УДК 533

ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ Л. В. ОВСЯННИКОВА ДЛЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

К. В. Курмаева, С. С. Титов

Уральский государственный университет путей сообщения, 620034 Екатеринбург
E-mail: sergey.titov@usaaa.ru

Рассмотрено решение уравнения потенциала скорости стационарного осесимметричного течения идеального газа в окрестности данной точки на оси симметрии в виде двойного ряда по степеням расстояния до оси симметрии и его логарифма. Для коэффициентов ряда получены рекуррентные цепочки уравнений с произволом в две аналитические функции продольной переменной. Доказана сходимость построенного ряда методом специальных мажорант. Получена теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи для данного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных с особенностью на оси симметрии как аналог теорем С. В. Ковалевской и Л. В. Овсянникова.

Ключевые слова: трансзвуковое течение, газовая динамика, сопло, теорема Овсянникова, теорема Ковалевской, ряды, сходимость.

Введение. В работе [1] Л. В. Овсянниковым доказан аналог теоремы С. В. Ковалевской, обосновывающий применение рядов по степеням расстояния до оси симметрии к обратной задаче течения газа в осесимметричных соплах. Произвол решения этой задачи составляет одну аналитическую функцию продольной переменной (скорость газа на оси симметрии). Поскольку рассматриваемое уравнение — уравнение второго порядка, в общем решении необходимо наличие второй произвольной функции, которую также можно задавать в окрестности оси сопла. Эта гипотетическая функция полагалась Л. В. Овсянниковым нулевой для избежания особенности на оси и рассмотрения окрестности звуковой линии. В таком случае для искомого потенциала движущегося газа получается характеристическая задача Коши, теория решения которой в виде рядов по степеням характеристической переменной (в данном случае — r) развивалась также в работах [2–6, 8].

В [9] рассмотрено решение осесимметрической задачи стационарного трансзвукового обтекания тонких тел с помощью логарифмических рядов. Данная методика применена в настоящей статье для решения задачи локального построения решений уравнения для потенциала скорости φ стационарного движения идеального газа. Решение строится вблизи оси симметрии течения, потому что в стандартной постановке решается обратная задача течения в соплах [10], когда на оси сопла задается скорость газа, а затем определяются параметры течения и форма сопла. Решение уравнения строится в виде двойного ряда по степеням r и $\ln r$ (или по дробным степеням r) в окрестности $r = 0$, $z = z_0$ [7, 10, 11]. Для коэффициентов ряда получены рекуррентные цепочки уравнений. Сходимость построенного ряда доказана методом специальных мажорант. Получена теорема существования и единственности решения для данного нелинейного дифференциального уравнения в частных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00217) и целевой программы поддержки междисциплинарных проектов, выполняемых в содружестве с учеными СО РАН и ДВО РАН.

производных с особенностью [11]. Если $\varphi_r = 0$ при $r = 0$, то решение — аналитическая функция, представимая рядом по степеням характеристической переменной r [8], сходимость которого можно установить методом Л. В. Овсянникова [1, 10]. Если же $\varphi_r \neq 0$ при $r = 0$, то в ряде появляются неаналитические члены, содержащие $\ln r$, и вторая произвольная функция [11]. С математической точки зрения необходимо найти вторую произвольную функцию продольной переменной. Действительно, если ввести вторую произвольную функцию на оси симметрии, "управляющую" ненулевой поперечной производной φ_r при $r \to 0$, то согласно теореме Л. В. Овсянникова [1] на оси симметрии ($r = 0$) должна возникнуть особенность, заключающаяся в том, что в этом случае производная φ_r обращается в бесконечность в отличие от решения характеристической задачи Коши стандартного вида [3, 7, 8]. Выделение особенности осуществляется путем определения такой степени r, при которой домноженная на нее производная не стремилась бы к бесконечности. В данной работе найдено такое ε, что

$$\lim_{r\to 0} r^{\varepsilon}\varphi_r = \bar{\alpha}(z),$$

где $\bar{\alpha}(z)$ — произвольная аналитическая функция переменной z. В рассматриваемом случае получено $\varepsilon = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, что обосновывается после доказательства сходимости построенного асимптотического ряда. При этом потенциал φ остается аналитической функцией переменных r, z при малых r, отличных от нуля. Поставленную задачу назовем обобщенной задачей Коши. Оказалось, что в данном случае эта обобщенная задача Коши имеет решение, а именно: при малых r функция $\varphi(r, z)$ асимптотически представляется в виде

$$\varphi \sim \varphi_0 = \alpha(z) r^{\delta} + \beta(z),$$

где $\delta = 2/(\gamma + 1)$. Отсюда $\bar{\alpha}(z) = \delta\alpha(z)$.

Найденное решение φ_0 естественно назвать обобщенными начальными данными решаемой задачи Коши. Более того, оказалось возможным считать φ_0 нулевым коэффициентом логарифмического ряда, сходящегося при малых положительных r. Необходимо отметить, что произвольность задаваемых функций определяет целый класс аналитических решений рассматриваемого уравнения. Изложению этого результата и посвящена данная работа.

Постановка задачи. Уравнение для потенциала Φ скоростей стационарного движения политропного газа имеет вид

$$\sum_{ik}(1-\delta_{ik})\Phi_{x_i}\Phi_{x_k}\Phi_{x_i x_k} - \sum_{i}(\Theta - \Phi_{x_i}^2)\Phi_{x_i x_i} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$; x_i — декартовы координаты;

$$\Theta = (\gamma - 1)\Big(K - \frac{1}{2}\sum_i \Phi_{x_i}^2\Big), \tag{2}$$

где Θ — квадрат скорости звука, $K > 0$, $K = \mathrm{const}$, γ — показатель адиабаты, $i, k = 1, 2, 3$.

В осесимметрическом случае

$$x_3 = z, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \Phi = \Phi(r, z). \tag{3}$$

Из (1), (2) имеем уравнение

$$2\Phi_r\Phi_z\Phi_{rz} + (\Phi_z^2 - \Theta)\Phi_{zz} - \Theta(\Phi_{rr} + \Phi_r/r) + \Phi_r^2\Phi_{rr} = 0, \tag{4}$$

где теперь из (2), (3)

$$\Theta = (\gamma - 1)[K - \Phi_r^2/2 - \Phi_z^2/2]. \tag{5}$$

Построение логарифмического ряда. Будем строить решение Φ уравнения (4) в виде ряда

$$\Phi = \varphi(\rho, r, z), \qquad \rho = \ln r; \tag{6}$$

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\rho, z) r^n. \tag{7}$$

Уравнения (4), (5) в силу (6) преобразуются к виду

$$2\varphi_z(\varphi_\rho/r + \varphi_r)(\varphi_{\rho z}/r + \varphi_{rz}) + \varphi_{zz}[(\gamma+1)\varphi_z^2/2 + (\gamma-1)(\varphi_\rho/r + \varphi_r)^2/2 - (\gamma-1)K] + \\ + (\gamma-1)[-K + \varphi_z^2/2 + (\varphi_\rho/r + \varphi_r)^2/2][\varphi_{rr} + 2\varphi_{r\rho}/r + \varphi_r/r + \varphi_{\rho\rho}/r^2] + \\ + (\varphi_\rho/r + \varphi_r)^2[\varphi_{rr} + 2\varphi_{r\rho}/r + (\varphi_{\rho\rho} - \varphi_\rho)/r^2] = 0. \tag{8}$$

Умножая (8) на r^4, преобразуем это уравнение:

$$(r\varphi_r + \varphi_\rho)^2[(\gamma+1)(r^2\varphi_{rr} + 2r\varphi_{r\rho} + \varphi_{\rho\rho})/2 + (\gamma-1)r\varphi_r/2 - \varphi_\rho] = \\ = (\gamma-1)(K - \varphi_z^2/2)r^2[r^2\varphi_{rr} + 2r\varphi_{r\rho} + r\varphi_r + \varphi_{\rho\rho}] - 2r^2\varphi_z(r\varphi_r + \varphi_\rho)(r\varphi_{rz} + \varphi_{\rho z}) - \\ - r^2\varphi_{zz}[(\gamma+1)\varphi_z^2 r^2/2 - (\gamma-1)r^2 K + (\gamma-1)(r\varphi_r + \varphi_\rho)^2/2]. \tag{9}$$

Подставляя (6), (7) в (9), при $n = 0$ получим (штрих обозначает производную по ρ)

$$(\varphi_0')^2[(\gamma+1)\varphi_0''/2 - \varphi_0'] = 0. \tag{10}$$

Если в (10) $\varphi_0' = 0$, то имеем для потенциала обычный степенной ряд, сходимость которого в окрестности оси доказана в классической работе Л. В. Овсянникова [1]. Если же в (10) $\varphi_0' \neq 0$, то из равенства нулю второго сомножителя следует

$$\varphi_0' = \mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)}\,\tilde\alpha(z), \\ \varphi_0(\rho, z) = \alpha(z)\,\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} + \beta(z) = \alpha(z) r^{2/(\gamma+1)} + \beta(z). \tag{11}$$

Таким образом, порядок нулевого приближения в (7) зависит от показателя адиабаты γ:

$$\varphi_0 = \alpha(z) r^{3/4} + \beta(z) \qquad \text{при} \quad \gamma = 5/3; \tag{12}$$

$$\varphi_0 = \alpha(z) r^{5/6} + \beta(z) \qquad \text{при} \quad \gamma = 7/5; \tag{13}$$

$$\varphi_0 = \alpha(z)\sqrt{r} + \beta(z) \qquad \text{при} \quad \gamma = 3, \tag{14}$$

причем во всех случаях при $\gamma > 1$ и $\alpha(z) = 0$ значение скорости газа на оси симметрии $r = 0$ совпадает с β'.

Собирая при $n > 0$ формально члены при r^n, после подстановки ряда (6), (7) в (9) получим n-е уравнение системы уравнений на коэффициенты ряда

$$2\varphi_0'\varphi_n\Big[\frac{\gamma+1}{2}\,\varphi_0'' - \varphi_0'\Big] + (\varphi_0')^2\Big[\frac{\gamma+1}{2}\,(n(n-1)\varphi_n + 2n\varphi_n' + \varphi_n'') + \\ + \frac{\gamma-1}{2}\,n\varphi_n - \varphi_n'\Big] = F_n(z, \rho), \tag{15}$$

где

$$F_n(z,\rho) = -\sum_{\substack{k+l+m=n\\ 0\leqslant k,l,m<n}} (k\varphi_k+\varphi_k')(l\varphi_l+\varphi_l')\times$$

$$\times\Big[\frac{\gamma+1}{2}\,(m(m-1)\varphi_m+2m\varphi_m'+\varphi_m'')+\frac{\gamma-1}{2}\,m\varphi_m-\varphi_m'\Big]+$$

$$+(\gamma-1)K[p^2\varphi_p+2p\varphi_p'+\varphi_p'']-\frac{\gamma-1}{2}\sum_{k+l+m=p}\dot\varphi_k\dot\varphi_l[m^2\varphi_m+2m\varphi_m'+\varphi_m'']-$$

$$-2\sum_{k+l+m=p}\dot\varphi_k(l\varphi_l+\varphi_l')(m\dot\varphi_m+\dot\varphi_m')+(\gamma-1)K\ddot\varphi_{n-4}-$$

$$-\sum_{k+l+m=p}\ddot\varphi_k\Big[\frac{\gamma+1}{2}\,\dot\varphi_{l-1}\dot\varphi_{m-1}+\frac{\gamma-1}{2}\,(l\varphi_l+\varphi_l')(m\varphi_m+\varphi_m')\Big]. \qquad (16)$$

Здесь $p=n-2$ и точка над символом обозначает производную по z.

Уравнение (15) можно переписать в виде

$$F_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})=\frac{\gamma+1}{2}\,(\varphi_0')^2\Big[\varphi_n''+\Big(2n-\frac{2}{\gamma+1}\Big)\varphi_n'+n\Big(n-\frac{2}{\gamma+1}\Big)\varphi_n\Big]. \qquad (17)$$

Следовательно, при $\varphi_0'\neq 0$

$$\varphi_n=\frac{\gamma+1}{2}\ \mathrm{e}^{-n\rho}\int \mathrm{e}^{n\rho}\,G_n(\rho,z)\,d\rho-\frac{\gamma+1}{2}\ \mathrm{e}^{-(n-2/(\gamma+1))\rho}\int \mathrm{e}^{(n-2/(\gamma+1))\rho}\,G_n(\rho,z)\,d\rho, \qquad (18)$$

где

$$G_n(\rho,z)=\frac{2}{\gamma+1}\,(\varphi_0')^{-2}F_n(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})=\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-4\rho/(\gamma+1)}}{\alpha^2(z)}\,F_n(\rho,z). \qquad (19)$$

Из (11), (15), (18), (19) окончательно имеем для решения φ_n уравнения (17) выражение

$$\varphi_n(\rho,z)=\frac{(\gamma+1)^2}{4\alpha^2(z)}\Big[\,\mathrm{e}^{-n\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}F_n(\tau,z)\,\mathrm{e}^{(n-4/(\gamma+1))\tau}\ d\tau-$$

$$-\,\mathrm{e}^{-(n-2/(\gamma+1))\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}F_n(\tau,z)\,\mathrm{e}^{(n-6/(\gamma+1))\tau}\ d\tau\Big] \qquad (20)$$

без появления несущественных констант интегрирования и со сходимостью обоих интегралов. Это можно объяснить следующим образом: если в каждом φ_n выделить произвольную константу

$$C_n(z)\,\mathrm{e}^{-n\rho}-C_n(z)\,\mathrm{e}^{-(n-2/(\gamma+1))\rho}=C_n(z)\,\mathrm{e}^{-n\rho}(1-\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)}),$$

то в решении появится произвольное слагаемое в виде ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z)\,\mathrm{e}^{-n\rho}(1-\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)})r^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z)r^{-n}(1-\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)})r^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z)(1-\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)})=(1-\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)})C(z).$$

Данное обстоятельство можно рассматривать как добавление к φ_0 произвольной функции $(1 - \mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)})C(z)$, которую можно считать несущественной, поскольку слагаемое $C(z)$ включено в функцию $\beta(z)$, а $(-1)\,\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)}\,C(z)$ — в функцию $\alpha(z)$.

Структура коэффициентов. С помощью формул (15), (16), (20) можно уточнить теперь порядки слагаемых ряда (7). А именно: по индукции с учетом (11) получаем, что при $0 \leqslant k < n$ максимальная степень r, входящего в φ_k, φ'_k, φ''_k, которая также является показателем ρ в экспоненте, равна γ_k. Учитывая (16), (20), можно считать γ_k арифметической прогрессией, $\gamma_k = k\delta + 2/(\gamma+1)$. Тогда, рекуррентно оценивая, получим, что максимальная степень r, входящего в φ_n, равна $\gamma_n = n\delta + 2/(\gamma+1)$. Причем на величину δ никаких ограничений не накладывается, поэтому с учетом (15), (20) можно положить $\delta = 2\gamma_0$. Последовательно анализируя коэффициенты (7), (15), можно утверждать, что $\varphi_n = 0$ для нечетных n, и ряд (6), (7) выписывается в конкретной форме для четных n:

$$\varphi(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sum_{k=-1}^{l} \lambda_{n,k}(z)\,\mathrm{e}^{-k\delta\rho},$$

где

$$l = \begin{cases} n-1 & \text{при} \quad n \geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad n = 0, \end{cases} \qquad \delta = \frac{2}{\gamma+1}, \tag{21}$$

или

$$\varphi_n = \lambda_{n,-1}(z)\,\mathrm{e}^{\delta\rho} + \lambda_{n,0}(z)\,\mathrm{e}^{0\cdot\delta\rho} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,k}(z)\,\mathrm{e}^{-k\delta\rho}.$$

При последовательном вычислении коэффициентов $\varphi_n(z,\rho)$ по (16) и (20) громоздкость формул резко возрастает с увеличением n:

$$n = 0, \qquad \varphi_0(\rho,z) = \alpha(z)\,\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} + \beta(z); \tag{22}$$

$$n = 1, \qquad F_1 = \frac{\gamma+1}{2}(\varphi'_0)^2\Big[\varphi''_1 + \Big(2 - \frac{2}{\gamma+1}\Big)\varphi'_1 + \Big(1 - \frac{2}{\gamma+1}\Big)\varphi_1\Big] = 0.$$

Чтобы не появились новые экспоненты, положим

$$\varphi_1 = 0. \tag{23}$$

Преобразовав выражение (16), можно записать

$$F_n(z,\rho) = -\sum_{\substack{k+l+m=n \\ 0\leqslant k,l,m<n}} (k\varphi_k + \varphi'_k)(l\varphi_l + \varphi'_l)\,\frac{\gamma+1}{2}\,(\varphi''_m + (2m-\delta)\varphi'_m + m(m-\delta)\varphi_m) +$$

$$+(\gamma-1)K[p^2\varphi_p + 2p\varphi'_p + \varphi''_p] - \frac{\gamma-1}{2}\sum_{k+l+m=p} \dot\varphi_k\dot\varphi_l[m^2\varphi_m + 2m\varphi'_m + \varphi''_m] -$$

$$-\,2\sum_{k+l+m=p} \dot\varphi_k(l\varphi_l + \varphi'_l)(m\dot\varphi_m + \dot\varphi'_m) + (\gamma-1)K\ddot\varphi_{n-4} -$$

$$-\sum_{k+l+m=p} \ddot\varphi_k\Big[\frac{\gamma+1}{2}\,\dot\varphi_{l-1}\dot\varphi_{m-1} + \frac{\gamma-1}{2}\,(l\varphi_l + \varphi'_l)(m\varphi_m + \varphi'_m)\Big].$$

Тогда при $n = 2$

$$F_2 = (\gamma-1)K(\varphi_0'') - \frac{\gamma-1}{2}\,\dot\varphi_0\dot\varphi_0\varphi_0'' - 2\dot\varphi_0\varphi_0'\dot\varphi_0{}' - \ddot\varphi_0\,\frac{\gamma-1}{2}(\varphi_0')^2 =$$

$$= (\gamma-1)K\alpha\Big(\frac{2}{\gamma+1}\Big)^2 \mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} - \frac{\gamma-1}{2}\,\alpha\Big(\frac{2}{\gamma+1}\Big)^2 \mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)}[\dot\alpha\,\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} + \dot\beta]^2 -$$

$$- 2\dot\alpha\,\frac{2}{\gamma+1}\;\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)}\;\frac{2}{\gamma+1}\,\alpha\,\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)}[\dot\alpha\,\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} + \dot\beta] -$$

$$- [\ddot\alpha\,\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} + \ddot\beta]\frac{\gamma-1}{2}\,\alpha^2\Big(\frac{2}{\gamma+1}\Big)^2 \mathrm{e}^{4\rho/(\gamma+1)} =$$

$$= \frac{4K(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha\,\mathrm{e}^{\delta\rho} - \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha[(\dot\beta)^2\,\mathrm{e}^{\delta\rho} + 2\dot\alpha\dot\beta\,\mathrm{e}^{2\delta\rho} + (\dot\alpha)^2\,\mathrm{e}^{3\delta\rho}] -$$

$$- \frac{8}{(\gamma+1)^2}\,\alpha\dot\alpha\dot\beta\,\mathrm{e}^{2\delta\rho} - \frac{8}{(\gamma+1)^2}\,\alpha(\dot\alpha)^2\,\mathrm{e}^{3\delta\rho} - \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha^2[\ddot\beta\,\mathrm{e}^{2\delta\rho} + \ddot\alpha\,\mathrm{e}^{3\delta\rho}] =$$

$$= \Big[\frac{4K(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha - \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha(\dot\beta)^2\Big]\,\mathrm{e}^{\delta\rho} -$$

$$- \Big[\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha\dot\alpha\dot\beta + \frac{8}{(\gamma+1)^2}\,\alpha\dot\alpha\dot\beta + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha^2\ddot\beta\Big]\,\mathrm{e}^{2\delta\rho} -$$

$$- \Big[\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha(\dot\alpha)^2 + \frac{8}{(\gamma+1)^2}\,\alpha(\dot\alpha)^2 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\alpha^2\ddot\alpha\Big]\,\mathrm{e}^{3\delta\rho} =$$

$$= \frac{2}{\gamma+1}\Big(\Big[\frac{2K(\gamma-1)}{(\gamma+1)}\,\alpha - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha(\dot\beta)^2\Big]\,\mathrm{e}^{\delta\rho} - \Big[\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\,\alpha\dot\alpha\dot\beta + \frac{4}{\gamma+1}\,\alpha\dot\alpha\dot\beta + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha^2\ddot\beta\Big]\,\mathrm{e}^{2\delta\rho} -$$

$$- \Big[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha(\dot\alpha)^2 + \frac{4}{\gamma+1}\,\alpha(\dot\alpha)^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha^2\ddot\alpha\Big]\,\mathrm{e}^{3\delta\rho}\Big) =$$

$$= \frac{2}{\gamma+1}\,[F_{21}\,\mathrm{e}^{\delta\rho} + F_{22}\,\mathrm{e}^{2\delta\rho} + F_{23}\,\mathrm{e}^{3\delta\rho}],$$

где

$$F_{21} = \frac{2K(\gamma-1)}{\gamma+1}\,\alpha - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha(\dot\beta)^2;$$

$$F_{22} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\,\alpha\dot\alpha\dot\beta + \frac{4}{\gamma+1}\,\alpha\dot\alpha\dot\beta + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha^2\ddot\beta;$$

$$F_{23} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha(\dot\alpha)^2 + \frac{4}{\gamma+1}\,\alpha(\dot\alpha)^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\alpha^2\ddot\alpha.$$

Тогда с учетом формулы (20) получим

$$\varphi_2 = \frac{\gamma+1}{2\alpha^2}\Big(\,\mathrm{e}^{-2\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}[F_{21}\,\mathrm{e}^{(2-\delta)\rho} + F_{22}\,\mathrm{e}^{2\rho} + F_{23}\,\mathrm{e}^{(2+\delta)\rho}]\,d\rho -$$

$$- \mathrm{e}^{-(2-\delta)\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}[F_{21}\,\mathrm{e}^{(2-2\delta)\rho} + F_{22}\,\mathrm{e}^{(2-\delta)\rho} + F_{23}\,\mathrm{e}^{2\rho}]\,d\rho\Big) =$$

$$= \frac{\gamma+1}{2\alpha^2}\Big(\Big[\frac{F_{21}}{2-\delta}\ \mathrm{e}^{-\delta\rho}+\frac{F_{22}}{2}\ \mathrm{e}^{0\rho}+\frac{F_{23}}{2+\delta}\ \mathrm{e}^{\delta\rho}\Big]-\Big[\frac{F_{21}}{2(1-\delta)}\ \mathrm{e}^{-\delta\rho}+\frac{F_{22}}{2-\delta}\ \mathrm{e}^{0\rho}+\frac{F_{23}}{2}\ \mathrm{e}^{\delta\rho}\Big]\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2}\Big(\frac{F_{21}\,\mathrm{e}^{-\delta\rho}}{(\delta-2)(\delta-1)}+\frac{F_{22}\,\mathrm{e}^{0\rho}}{\delta-2}-\frac{F_{23}\,\mathrm{e}^{\delta\rho}}{\delta+2}\Big).$$

Сходимость логарифмического ряда. Пусть функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$ аналитичны в окрестности точки $z = z_0$. Докажем сходимость ряда (7) при малых r в этой окрестности.

В силу аналитичности функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$ существуют такие положительные константы M, R, что для любого $t \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$\Big|\frac{\partial^t\alpha(z)}{t!\,\partial z^t}\Big|_{z=z_0} \leqslant \frac{M'}{R^t}, \qquad \Big|\frac{\partial^t\beta(z)}{t!\,\partial z^t}\Big|_{z=z_0} \leqslant \frac{M'}{R^t}, \qquad \Big|\frac{\partial^{t-q}\alpha^{-2}(z)}{(t-q)!\,\partial z^{t-q}}\Big|_{z=z_0} \leqslant \frac{M''}{R^t}. \tag{24}$$

Положим $M = \max(M', 2M', M'')$.

Рассмотрим мажорирующий ряд для φ_n, в котором коэффициенты перед экспонентами взяты по модулю:

$$\chi_n = \sum_{k=-1}^{l} |\lambda_{n,k}|\,\mathrm{e}^{-k\delta\rho},$$

где

$$l = \begin{cases} n-1 & \text{при} \quad n \geqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad n = 0, \end{cases} \qquad \delta = \frac{2}{\gamma+1}.$$

Очевидно, что

$$|\varphi_n| \leqslant \chi_n. \tag{25}$$

Положим при $n = 0$

$$\chi_0^{[t]} = \sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho} \frac{\partial^t\chi_n(z_0,\tau)}{t!\,\partial z^t}.$$

Тогда по (22)

$$\frac{\partial^t\chi_0}{\partial z^t} = \frac{\partial^t\alpha(z)}{\partial z^t}\ \mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} + \frac{\partial^t\beta(z)}{\partial z^t}.$$

С учетом (24) оценим $\chi_0^{[t]}$:

$$\begin{gathered} \chi_0^{[t]} = \sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho}\Big(\frac{\partial^t\alpha(z)}{t!\,\partial z^t}\ \mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)} + \frac{\partial^t\beta(z)}{t!\,\partial z^t}\Big), \\ \chi_0^{[t]} \leqslant \frac{M'}{R^t}\sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho}(\mathrm{e}^{2\rho/(\gamma+1)}+1) \leqslant \frac{2M'}{R^t} \leqslant \frac{M}{R^t}. \end{gathered} \tag{26}$$

Положим при $n > 0$

$$\chi_n^{[t]}(\rho) = \sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho}\Big(\frac{\partial^t\chi_n(z_0,\tau)}{t!\,\partial z^t}\ \mathrm{e}^{(an+b)\tau}\Big). \tag{27}$$

Так как $\varphi_n(z,\rho)$ — сумма степеней экспонент, верхний предел в (27) существует.

По (20) имеем

$$\frac{\partial^t\varphi_n}{\partial z^t}=\frac{(\gamma+1)^2}{4}\Big(\mathrm{e}^{-n\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}\mathrm{e}^{(n-4/(\gamma+1))\tau}\sum_{q=0}^{t}C_t^q\,\frac{\partial^qF_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\,\frac{\partial^{t-q}}{\partial z^{t-q}}\,\alpha^{-2}(z)\,d\tau-$$

$$-\,\mathrm{e}^{-(n-2/(\gamma+1))\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}\mathrm{e}^{(n-6/(\gamma+1))\tau}\sum_{q=0}^{t}C_t^q\frac{\partial^qF_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\,\frac{\partial^{t-q}}{\partial z^{t-q}}\,\alpha^{-2}(z)\,d\tau\Big).\qquad(28)$$

Из (28) следует, что

$$\frac{\partial^t\varphi_n(z_0,\rho)}{t!\,\partial z^t}\,\mathrm{e}^{(an+b)\rho}=\frac{(\gamma+1)^2}{4}\Big(\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b]\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}\mathrm{e}^{[n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b]\tau}\times$$

$$\times\sum_{q=0}^{t}C_t^q\,\mathrm{e}^{(an+3b)\tau}\,\frac{\partial^qF_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\,\frac{\partial^{t-q}}{\partial z^{t-q}}\,\alpha^{-2}(z)\,d\tau-$$

$$-\,\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b-2/(\gamma+1)]\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}\mathrm{e}^{[n(1-a)-6/(\gamma+1)-3b]\tau}\sum_{q=0}^{t}C_t^q\,\mathrm{e}^{(an+3b)\tau}\,\frac{\partial^qF_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\,\frac{\partial^{t-q}}{\partial z^{t-q}}\,\alpha^{-2}(z)\,d\tau\Big)=$$

$$=\frac{(\gamma+1)^2}{4}\int\limits_{-\infty}^{\rho}(\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b]\rho+[n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b]\tau}-\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b-2/(\gamma+1)]\rho+[n(1-a)-6/(\gamma+1)-2b]\tau})\times$$

$$\times\sum_{q=0}^{t}C_t^q\,\mathrm{e}^{(an+3b)\tau}\,\frac{\partial^qF_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\,\frac{\partial^{t-q}}{\partial z^{t-q}}\,\alpha^{-2}(z)\,d\tau.$$

Оценивая последнее равенство с учетом (24), (27), покомпонентно можно перейти к неравенству, где X_n получается подстановкой χ_n в F_n вместо соответствующих φ_n:

$$\frac{\partial^t\chi_n(z_0,\rho)}{t!\partial z^t}\,\mathrm{e}^{(an+b)\rho}\leqslant\frac{(\gamma+1)^2}{4}\,\frac{M}{R^{t-q}}\sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho}\Big(\sum_{q=0}^{t}\frac{\mathrm{e}^{(an+3b)\tau}}{q!}\,\frac{\partial^qX_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\Big)\times$$

$$\times\Big(\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b]\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}\mathrm{e}^{[n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b]\tau}\,d\tau-\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b-2/(\gamma+1)]\rho}\int\limits_{-\infty}^{\rho}\mathrm{e}^{[n(1-a)-6/(\gamma+1)-3b]\tau}\,d\tau\Big).$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{\partial^t\chi_n(z_0,\rho)}{t!\,\partial z^t}\,\mathrm{e}^{(an+b)\rho}\leqslant\frac{(\gamma+1)^2}{4}\,\frac{M}{R^{t-q}}\sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho}\Big(\sum_{q=0}^{t}\frac{\mathrm{e}^{(an+3b)\tau}}{q!}\,\frac{\partial^qX_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b]\rho}}{n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b}\,\mathrm{e}^{[n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b]\tau}\,\Big|_{-\infty}^{\rho}-$$

$$-\,\frac{\mathrm{e}^{-[n(1-a)-b-2/(\gamma+1)]\rho}}{n(1-a)-6/(\gamma+1)-3b}\,\mathrm{e}^{[n(1-a)-6/(\gamma+1)-3b]\tau}\,\Big|_{-\infty}^{\rho}\Big)=$$

$$= \frac{(\gamma+1)^2}{4}\,\frac{M}{R^{t-q}}\,\mathrm{e}^{-(4/(\gamma+1)+2b)\rho}\,\frac{2}{\gamma+1}\,\times$$

$$\times\frac{1}{[n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b][n(1-a)-6/(\gamma+1)-3b]}\sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho}\Big(\sum_{q=0}^{t}\frac{\mathrm{e}^{(an+3b)\tau}}{q!}\,\frac{\partial^q X_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\Big).$$

Возьмем в обеих частях последнего неравенства, пользуясь монотонностью правой части, верхний предел по $\rho \leqslant \rho_0 \leqslant 0$ и запишем его:

$$\chi_n^{[t]}(\rho_0) \leqslant \frac{(\gamma+1)M}{2R^{t-q}}\,\frac{1}{[n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b][n(1-a)-6/(\gamma+1)-3b]}\,\times$$
$$\times\sup_{-\infty<\tau\leqslant\rho}\Big(\sum_{q=0}^{t}\frac{\mathrm{e}^{(an+3b)\tau}}{q!}\,\frac{\partial^q X_n(z_0,\tau)}{\partial z^q}\Big). \qquad (29)$$

Из вида зависимости $\chi_n(\rho)$ следует справедливость оценки

$$|\chi_n'(\rho)| \leqslant n|\chi_n|,$$

так как $2(n-1)/(\gamma+1) \leqslant n$, откуда имеем, что соотношение $(n(1-\gamma)-2)/(\gamma+1) \leqslant 0$ справедливо для любого $n \geqslant 0$ при $\gamma > 1$.

Используя определение $F_n(z,\rho)$ и дифференцируя по правилу Лейбница, перепишем (29) в виде

$$\chi_n^{[t]}(\rho_0) \leqslant \frac{(\gamma+1)M}{2R^{t-q}}\,\frac{1}{[n(1-a)-4/(\gamma+1)-3b][n(1-a)-6/(\gamma+1)-3b]}\,\times$$
$$\times\Big(8\sum_{k+l+m=n}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{i}k\chi_k^{[j]}l\chi_l^{[i-j]}m^2\chi_m^{[q-i]} + 4(\gamma-1)Kp^2\chi_p^{[q]} +$$
$$+ 2(\gamma-1)\sum_{k+l+m=p}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{i}(j+1)\chi_k^{[j+1]}(i-j+1)\chi_l^{[i-j+1]}m^2\chi_m^{[q-i]} +$$
$$+ 8\sum_{k+l+m=p}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{i}(j+1)\chi_k^{[j+1]}l\chi_l^{[i-j]}m(q-i+1)\chi_m^{[q-i+1]} + (\gamma-1)K(q+1)(q+2)\chi_{n-4}^{[q+2]} +$$
$$+ \frac{\gamma+1}{2}\sum_{k+l+m=p}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{i}(j+2)(j+1)\chi_k^{[j+2]}(i-j+1)\chi_{l-1}^{[i-j+1]}(q-i+1)\chi_{m-1}^{[q-i+1]} +$$
$$+ 2(\gamma-1)\sum_{k+l+m=p}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{i}(j+2)(j+1)\chi_k^{[j+2]}l\chi_l^{[i-j]}m\chi_m^{[q-i]}\Big). \qquad (30)$$

Переход от (29) к (30) обоснован оценкой параметров a и b. Ввиду изложенного выше числа a и b должны удовлетворять следующим условиям:

$$b < -\frac{2}{\gamma+1}, \quad 0 < a < 1 - \frac{6}{\gamma+1} - 3b, \quad 0 < a < 1 - \frac{4}{\gamma+1} - 3b,$$

$$a + b > 0, \quad 2a + b > 0, \quad 1 - \frac{4}{\gamma+1} - 3b > 0, \quad 1 - \frac{6}{\gamma+1} - 3b > 0.$$

Преобразуем эту систему:

$$b < -\frac{2}{\gamma+1}, \quad 0 < a < 1 - \frac{6}{\gamma+1} - 3b, \quad a + b > 0, \quad 1 - \frac{6}{\gamma+1} - 3b > 0.$$

Для ее решения положим $b = -2c/(\gamma+1)$, где $c > 1$, и оценим неравенство:

$$0 < a < 1 - \frac{6}{\gamma+1} - 3b \quad \Rightarrow \quad 0 < a < 1 - \frac{6}{\gamma+1} + \frac{3 \cdot 2c}{\gamma+1} = \frac{6c-5+\gamma}{\gamma+1} = a_{\max}.$$

Отсюда следует, что $(6c-5+\gamma)/(\gamma+1) > 0$ при $c > 1$ и $\gamma > 1$, т. е. данное неравенство выполнено. Проверим выполнение неравенства

$$a > -b \quad \Rightarrow \quad a_{\max} > -b \quad \Rightarrow \quad \frac{6c-5+\gamma}{\gamma+1} > \frac{4c}{\gamma+1}.$$

Таким образом, неравенство выполнено при $c > 1$ и $\gamma > 1$.

Итак, можно заключить, что для любого $b \in (-\infty; -2/(\gamma+1))$ найдется $a \in (2c/(\gamma+1); (\gamma-5)/(\gamma+1) - 2b)$ такое, что система имеет решение.

Определим $\psi_n^{[t]}$ следующей рекурсией:

$$\psi_0^{[t]} = M/R^t \geqslant \chi_0^{[t]}, \qquad \psi_1^{[t]} = 0,$$

$$\begin{aligned}\psi_n^{[t]} = \frac{(\gamma+1)M}{2R^{t-q}}\,\frac{A}{n(n-1)}\Big(8 \sum_{k+l+m=n} \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{i} k\psi_k^{[j]} l\psi_l^{[i-j]} m^2 \psi_m^{[q-i]} + 4(\gamma-1)Kp^2\psi_p^{[q]} +{}\\
+ 2(\gamma-1) \sum_{k+l+m=p} \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{i} (j+1)\psi_k^{[j+1]}(i-j+1)\psi_l^{[i-j+1]} m^2 \psi_m^{[q-i]} +{}\\
+ 8 \sum_{k+l+m=p} \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{i} (j+1)\psi_k^{[j+1]} l\psi_l^{[i-j]} m(q-i+1)\psi_m^{[q-i+1]} + (\gamma-1)K(q+1)(q+2)\psi_{n-4}^{[q+2]} +{}\\
+ \frac{\gamma+1}{2} \sum_{k+l+m=p} \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{i} (j+2)(j+1)\psi_k^{[j+2]}(i-j+1)\psi_{l-1}^{[i-j+1]}(q-i+1)\psi_{m-1}^{[q-i+1]} +{}\\
+ 2(\gamma-1) \sum_{k+l+m=p} \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{i} (j+2)(j+1)\psi_k^{[j+2]} l\psi_l^{[i-j]} m\psi_m^{[q-i]}\Big).\end{aligned} \tag{31}$$

Положительное число A существует, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{(n(1-a) - 4/(\gamma+1) - 3b)(n(1-a) - 6/(\gamma+1) - 3b)} = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Сравнивая (31) с неравенствами (27), (30), а также учитывая равенство $\chi_1^{[t]} = 0$, получаем

$$\chi_n^{[t]}(\rho_0) \leqslant \psi_n^{[t]},$$

для любых n при $t \geqslant 0$, $\rho_0 \leqslant 0$, так как $\psi_n^{[t]} \geqslant 0$. Учитывая (25), заключаем, что

$$\varphi_n^{[t]}(\rho_0) \leqslant \psi_n^{[t]}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(z,y)=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^{[t]}(z-z_0)^t y^n.$$

По (31) она является решением уравнения

$$y^2\Psi_{yy}=[(\gamma+1)MA/(2R^{t-q})][8y^2\Psi_y^2(y^2\Psi_{yy}+y\Psi_y)+ \\ +4(\gamma-1)Ky^2(y^2\Psi_{yy}+y\Psi_y)+2(\gamma-1)y^2\Psi_z^2(y^2\Psi_{yy}+y\Psi_y)+8y^2\Psi_z y\Psi_y+ \\ +K(\gamma-1)y^4\Psi_{zz}+(\gamma+1)y^2\Psi_{zz}y^2\Psi_z^2/2+2(\gamma-1)y^2\Psi_{zz}y^2\Psi_y^2].$$

Данное равенство, сократив на y^2 и выразив явно Ψ_{yy}, можно свести к уравнению типа соотношения Ковалевской

$$\Psi_{yy}=\frac{B(8y\Psi_y^3+y\Psi_y+2(\gamma-1)\Psi_z^2 y\Psi_y+8\Psi_z y\Psi_y y\Psi_{yz})}{1-B(8y^2\Psi_y^2+4(\gamma-1)Ky^2+2(\gamma-1)y^2\Psi_z^2)}+ \\ +\frac{B(K(\gamma-1)y^2\Psi_{zz}+\frac{\gamma+1}{2}\Psi_{zz}\Psi_z^2+2(\gamma-1)\Psi_{zz}y^2\Psi_y^2)}{1-B(8y^2\Psi_y^2+4(\gamma-1)Ky^2+2(\gamma-1)\Psi_z^2 y^2)}, \qquad (32)$$

где $B=(\gamma+1)MA/(2R^{t-q})$, с аналитическими данными Коши на прямой $y=0$ (по (31))

$$\Psi(z,0)=\frac{MR}{R-(z-z_0)}=\sum_{t=0}^{\infty}\psi_0^{[t]}z^t; \qquad \Psi_y(z,0)=0. \qquad (33)$$

По теореме Ковалевской функция $\Psi(z,y)$ из (32), (33) аналитична в некоторой окрестности точки $z=z_0$, $y=0$, а так как ее коэффициенты $\psi_n^{[t]}$ мажорируют $\varphi_n^{[t]}$, то и ряд

$$\varphi(z,y)=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n^{[t]}(z-z_0)^t y^n \qquad (34)$$

также сходится в той же окрестности.

Из (7) при $\rho=\ln r$ имеем

$$r^b\varphi(z,r,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\mathrm{e}^{(an+b)\rho}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial^t\varphi_n(z_0,\rho)}{t!\,\partial z^t}\,(z-z_0)^t\Big]r^{n(1-a)}. \qquad (35)$$

Из (26), (27), (35) следует, что ряд (7) сходится в области сходимости ряда (34), где $y=\sqrt[1-a]{r}$, $r\leqslant \mathrm{e}^{\rho_0}\leqslant 1$. Таким образом, доказана

Теорема. *Обобщенная задача Коши для уравнения* (4) *с обобщенными начальными данными* (11) *имеет решение для любых аналитических в окрестности точки* $z=z_0$ *функций* $\alpha(z)$, $\beta(z)$ *в виде ряда* (7) *с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами по формулам* (11), (16), (20) *для всех достаточно малых положительных* r *и представляет в этой окрестности аналитическую функцию по переменным* z, r.

Физический смысл. В отличие от [1], где рассматривается обычное сопло, на оси симметрии $r=0$ в течениях имеются особенности, физический смысл которых требует дополнительного изучения. При выборе точки $z=z_0$, лежащей на линии перехода через скорость звука, мы получаем возможность построения аналитического решения и в сверхзвуковой, и в дозвуковой областях. Построенные ряды могут быть применены также для решения обратной задачи внешнего обтекания осесимметричных тел: точка z_0 выбирается внутри или на поверхности обтекаемого тела и если область сходимости ряда оказывается достаточно большой, то рассчитывается скорость газа и в области течения, при этом форма обтекаемого тела соответствует одной из линий тока. Этот процесс аналогичен замене обтекаемого тела распределением особенностей источников на оси. Рассмотренная методика может быть применена и для решения нестационарного уравнения потенциала.

Авторы благодарны Л. В. Овсянникову, В. М. Тешукову, А. Н. Крайко за внимание к работе, постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** О сходимости ряда Мейера для осесимметричного сопла. Дополнение 1 // Мартесен Е., фон Зенгбуш Р. Расчет околозвуковой части плоских и осесимметричных сопел с криволинейной линией перехода. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. С. 41–43.
2. **Тешуков В. М.** Пространственная задача о распространении контактного разрыва в идеальном газе // Динамика сплошной среды. 1977. Вып. 32. С. 82–94.
3. **Тешуков В. М.** Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды. 1978. Вып. 33. С. 114–133.
4. **Тешуков В. М.** Центрированные волны в пространственных течениях газа // Динамика сплошной среды. 1979. Вып. 39. С. 102–118.
5. **Тешуков В.М.** Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // ПМТФ. 1980. № 2. С. 126–133.
6. **Тешуков В. М.** Пространственный аналог центрированных волн Римана и Прандтля — Майера // ПМТФ. 1982. № 4. С. 98–106.
7. **Сидоров А. Ф.** Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
8. **Баутин С. П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003.
9. **Титов С. С.** Об околозвуковом обтекании газом тонких тел вращения // Аналитические методы механики сплошной среды. Свердловск: Ин-т мат. и механики УНЦ АН СССР, 1979. Вып. 33. С. 65–72.
10. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
11. **Титов С. С.** Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств. Екатеринбург, 1999 (Препр. / УралГАХА; № 1).

Поступила в редакцию 13/V 2004 г.,
в окончательном варианте — 13/III 2005 г.