать в данной матрице не подматрицы с диагональным преобладанием, а подматрицы, в которых диагонального преобладания можно добиться с помощью подходящей перестановки строк.

Нахождение этой перестановки — комбинаторная задача, но её свойства таковы, что решение может быть найдено относительно несложными средствами. В таблице ниже приведён простой алгоритм, основанный на “жадной” эвристике, который стремится построить из строк данной интервальной $m \times n$-матрицы $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ с $m \geq n$ квадратную матрицу размера $n \times n$ с диагональным преобладанием. В случае успеха исходная матрица признаётся полноранговой, а при неуспехе требуется дополнительное исследование. Наш алгоритм действительно решает задачу выявления диагонально преобладающей подматрицы до конца, так как в каждой строке исходной матрицы может существовать не более одного элемента, удовлетворяющего (5).

```
DO FOR  $i = 1$  TO  $n$
    из строк с номерами  $k = i, i+1, \dots, m$ , выбрать
     ту, для которой разность  $\delta_k = \langle \boldsymbol{a}_{kk} \rangle - \sum_{j \neq k} |\boldsymbol{a}_{kj}|$
     является наибольшей, обозначить её номер через $l$;
    IF  $\delta_l \leq 0$  THEN
        выдать сообщение “Требуется
              дополнительное исследование матрицы”;
        STOP
    END IF
    поменять $i$-ю строку с $l$-й строкой;
END DO
выдать сообщение “Исследуемая матрица полноранговая”
```

Более тонкий признак полноранговости можно также построить на основе понятия нестрогого (слабого) диагонального преобладания. Если вместо (4) для элементов матрицы $A = (a_{ij})$ имеют место нестрогие неравенства

$$|\, a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |\, a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

то условимся говорить о *нестрогом диагональном преобладании* в A. Далее, $n \times n$-матрица $A = (\, a_{ij})$ называется *разложимой*, если существует разбиение множества $\{\, 1, 2, \dots, n\, \}$ первых n натуральных чисел на два непересекающихся подмножества: I и J, таких что $a_{ij} = 0$ при $i \in I$ и $j \in J$. Эквивалентное определение: $n \times n$-матрица A разложима, если путём перестановок строк и столбцов она может быть приведена к блочно-треугольному виду $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ с квадратными блоками A_{11} и A_{22}. Матрицы, не являющиеся разложимыми, называются *неразложимыми*. Важнейший пример неразложимых матриц — это матрицы, все элементы которых не равны нулю, в частности, неотрицательны. Согласно известной теореме О. Таусс399 (см. [3]), если для неразложимой матрицы A выполнены условия (6), причём хотя бы одно из этих неравенств выполнено строго, то матрица A неособенна.

Если для интервальной матрицы $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ имеют место нестрогие неравенства

$$\langle\, \boldsymbol{a}_{ii} \rangle \geq \sum_{j \neq i} |\, \boldsymbol{a}_{ij}| \qquad \text{для всех } \ i = 1, 2, \dots, n, \tag{7}$$

то будем говорить о *нестрогом диагональном преобладании* в $\boldsymbol{A}$. Далее, назовём интервальную матрицу $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ *неразложимой*, если неразложимы все точечные матрицы $A \in \boldsymbol{A}$. Очевидно, справедлива

Теорема 2 (интервальная теорема О. Таусски). *Пусть неразложимая интервальная квадратная матрица* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ *имеет нестрогое диагональное преобладание* (7), *причём хотя бы для одной строки неравенство в* (7) *выполнено строго. Тогда матрица* $\boldsymbol{A}$ *неособенна.*

С учетом этого результата можно построить модификацию приведённого алгоритма, которая будет предназначена для выделения квадратной матрицы с нестрогим диагональным преобладанием. Мы не будем развивать подробностей этой конструкции в настоящей статье.

3. Необходимое и достаточное условие полноранговости

Следующий результат является обобщением признака неособенности квадратных интервальных матриц и даёт необходимые и достаточные условия полноранговости интервальных матриц.

Теорема 3 (Рон [23]). *Интервальная* $m \times n$*-матрица* $\boldsymbol{A}$, $m \geq n$, *имеет полный ранг тогда и только тогда, когда система неравенств*

$$|\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,x\,| \leq (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,|x|, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

имеет единственное нулевое решение.

Ни в [23], ни в других работах не приведено доказательства этого результата, по-видимому, потому, что оно несложно получается из доказательства для квадратных матриц, опубликованного в [21]. Для самодостаточности нашей работы выпишем доказательство теоремы полностью.

Доказательство. *Достаточность.* Если $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$, $m \geq n$, содержит матрицу неполного ранга $\tilde{A}$, то $\tilde{A}\tilde{x} = 0$ для некоторого ненулевого вектора $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$|\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}\,| \;=\; |\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \tilde{A})\,\tilde{x}\,| \;\leq\; |\tilde{A} - \mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}|\,|\tilde{x}| \;\leq\; (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,|\tilde{x}|,$$

поскольку $|\tilde{A} - \mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}| \leq \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}$. Таким образом, вектор $\tilde{x}$ является нетривиальным решением системы неравенств (8).

Необходимость. Если неравенство (8) действительно имеет решение $\tilde{x} \neq 0$, то образуем векторы $y = (\,y_i) \in \mathbb{R}^m$ и $z = (\,z_j) \in \mathbb{R}^n$, такие что

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} \cdot \tilde{x})_i}{(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \cdot |\tilde{x}|)_i}, & \text{если } (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \cdot |\tilde{x}|)_i \neq 0, \\[2ex] 1, & \text{если } (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \cdot |\tilde{x}|)_i = 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{x}_j \geq 0, \\ -1, & \text{если } \tilde{x}_j < 0, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

и с их помощью построим матрицу $\tilde{A}$, в которой на ij-м месте стоит элемент $(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})_{ij} - y_i z_j (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})_{ij}$. В матричном виде она представляется как

$$\tilde{A} = \mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{diag}\,\{y\} \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{diag}\,\{z\}.$$

Так как все $|\,y_i z_j| \leq 1$, то, очевидно, $\tilde{A}$ принадлежит $\boldsymbol{A}$. В то же время, она имеет неполный ранг, так как её произведение на ненулевой вектор $\tilde{x}$ зануляется. В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} \;&=\; (\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x} - \mathrm{diag}\,\{y\}\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,\mathrm{diag}\,\{z\}\,\tilde{x} \\ &=\; (\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x} - \mathrm{diag}\,\{y\}\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,|\tilde{x}|, \end{aligned}$$

причём если $(\mathrm{rad}\ \boldsymbol{A}\cdot|\tilde{x}|)_i \neq 0$, то i-я компонента этого вектора должна быть равна разности

$$\bigl(\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}\,\bigr)_i - \frac{(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}\cdot\tilde{x})_i}{(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}\cdot|\tilde{x}|)_i}\,\bigl(\,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}\cdot|\tilde{x}|\,\bigr)_i \;=\; \bigl(\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}\cdot\tilde{x}\,\bigr)_i - \bigl(\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}\cdot\tilde{x}\,\bigr)_i,$$

а если $(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}\cdot|\tilde{x}|)_i = 0$, то разности двух нулей в силу (8). Это доказывает достаточность условий теоремы. □

Нахождение нетривиальных решений для (8) в общем случае непросто, и главное назначение теоремы 3 состоит в том, что она является основой для конструирования более практичных признаков полноранговости интервальных матриц.

Следствие 1. *Интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$, $m \leq n$, имеет полный ранг тогда и только тогда, когда система неравенств*

$$\bigl|\,x^{\top}(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\bigr| \;\leq\; |x|^{\top}(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

имеет единственное нулевое решение.

Для обоснования воспользуемся тем, что ранг матрицы при транспонировании не меняется и применим теорему 3 к матрице $A^{\top}$.

4. Признак на основе псевдообращения и спектрального радиуса

Напомним (см. [1–3, 13]), что для вещественной $m \times n$-матрицы A псевдообратной матрицей называется такая вещественная $n \times m$-матрица A^{+}, что AA^{+} и $A^{+}A$ являются симметричными матрицами и

$$AA^{+}A = A, \qquad A^{+}AA^{+} = A^{+}.$$

Если A — матрица полного ранга и $m \geq n$, то $A^{+} = (A^{\top}A)^{-1}A^{\top}$ [1, 2]. В этом случае $A^{+}A$ — это единичная $n \times n$-матрица. Если же A — матрица полного ранга и $m \leq n$, то $A^{+} = A^{\top}(AA^{\top})^{-1}$ [1, 2]. Тогда AA^{+} — это единичная $m \times m$-матрица. Псевдообратная матрица, фактически, встречалась нам при доказательстве предложения 1 в выражении для решения $\check{x}$.

Формулировка следующего результата также приводится в справочнике [23], но за его обоснованием читатель отсылается к работе [22], где изложение непрозрачно, а требуемый результат даже не сформулирован в явном виде. Ниже приводится другое доказательство.

Теорема 4. *Пусть интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ такова, что $m \geq n$, средняя матрица $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}$ имеет полный ранг и*

$$\rho\big(\ |(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}| \cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}\ \big) < 1,$$

где $\rho(\cdot)$ — взятие спектрального радиуса квадратной матрицы. Тогда $\boldsymbol{A}$ имеет полный ранг.

Доказательство. Предположим, напротив, что интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ имеет неполный ранг. Тогда, согласно теореме 3, существует такой ненулевой n-вектор $\tilde{x}$, что

$$|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}\,| \leq (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,|\tilde{x}|.$$

Таким образом,

$$|\tilde{x}| \;=\; |(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}| \;\leq\; |(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}| \cdot |(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}| \;\leq\; |(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}| \cdot (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}) \cdot |\tilde{x}|,$$

т. е. для ненулевого неотрицательного вектора $v = |x|$ имеет место

$$|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}|(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})v \geq v,$$

причём матрица $|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}|\ (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})$ неотрицательна.

Напомним теперь следующий факт из теории неотрицательных матриц. Если G — неотрицательная $n \times n$-матрица, $\rho(G)$ — её спектральный радиус и α — положительное вещественное число, то

$$\rho(G) \;\geq\; \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \big(\,\exists v \in \mathbb{R}^n\big)\ \big(v \geq 0,\, v \neq 0 \quad \&\ \ Gv \geq \alpha v\big). \tag{9}$$

Доказательство этой эквивалентности может быть найдено, например, в монографии Р. Хорна и Ч. Джонсона [13, теорема 8.3.1, с. 594] либо в англоязычных источниках [16, 19]. С другой стороны, неявным образом этот результат обосновывается в доказательстве Х. Виландта теоремы Перрона–Фробениуса о неотрицательных матрицах, которое воспроизводится во многих руководствах по теории матриц, например, в классической книге Ф. Гантмахера [3].

Таким образом, из (9) и из неравенства $|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}| \cdot (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}) \cdot |\tilde{x}| \geq |\tilde{x}|$, полученного нами, следует, что спектральный радиус неотрицательной матрицы $|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}|(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})$ не меньше единицы. Противоречие! ☐

Теорема 4 является непосредственным обобщением известного в интервальном анализе признака Риса–Бека неособенности интервальной матрицы (см. [14, 21, 23]).

Следствие 2. *Пусть интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ такова, что $m \leq n$, средняя матрица $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}$ имеет полный ранг и*

$$\rho\big(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} \cdot |(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^{+}|\big) < 1,$$

где $\rho(\cdot)$ — взятие спектрального радиуса. Тогда $\boldsymbol{A}$ имеет полный ранг.

Для обоснования воспользуемся следствием 1 из теоремы 3 и тем фактом, что спектр квадратной матрицы при транспонировании не меняется.

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим матрицу

$$\boldsymbol{B} \;=\; \begin{pmatrix} [1,2] & [3,4] \\ [5,6] & [7,8] \\ [9,10] & [11,12] \end{pmatrix},$$

которая имеет полный ранг, равный 2. Чтобы убедиться в этом, возьмём её подматрицу

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [3,4] \\ [9,10] & [11,12] \end{pmatrix} \tag{10}$$

и найдём интервальную оценку области значений её определителя

$$[1,2]\cdot[11,12]-[9,10]\cdot[3,4]=[11,24]-[27,40]=[-29,-3].$$

В случае 2×2-матриц в выражение для определителя все переменные — элементы матрицы — входят только по одному разу в первой степени, и потому, в силу основной теоремы интервальной арифметики [9, 14, 19], результат интервального оценивания совпадает с точной областью значений определителя. Так как $0 \notin [-29,-3]$, матрица (10) неособенна.

В то же время,

$$\operatorname{rad}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix},\qquad \operatorname{mid}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1.5 & 3.5\\ 5.5 & 7.5\\ 9.5 & 11.5\end{pmatrix},$$

матрица $\operatorname{mid}\boldsymbol{B}$ имеет полный ранг и $\rho\big(\,|(\operatorname{mid}\boldsymbol{B})^{+}|\cdot\operatorname{rad}\boldsymbol{B}\,\big)=0.979167<1$. Как видим, выведенный в теореме 4 признак тоже показывает полноранговость матрицы $\boldsymbol{B}$.

5. Признак на основе сравнения сингулярных чисел матриц серединн и радиусов

Напомним, что сингулярным числом σ вещественной $m\times n$-матрицы A называется неотрицательное решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix}0 & A^{\top}\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

отвечающее ненулевым векторам $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$. Сингулярные числа матрицы A можно также определить как арифметические квадратные корни из общих собственных чисел матриц $A^{\top}A$ и $AA^{\top}$ (см. [13]). Таким образом, сингулярные числа $m\times n$-матрицы — это набор из $\min\{m,n\}$ неотрицательных чисел. Мы будем обозначать посредством $\sigma_{\min}(A)$ и $\sigma_{\max}(A)$ наименьшее и наибольшее из сингулярных чисел матрицы A.

Теорема 5. *Если для интервальной $m\times n$-матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет место*

$$\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\boldsymbol{A})\ <\ \sigma_{\min}(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}), \tag{11}$$

то она имеет полный ранг.

Доказательство. Пусть $m\geq n$, и допустим обратное доказываемому: матрица $\boldsymbol{A}$ имеет неполный ранг. Тогда, согласно теореме 3, для некоторого вектора $\tilde{x}\neq 0$ справедливо неравенство (8), т. е.

$$|\,(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})\,\tilde{x}\,|\leq(\operatorname{rad}\boldsymbol{A})\,|\tilde{x}|, \tag{12}$$

а также равносильное ему покомпонентное неравенство для вектор-строк

$$|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}|^\top \leq \bigl((\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})|\tilde{x}|\bigr)^\top. \tag{13}$$

Компоненты векторов, стоящих в левых и правых частях неравенств (12), (13), неотрицательны, и потому, перемножая векторы из их одноимённых частей, мы придём к неравенству того же смысла

$$|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}|^\top|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}| \leq \bigl(\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})|\tilde{x}|\,\bigr)^\top(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})|\tilde{x}|. \tag{14}$$

Далее без ограничения общности можно считать, что $\tilde{x}^\top\tilde{x} = 1$, т. е. вектор $\tilde{x}$ нормализован в евклидовой норме, которую мы стандартно обозначаем $\|\cdot\|_2$. Напомним вариационное описание собственных чисел симметричной матрицы, основанное на отношении Рэлея (см., к примеру, [2, 3, 5, 10, 13]): если $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H^\top = H$, а $\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$ — это наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы H соответственно, то

$$\lambda_{\min}(H) = \min_{y\neq 0}\frac{y^\top H\,y}{y^\top y} = \min_{\|x\|_2=1} x^\top H\,x, \qquad \lambda_{\max}(H) = \max_{y\neq 0}\frac{y^\top H\,y}{y^\top y} = \max_{\|x\|_2=1} x^\top H\,x.$$

Как следствие, имеем

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\min}(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}) &= \lambda_{\min}\bigl(\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^\top(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\bigr)\\
&= \min_{\|x\|_2=1}\bigl(\,x^\top(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})^\top(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,x\,\bigr) \quad \text{в силу характеризации Рэлея}\\
&\leq \bigl(\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}\,\bigr)^\top\bigl(\,(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}\,\bigr) \leq |(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}|^\top|(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})\,\tilde{x}|\\
&\leq \bigl(\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})|\tilde{x}|\,\bigr)^\top(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})|\tilde{x}| \quad \text{в силу (14)}\\
&= |\tilde{x}|^\top(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})^\top\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,|\tilde{x}| \leq \max_{\|x\|_2=1}\Bigl(x^\top\bigl(\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})^\top(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,\bigr)\,x\Bigr)\\
&= \lambda_{\max}\bigl(\,(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})^\top(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})\,\bigr) \quad \text{в силу характеризации Рэлея}\\
&= \sigma^2_{\max}(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}).
\end{aligned} \tag{15}$$

Сравнивая начало и конец выкладок (15), в целом получаем $\sigma_{\min}(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}) \leq \sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A})$, что противоречит условию (11).

При доказательстве случая $m \leq n$ опираемся на следствие 1. □

Если $\boldsymbol{A} = A$ — точечная матрица, то $\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A} = A$, $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A} = 0$, и все сингулярные числа матрицы $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}$ также равны нулю. Тогда результат теоремы 5 выражает хорошо известный из матричного анализа признак матрицы полного ранга — условие $\sigma_{\min}(A)>0$.

Для случая существенно интервальных матриц результат теоремы 5 является обобщением известного признака Румпа [24] (см. также [14, 21]): если для интервальной квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет место $\sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}) < \sigma_{\min}(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A})$, то она неособенна.

В качестве первого примера применения полученного признака рассмотрим предложенную И.А. Шарой матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & [0,1]\\ -1 & [0,1]\\ [-1,1] & 1 \end{pmatrix}.$$

Она демонстрирует, что для интервальных матриц традиционные способы рассуждений линейной алгебры и матричного анализа и сформировавшаяся на их основе интуиция могут не работать. Матрицы середин и радиусов для $\boldsymbol{A}$ имеют вид:

$$\operatorname{mid}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ -1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rad}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, $\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\boldsymbol{A}) = 1$, $\sigma_{\min}(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}) = 1.22474$, и согласно теореме 5 рассматриваемая матрица имеет полный ранг 2. Тот же результат даёт применение теоремы 4. В то же время, матрица $\boldsymbol{A}$ не содержит неособенных интервальных 2×2-подматриц, что нетрудно обнаружить полным перебором всех таких подматриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & [0,1] \\ -1 & [0,1] \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & [0,1] \\ [-1,1] & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & [0,1] \\ [-1,1] & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы содержат особенные матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Напомним, что в обычном неинтервальном случае полноранговая матрица просто по определению имеет квадратную неособенную подматрицу, порядок которой равен рангу матрицы.

Следующим примером рассмотрим интервальную матрицу

$$\boldsymbol{B} \;=\; \begin{pmatrix} [1,2] & [3,4] \\ [5,6] & [7,8] \\ [9,10] & [11,12] \end{pmatrix}.$$

Для неё с помощью теоремы 4 в предшествующем пункте мы установили полноранговость. В то же время, для этой матрицы $\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\boldsymbol{B}) = 1.22474$, $\sigma_{\min}(\operatorname{mid}\boldsymbol{B}) = 1.09151$, и потому теорема 5 не позволяет определённо судить о том, является ли матрица $\boldsymbol{B}$ полноранговой.

Пример другого свойства. Рассмотрим интервальную матрицу

$$\boldsymbol{C} \;=\; \begin{pmatrix} 3.3 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.3 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.3 \\ [0,1] & [0,1] & [0,1] \end{pmatrix}.$$

Для неё $\rho\Big(\,|(\operatorname{mid}\,\boldsymbol{C})^{+}| \cdot \operatorname{rad}\,\boldsymbol{C}\,\Big) = 1.06291 > 1$. Но при этом $\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\boldsymbol{C}) = 2.17945$, $\sigma_{\min}(\operatorname{mid}\boldsymbol{C}) = 2.3$. Получается, что признак теоремы 5 указывает на полноранговость рассматриваемой матрицы $\boldsymbol{C}$, а теорема 4 не позволяет сделать никакого определённого вывода.

6. Признак на основе сравнения норм матриц серединн и радиусов

Напомним, что для заданной векторной нормы $\|\cdot\|$ *подчинённая матричная норма* определяется как

$$\|A\|' = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{16}$$

Абсолютной нормой называется норма, зависящая лишь от абсолютных значений элементов (вектора или матрицы). Из популярных матричных норм абсолютными являются нормы:

$$\|A\|_1 \;=\; \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right) \quad \text{и} \quad \|A\|_\infty \;=\; \max_{1\leq i\leq m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right), \quad A\in\mathbb{R}^{m\times n},$$

которые подчинены векторным нормам:

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^{n}|x_i| \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty \;=\; \max_{1\leq i\leq n}|x_i|, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Основной результат этого пункта работы есть

Теорема 6. *Пусть $\|\cdot\|$ — абсолютная подчинённая матричная норма. Если для интервальной $m\times n$-матрицы $\boldsymbol{A}$, $m\geq n$, средняя точечная матрица $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ имеет полный ранг и выполнено условие*

$$\|\operatorname{rad}\boldsymbol{A}\| \;<\; \left\|(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})^+\right\|^{-1},$$

то $\boldsymbol{A}$ также имеет полный ранг.

Наше доказательство существенно опирается на понятие *нижней грани матрицы* [10]. Для фиксированной векторной нормы $\|\cdot\|$ нижней гранью матрицы A относительно этой нормы называется величина $\operatorname{lob}(A)$ (от lower bound), определяемая как

$$\operatorname{lob}(A) \;=\; \min_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \;=\; \min_{\|y\|=1}\|Ay\|. \tag{17}$$

Нижняя грань матрицы является в некотором смысле антиподом подчинённой нормы матрицы, поскольку определяющее норму выражение (16) совершенно аналогично (17) с той лишь разницей, что вместо min в нём стоит max. В этой терминологии подчинённую матричную норму можно было бы назвать “верхней гранью” матрицы.

Ясно, что нижняя грань матрицы — это неотрицательное число, такое что при любом векторе $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\|Ax\| \;\geq\; \operatorname{lob}(A)\,\|x\|. \tag{18}$$

Нижняя грань квадратных матриц, т. е. в случае $m = n$, равна нулю тогда и только тогда, когда матрица особенна (вырождена). Для прямоугольных $m\times n$-матриц с $m\geq n$ нижняя грань равна нулю тогда и только тогда, когда матрица имеет неполный ранг. Для прямоугольных $m\times n$-матриц с $m<n$ нижняя грань всегда равна нулю, так как в (17) можно взять в качестве x ненулевой n-вектор, ортогональный всем m строкам матрицы A.

В общем случае справедливо

Предложение 2. *Пусть заданы $m\times n$-матрица полного ранга A, $m\geq n$, и некоторая векторная норма. Тогда нижняя грань A относительно этой нормы имеет оценку снизу $\operatorname{lob}(A)\geq\|A^+\|^{-1}$, где $\|\cdot\|$ — подчинённая матричная норма.*

Доказательство. Пусть A — $m\times n$-матрица полного ранга и $m\geq n$. Тогда $Ax\neq 0$ для $x\neq 0$. Как следствие,

$$\operatorname{lob}(A) \;=\; \min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left(\max_{x\neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)^{-1} \right)^{-1} = \left(\max_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \right)^{-1}.$$

Сделаем замену $Ax = y$. Тогда для любого вектора $y \in \mathbb{R}^m$, принадлежащего образу $\operatorname{Im} A$ линейного отображения $x \mapsto Ax$, имеет место $x = A^{+}y$. Можем продолжить выкладки

$$\operatorname{lob}(A) = \left(\max_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \right)^{-1} = \left(\max_{\substack{y\in \operatorname{Im} A\\ y\neq 0}} \frac{\|A^{+}y\|}{\|y\|} \right)^{-1} \;\geq\; \left(\max_{y\neq 0} \frac{\|A^{+}y\|}{\|y\|} \right)^{-1} \;=\; \|A^{+}\|^{-1},$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 6. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, и для каждой $\tilde{A} \in \boldsymbol{A}$ имеем

$$\tilde{A}x = \bigl(\operatorname{mid}\boldsymbol{A} + (\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A})\bigr)x = (\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x + (\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A})x,$$

где, очевидно,

$$|\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}| \leq \operatorname{rad}\boldsymbol{A}. \tag{19}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\bigl\|(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x\bigr\| \;&\geq\; \operatorname{lob}(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})\,\|x\| \quad \text{в силу (18)}\\
&\geq\; \bigl\|(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})^{+}\bigr\|^{-1}\|x\| \quad \text{в силу предложения 2}\\
&>\; \|\operatorname{rad}\boldsymbol{A}\|\,\|x\| \quad \text{по условию теоремы} \qquad (20)\\
&\geq\; \bigl\|\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}\bigr\|\,\|x\| \quad \text{в силу (19) и абсолютности матричной нормы}\\
&\geq\; \bigl\|(\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A})\,x\bigr\| \quad \text{в силу субмультипликативности матричной нормы.}
\end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец выкладок, можем заключить, что сумма $(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x + (\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A})x$ не должна зануляться. В противном случае было бы $(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x = -(\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A})x$ и, следовательно, $\|(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x\| = \|(\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A})x\|$ вопреки строгому неравенству (20). Таким образом, $\tilde{A}x \neq 0$ и матрица $\tilde{A}$ имеет полный ранг. □

Для случая квадратных интервальных матриц аналогичный результат о неособенности был сформулирован в [7] как следствие исследований, выполненных в [8]. Приводимое выше доказательство охватывает более общий случай прямоугольных матриц и, кроме того, существенно более коротко и прозрачно.

В качестве примера применения теоремы 6 рассмотрим матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} [-1,1] & [3,5]\\ [7,9] & [11,13]\\ [13,15] & [19,21] \end{pmatrix},$$

у которой матрицы середин и радиусов равны соответственно

$$\operatorname{mid}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 12 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \operatorname{rad}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma_{\min}(\operatorname{mid}\boldsymbol{A}) = 2.27684$, $\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\boldsymbol{A}) = 2.44949$, и признак на основе сингулярных чисел (теорема 5) не работает.

Но так как наименьшее сингулярное число средней матрицы $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ заметно отлично от нуля, она имеет полный ранг. Кроме того, псевдообратная матрица для $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -0.356061 & -0.0075758 & 0.0757576 \\ 0.246212 & 0.0265152 & -0.0151515 \end{pmatrix}$$

и $\|(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})^{+}\|_{\infty}^{-1} = 2.27586$, тогда как $\|\operatorname{rad}\boldsymbol{A}\|_{\infty} = 2$. Отсюда на основании теоремы 6 можем заключить, что интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ также имеет полный ранг. К этому же выводу можно прийти, применяя признак теоремы 4.

Максимальное сингулярное число матрицы является, как известно, матричной нормой (называемой “спектральной нормой”), и потому результат теоремы 6 имеет большое сходство с теоремой 5. Но формально он не охватывает её, так как спектральная норма матриц не является абсолютной матричной нормой. Кроме того, в теореме 5 не требуется полноранговость средней матрицы $\operatorname{mid}\boldsymbol{A}$. Тем не менее, полезно дать обоснование теоремы 5 на основе идей этого пункта.

Заметим сначала, что для $m \times n$-матриц с $m \geq n$ в силу свойств отношения Рэлея справедливо

$$\min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \min_{x\neq 0} \frac{\sqrt{(Ax)^{\top}Ax}}{\sqrt{x^{\top}x}} = \sqrt{\min_{x\neq 0} \frac{(Ax)^{\top}Ax}{x^{\top}x}} = \sqrt{\min_{x\neq 0} \frac{x^{\top}\left(A^{\top}A\right)x}{x^{\top}x}}$$
$$= \sqrt{\lambda_{\min}\left(A^{\top}A\right)} = \sigma_{\min}(A).$$

Иными словами, нижняя грань $m \times n$-матрицы A, $m \geq n$, относительно евклидовой нормы равна $\operatorname{lob}_2(A) = \sigma_{\min}(A)$.

Переходя к доказательству теоремы, возьмём какую-нибудь матрицу $\tilde{A} \in \boldsymbol{A}$. Очевидно, что $|\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}| \leq \operatorname{rad}\boldsymbol{A}$, и потому

$$\begin{pmatrix} 0 & (\operatorname{rad}\boldsymbol{A})^{\top} \\ \operatorname{rad}\boldsymbol{A} & 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & |\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}|^{\top} \\ |\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}| & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Воспользуемся следующим фактом теории Перрона–Фробениуса для неотрицательных матриц: если $G \geq |H|$, то $\rho(G) \geq \rho(H)$ (см. [13, теорема 8.1.18]). Тогда на основании (21) можно заключить, что

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & (\operatorname{rad}\boldsymbol{A})^{\top} \\ \operatorname{rad}\boldsymbol{A} & 0 \end{pmatrix} \geq \rho\begin{pmatrix} 0 & (\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A})^{\top} \\ (\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}) & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\boldsymbol{A}) \geq \sigma_{\max}(\tilde{A} - \operatorname{mid}\boldsymbol{A}). \tag{22}$$

С учётом сказанного

$$\begin{aligned}
\|(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x\|_2 &\geq \sigma_{\min}(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})\,\|x\|_2 && \text{из полученного выражения для } \operatorname{lob}_2(A)\\
&> \sigma_{\max}(\operatorname{rad}\boldsymbol{A})\,\|x\|_2 && \text{по условию предложения 2}\\
&\geq \sigma_{\max}(\tilde{A}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A})\,\|x\|_2 && \text{в силу (22)}\\
&= \left\|\tilde{A}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A}\right\|_2\,\|x\|_2 && \text{по определению спектральной нормы}\\
&\geq \left\|(\tilde{A}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A})\,x\right\|_2 && \text{в силу субмультипликативности нормы.}
\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что произведение $\tilde{A}x = (\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x + (\tilde{A}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x$ не может зануляться, так как тогда $(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x = -(\tilde{A}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x$ и должно было бы быть $\|(\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x\|_2 = \|(\tilde{A}-\operatorname{mid}\boldsymbol{A})x\|_2$ вопреки результату выполненных выше выкладок. Как следствие, $\tilde{A}x\neq 0$, и матрица $\tilde{A}$ имеет полный ранг.

Чтобы завершить доказательство теоремы 5, необходимо ещё рассмотреть случай прямоугольной матрицы с $m < n$. Для этого мы можем транспонировать матрицу и опираться на уже доказанное, так как ни ранг матрицы, ни её сингулярные числа при транспонировании не меняются. Это же соображение относится к практическому применению теоремы 6.

В заключение работы отметим, что нахождение спектрального радиуса, сингулярных чисел матриц и псевдообратной матрицы хорошо разработано в современном численном анализе (см., к примеру, [4, 5]). Для вычисления этих объектов созданы надежные алгоритмы, а реализующие их готовые подпрограммы входят в стандартные пакеты численных методов линейной алгебры (все числовые данные примеров этой статьи были получены с помощью свободно распространяемой системы компьютерной математики Scilab [25]). Для грубого и быстрого оценивания спектрального радиуса, который используется в теореме 4, можно применять его оценку сверху какой-нибудь матричной нормой.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за благожелательную конструктивную критику и ценные соображения, касающиеся результатов статьи.

Литература

1. **Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.** Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. — СПб.: БХВ, 2006.
2. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
3. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
4. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
5. **Деммель Дж.** Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. — М.: Мир, 2001.
6. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
7. **Ерохин В.И.** Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей // Дискретный анализ и исследование операций. — 2002. — Т. 9, № 2. — С. 41–77.
8. **Ерохин В.И.** Необходимые и достаточные условия невырожденности интервальных матриц // Междунар. конф. по вычисл. математике МКВМ-2004. Рабочие совещания / Ю.И. Шокин и др. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. — С. 193–200.
9. **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.

10. **Ланкастер П.** Теория матриц. — М.: Наука, 1982.
11. **Родионова О.Е.** Интервальный метод обработки результатов многоканальных экспериментов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — М.: Институт физической химии РАН, 2008.
12. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. — М.: Ижевск: Изд-во РХД, 2008.
13. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
14. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. — Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2013. — Электронная книга,
URL: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf
15. **Шарый С.П.** Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями // Автоматика и Телемеханика. — 2012. — № 2. — С. 111–125.
16. **Berman A., Plemmons R.J.** Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. — New York: Academic Press, 1979.
17. **Naimark L., Zeheb E.** An extension of Levy-Desplanque theorem and some stability conditions for matrices with uncertain entries // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. — 1997. — Vol. 44, № 2. — P. 167–170.
18. **Nemirovski A.** Several NP-hard problems arising in robust stability // Mathematics of Control Signals and Systems. — 1993. — Vol. 6, № 2. — P. 99–105.
19. **Neumaier A.** Interval Methods for Systems of Equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
20. **Poljak S., Rohn J.** Checking robust nonsingularity is NP-hard // Mathematics of Control Signals and Systems. — 1993. — Vol. 6, № 1. — P. 1–9.
21. **Rex G., Rohn J.** Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1999. — Vol. 20, № 2. — P. 437–445.
22. **Rohn J.** Enclosing solutions of overdetermined systems of linear interval equations // Reliable Computing. — 1996. — Vol. 2, № 2. — P. 167–171.
23. **Rohn J.** A Handbook of Results on Interval Linear Problems. — Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic: Prague, 2012. — E-book,
URL: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/!handbook.pdf.
24. **Rump S.M.** Verification methods for dense and sparse systems of equations // Topics in Validated Numerics / J. Herzberger. — Amsterdam: Elsevier, 1994. — P. 63–135.
25. Scilab: The Free Platform for Numerical Computation: e-resource. URL: http: //www.scilab.org.

Поступила в редакцию 17 июня 2013 г.,
в окончательном варианте 6 сентября 2013 г.