

УДК 539.4:537.6

КВАЗИПОПЕРЕЧНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Н. И. Гвоздовская, А. Г. Куликовский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 117526 Москва

Изучается структура квазипоперечных ударных волн малой амплитуды в слабоанизотропной упругой среде, обладающей внутренним строением, которое порождает дисперсию волн. Наличие дисперсии моделируется введением в уравнения теории упругости членов с высшими производными, а диссипация представлена вязкими членами. Требование существования структуры разрывов приводит в одном из двух рассмотренных ниже возможных случаев к множеству допустимых разрывов, имеющему сложное строение. Значительная часть ударной адиабаты состоит из множества коротких отрезков и отдельных точек, число которых растет с уменьшением вязкости. Такое сложное множество допустимых разрывов является случаем общего положения при наличии достаточно сильной дисперсии в структуре ударных волн.

Основные уравнения. Рассмотрим нелинейные квазипоперечные волны в упругой среде, имеющей внутреннюю структуру (например, в композите). По сравнению с обычным упругим телом, движения которого описываются гиперболической системой уравнений, наличие внутренней структуры и соответствующих внутренних геометрических масштабов приводит к появлению в системе уравнений дополнительных членов с производными более высокого порядка, которые обеспечивают дисперсию волн [1].

Для описания влияния диссипативных процессов в уравнения движения вводятся члены, описывающие силы вязкости. Для явлений крупного масштаба эти дополнительные дисперсионные и вязкие члены оказываются малыми и описание волн может производиться на основе уравнений теории упругости. Однако эти дополнительные члены (см. ниже) могут играть важную роль при описании структуры разрывов, выделении множества допустимых разрывов и, следовательно, при построении решений задач.

Как и в [2, 3], примем следующие предположения:

- а) все величины зависят от времени t и одной декартовой координаты x_3 (индекс 3 в дальнейшем опускается);
- б) нелинейность мала;
- в) анизотропия в плоскости волны (волновая анизотропия) мала.

Выпишем уравнения теории упругости для квазипоперечных волн без дисперсионных и вязких членов с учетом того, что сделанные предположения позволяют для квазипоперечных волн исключить из системы уравнений продольные движения. При этом система уравнений, а также соотношения на разрывах записываются в виде уравнений движения некоторой эквивалентной несжимаемой среды

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$\rho_0 W[v_i] + \left[\frac{\partial H}{\partial u_i} \right] = 0, \quad [v_i] + W[u_i] = 0, \quad (2)$$

$$H = \frac{1}{2}f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4}\varkappa(u_1^2 + u_2^2)^2.$$

Здесь $u_i = \partial w_i / \partial x$ (w_i — перемещение среды в направлении декартовой оси x_i , ортогональной оси x); W — скорость разрыва; постоянные $g > 0$ и $\varkappa$ характеризуют соответственно анизотропию и нелинейность, причем члены в уравнениях (1), (2), содержащие эти величины, считаются малыми по сравнению с остальными членами, соответствующими линейной изотропной среде; квадратные скобки в (2) означают скачок заключенной в них величины: разность значений за и перед разрывом.

Уравнения (1) с условиями на разрыве (2) представляют гиперболическую модель для описания крупномасштабных явлений.

Переходя к полной системе уравнений, учитывающей дисперсию и диссипацию, сделаем дополнительное предположение:

г) дисперсионные и вязкие члены малы и в рассматриваемых решениях по порядку величины не превосходят нелинейные члены.

В качестве множителей дисперсионные члены содержат высшие производные от u_i по x , вследствие их предполагаемой малости изменением коэффициентов при них пренебрежем, т. е. будем учитывать эти члены в линейном приближении. Кроме того, ограничимся учетом членов с производными по x не выше третьего порядка, поскольку в рассматриваемых ниже достаточно длинноволновых (по сравнению с внутренним геометрическим масштабом среды) решениях величины производных убывают с увеличением их порядка. Длинноволновой характер (большой пространственный масштаб) изучаемых решений обусловлен предполагаемой малой нелинейностью. Это свойство будет очевидным при изучении задачи о структуре разрывов.

Как следует из [1], дисперсионные члены могут быть представлены добавлением в первую пару уравнений (1) членов с третьими производными от u_i по x либо со вторыми производными, которые могут входить в уравнения движения в виде $b_{ij}u_j''$, где $u_j'' = \partial^2 u_j / \partial x^2$, а b_{ij} — антисимметричная матрица 2×2 (именно такой вид матрицы обеспечивает дисперсию при отсутствии диссипации). Члены $b_{ij}u_j''$ представляют собой компоненты двумерного вектора. Для антисимметричной матрицы b_{ij} этот вектор можно записать в виде $\mathbf{u}'' \times \mathbf{b}$, где $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$, а $\mathbf{b}$ — псевдовектор, направленный по оси x . Отметим, что выражение $\mathbf{u}'' \times \mathbf{b}$ является вектором только тогда, когда $\mathbf{b}$ — псевдовектор.

Таким образом, для присутствия в уравнениях движения дисперсионных членов второго порядка дифференцирования необходимо введение псевдовектора в постановку задачи. Такая ситуация имеет место при распространении нелинейной электромагнитной волны в магнетике [4], когда начальное магнитное поле можно рассматривать как псевдовектор.

В настоящей работе рассматривается случай, когда псевдовекторы отсутствуют в постановке задачи, так что дисперсионные члены представляются членами с производными третьего порядка $m_{ij} \partial^3 u_j / \partial x^3$, $m_{ij} = \text{const}$. Если также пренебречь волновой анизотропией, то можно записать их в виде $m \partial^3 u_i / \partial x^3 = m \partial^4 w_i / \partial x^4$.

Заметим, что члены подобного типа с $m > 0$ должны появиться в левой части уравнений движения, например, в случаях, когда однородная упругая легкодеформирующаяся среда содержит однородно распределенные жесткие стержни, обладающие достаточной жесткостью на изгиб, параллельные оси x или составляющие с ней малый угол.

Кроме того, предположим, что диссипативные процессы представлены вязкими членами $\mu \partial^2 v_i / \partial x^2$, $\mu = \text{const} > 0$, которые в левую часть первой группы уравнений (1) входят со знаком «минус». Вязкие члены предполагаются малыми, и поэтому для их записи выбрана изотропная форма. Таким образом, полную систему уравнений, пригодную

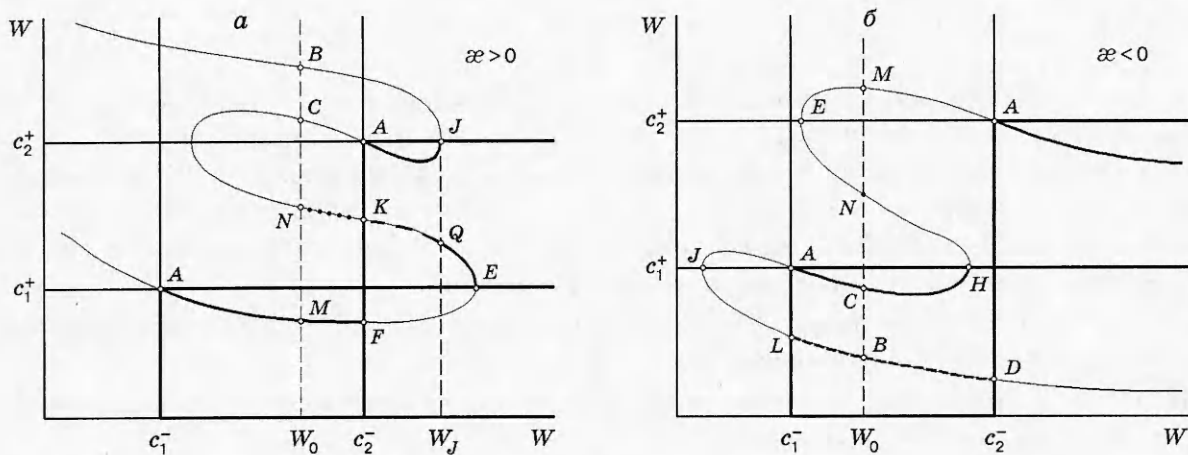


Рис. 1

для описания структуры разрыва, запишем в виде

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} \right) + m \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} - \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Априорная эволюционность. Задача о структуре ударных волн. При $m = 0$, т. е. в случае учета только вязкости без дисперсии, структура ударных волн рассматривалась в [3, 5] и было показано, что всем априорно эволюционным разрывам соответствует структура. Априорно эволюционными будем называть разрывы, которые эволюционны [6] в предположении, что они не должны удовлетворять никаким другим соотношениям, кроме (2). Условия эволюционности записываются в виде системы неравенств между скоростью ударной волны W и скоростями характеристик системы (1) перед разрывом c_1^- , c_2^- и за ним c_1^+ , c_2^+ .

Условия эволюционности представлены на рис. 1, где по осям откладываются значения скорости. Каждой точке на плоскости диаграммы соответствует разрыв, для которого выполняются определенные неравенства для W , $c_{1,2}^-$, $c_{1,2}^+$. Априорно эволюционным разрывам отвечают точки, которые находятся в обведенных жирными линиями прямоугольниках, причем левый нижний прямоугольник соответствует медленным ударным волнам, а правый верхний — быстрым. На диаграмму эволюционности [2; 3] отображена ударная адиабата, построенная по соотношениям (2).

Рассмотрим влияние дисперсии на структуру и множество допустимых разрывов. Найдём ограниченные решения системы (3), зависящие от $\xi = x - Wt$. После однократного интегрирования каждого из первой пары уравнений и исключения v_i система уравнений (3) приобретет вид

$$m u_i'' + \mu W u_i' = - \frac{\partial F}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$F = \frac{1}{2}(\rho_0 W^2 - f)(u_1^2 + u_2^2) - \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2) + \frac{\varepsilon}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 + A_1 u_1 + A_2 u_2,$$

где A_i — постоянные интегрирования, которые могут выбираться из условия, что $\partial F / \partial u_i = 0$ в состоянии перед разрывом $u_i = u_i^-$; штрихами обозначаются производные по ξ .

Уравнения (4) имеют вид уравнений движения материальной точки массы m с трением, пропорциональным скорости, в потенциальном поле сил, задаваемых потенциальной энергией F . Переменная ξ играет роль времени. Этой аналогией воспользуемся ниже для

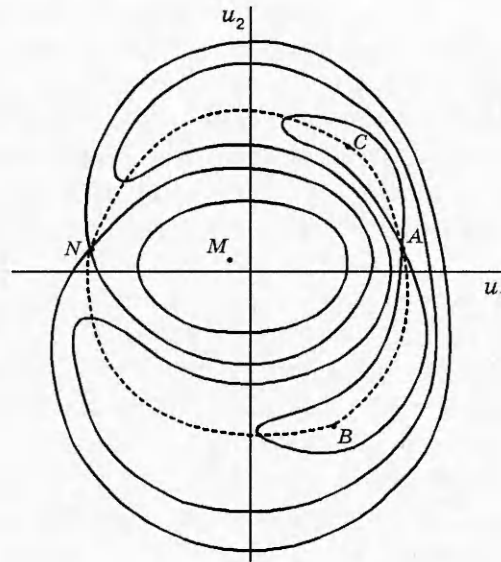


Рис. 2

получения некоторых качественных выводов о структуре и множестве допустимых разрывов. Более полное исследование потребует привлечения численных методов.

Отметим, что W может быть определено из соотношений на разрыве (2) независимо от существования структуры, а значит, от параметров m и μ , ее определяющих.

При заданных функции F и значении W картина интегральных кривых системы (4), а следовательно, существование структуры определяются отношением $\mu/\sqrt{m}$, которое характеризует отношение вязкого и дисперсионного членов в уравнениях. Для простоты ограничимся рассмотрением случая малых $G = g/R^2$, где $R^2 = (u_1^-)^2 + (u_2^-)^2$.

Случай $\varkappa > 0$. Если положить $g = 0$ и $A_i = 0$, то график функции $F(u_1, u_2)$ при $\rho_0 W^2 < f$ имеет вид кольцевой канавки, внешние стенки которой неограниченно уходят вверх, а при $u_1 = 0, u_2 = 0$ имеется локальный максимум. Если $g \neq 0$, а $A_i = 0$, то глубина канавки не постоянна и канавка имеет два локальных минимума, разделенных двумя седловыми точками. Локальный максимум в центральной части сохраняется. При малых значениях A_i число и тип стационарных точек не меняется.

Стационарные точки функции $F(u_1, u_2)$ вместе с равенствами $u'_i = 0$ определяют особые точки системы (4) и могут соответствовать состояниям при $\xi = \pm\infty$. Наибольший интерес представляют ситуации, когда стационарных точек пять. Такая ситуация может иметь место, например, когда $c_1 < W < c_2^-$. В этом случае вертикальная прямая $W = \text{const}$ на рис. 1, а может пересекать ударную адиабату в четырех точках: B, C, N, M . На плоскости u_1, u_2 точки ударной адиабаты B, C, N, M отвечают стационарным точкам функции F (рис. 2). Кроме того, имеется стационарная точка A , соответствующая начальному состоянию (на рис. 2 канавка изображена штриховой линией). В рассматриваемом случае точка M — точка максимума, B и C — точки минимума, N и A — седловые точки. Проекция интегральных кривых, идущих в четырехмерном пространстве u_1, u_2, u'_1, u'_2 , на плоскость u_1, u_2 представляет собой траектории движения материальной точки, движущейся с трением по поверхности, задаваемой графиком $F(u_1, u_2)$. Структуре разрыва с состоянием перед ним, задаваемым точкой A , соответствует траектория, приходящая при $\xi \rightarrow \infty$ в точку A , вышедшая с нулевой скоростью $u'_1 = 0, u'_2 = 0$ из одной из критических точек B, C, M, N , причем последняя отвечает состоянию за разрывом.

Очевидно, не может существовать интегральных кривых, выходящих из точек минимума потенциальной энергии B или C с нулевыми скоростями $u'_1 = 0, u'_2 = 0$, т. е. не

существует структуры неэволюционных ударных волн $A \rightarrow B$ и $A \rightarrow C$.

Рассмотрим множество траекторий, начинающихся в точке максимума M . Это множество зависит от одного параметра. Все траектории должны закончиться при $\xi \rightarrow \infty$ в одной из точек A, B, C, N . Множество траекторий, входящих в точку минимума B , и множество траекторий, входящих в точку минимума C , также зависят от одного параметра. Это означает существование разделяющих данные потоки интегральных кривых, которые входят в точки A и N . Таким образом, структура медленной ударной волны $A \rightarrow M$ существует.

Выясним, существует ли интегральная кривая, идущая при увеличении ξ из N в A . Для этого должно выполняться неравенство $F(N) > F(A)$, что имеет место, если W больше некоторого значения W_0 . В этом случае точки A и C близки между собой, а точка N лежит в стороне и, следовательно, выше A (см. рис. 2). Если W близко к c_1^- , то сближаются точки A и M , в результате точка A оказывается выше точки N и интегральной кривой, идущей из N в A , а следовательно, структуры ударной волны $A \rightarrow N$ не существует.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2, используя аналогию с движением тяжелой материальной точки. Тяжелые точки, выходящие с нулевой скоростью из точки N , двигаются в основном вдоль канавки и в случае общего положения заканчивают движение в одном из минимумов B или C . Если влияние трения, характеризуемое отношением $\mu/\sqrt{m}$, достаточно мало, то тяжелая точка в процессе движения совершит какое-то число колебаний вдоль канавки, каждый раз проходя мимо точки A . При изменении параметров уравнения, например скорости W , число колебаний будет меняться, и на оси W можно указать чередующиеся интервалы, соответствующие окончанию движения в точках B и C . Данные интервалы разделены такими значениями W , что рассматриваемая тяжелая точка при $\xi \rightarrow \infty$ не стремится ни к B , ни к C . При этом имеется единственная возможность: при $\xi \rightarrow \infty$ тяжелая точка стремится к неустойчивой (седловой) точке покоя A . Это означает, что при указанных значениях W имеется структура ударной волны $A \rightarrow N$. Как показано на рис. 1,а, ударная волна $A \rightarrow N$ априорно неэволюционна. Эволюционной она становится в силу того, что заданное значение скорости, при котором она существует, следует рассматривать как дополнительное условие на разрыве (аналогично фронту горения в газе).

При малых значениях коэффициента трения число колебаний тяжелой точки по желобу очень велико и достаточно малого изменения W , чтобы точка остановки изменилась с B на C или наоборот. При этом W переходит через некоторое значение, соответствующее остановке в точке A . Иными словами, при малых $\mu/\sqrt{m}$ на оси W расстояния между значениями W , при которых существует структура ударной волны $A \rightarrow N$, мало. Эти значения расположены на отрезке, примыкающем слева к точке $W = c_2^-$ (см. рис. 1,а).

При $W > c_2^-$ картина линий уровня качественно сохраняет свой вид, изображенный на рис. 2, однако точки A и C меняются местами. При этом всегда существует структура быстрой ударной волны $A \rightarrow C$ (верхняя быстрая ветвь ударной адиабаты на рис. 1,а). Структура разрыва $A \rightarrow B$ не существует, а структура разрыва $A \rightarrow M$ неединственна, что типично для распадающихся неэволюционных разрывов.

Разрывы $A \rightarrow N$ при $W > c_2^-$ обладают структурой, только если скорость W принадлежит одному из интервалов оси W , длина которых стремится к нулю, а число — к бесконечности при $\mu \rightarrow 0$. Это заключение аналогично сделанному выше о существовании интегральной кривой, соединяющей точки C и N при $c_1^- < W < c_2^-$. Однако следует учитывать, что из точки N выходят две интегральные кривые и в рассматриваемом случае, для того чтобы структура ударной волны $A \rightarrow N$ отсутствовала, необходимо, чтобы обе эти кривые пришли в точку B . Можно ожидать, что такая ситуация имеет место при достаточно малом μ в случае, когда W близко к c_2^- . При этом точки C и A близки между

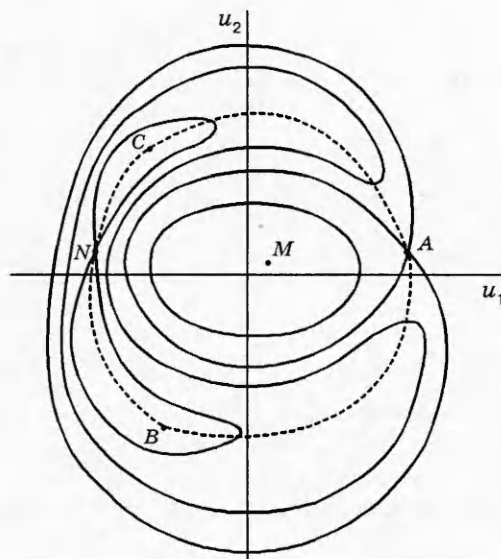


Рис. 3

собой и углубление канавки в окрестности точки C мало.

При $W > W_J$ у канавки остается только одно углубление с самой глубокой точкой A . В этом случае обе интегральные кривые из точки N приходят в точку A и структура ударной волны $A \rightarrow N$ существует.

На рис. 1,а для случая $\varepsilon > 0$ множество всех допустимых разрывов на ударной адиабате представлено жирными отрезками и отдельными точками, причем число отдельных точек и коротких отрезков зависит от определяющих структуру параметров μ и m через отношение $\mu/\sqrt{m}$.

Случай $\varepsilon < 0$. В данном случае график функции $F(u_1, u_2)$ при малых g и A_i напоминает поверхность кратера вулкана. Если значение W соответствует правой вертикальной штриховой прямой на рис. 1,б, то имеется пять стационарных точек функции $F(u_1, u_2)$. Картина линий уровня остается такой же, как и на рис. 2, однако направление изменения функции F от линии к линии меняется на обратное. При этом точка M — точка минимума, точки B и C — точки максимума, A и N — седловые точки.

В случае малых значений g , когда высота стенок кратера меняется мало, среди траекторий, вышедших из точки меньшего максимума (точка C на рис. 2, 3), существует два пучка траекторий, идущих вдоль гребня кратера (штриховая линия на рис. 2, 3) в противоположных направлениях. Когда массивная частица отклоняется на достаточное расстояние от гребня, она получает большое поперечное ускорение и уходит в сторону. Каждый из описанных пучков встречает на своем пути препятствие в виде окрестности второго максимума. При этом пучки разделяются и одна часть траекторий уходит внутрь, а другая наружу кратера. Очевидно при этом существование траекторий, соединяющих точки C и A , C и N . Первая из них представляет структуру медленной ударной волны.

Рассмотрим траектории, вышедшие из точки большего максимума B . Как и в предыдущем случае, при малых G имеется два пучка траекторий, идущих вдоль гребня. В каждом из этих пучков имеется траектория, которая должна закончиться на гребне в точках A или N , совершив какое-либо число колебаний вдоль гребня. Если хотя бы одна из траекторий заканчивается в точке A , то это означает существование структуры медленной ударной волны $A \rightarrow B$. Однако можно предвидеть, что при изменении скорости W найдутся интервалы ее значений, в которых обе траектории закончатся в точке N . В этом случае на ударной адиабате имеется интервал, не соответствующий допустимым ударным

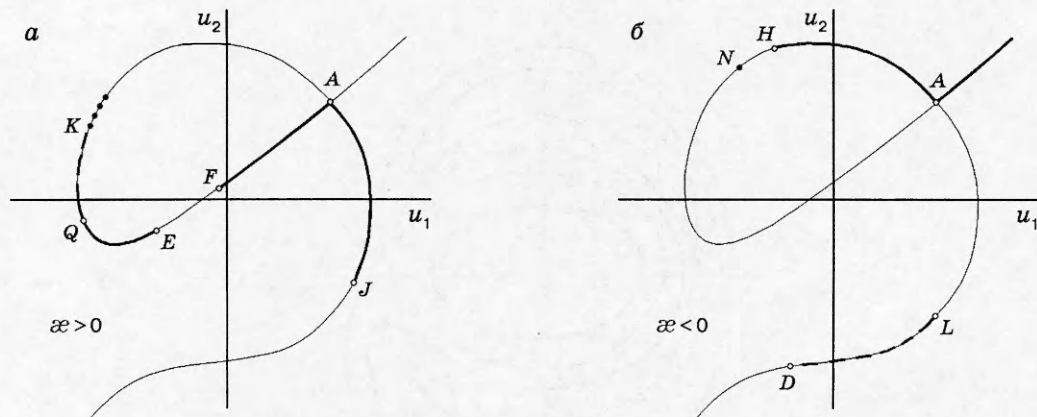


Рис. 4

волнам. Длина таких интервалов, как и расстояние между ними, стремится к нулю при $\mu/\sqrt{m} \rightarrow 0$.

Перейдем к вопросу о существовании структуры «промежуточной» ударной волны $A \rightarrow N$. Очевидно отсутствие такой структуры при $F(N) < F(A)$, т. е. при $W < W_*$. При увеличении W в зависимости от U_1 и U_2 может найтись такое значение W_0 , что при $W > W_0$ выходящая в сторону кратера траектория (единственная) пересекает гребень на более низком участке в окрестности точки A и уходит во внешнюю область. При этом значении $W = W_0$ существует траектория $N \rightarrow A$, соответствующая структуре промежуточной ударной волны $A \rightarrow N$.

Все перечисленное приводит к множеству допустимых разрывов, изображенных на диаграмме эволюционности жирными отрезками и отдельной точкой (см. рис. 1, б).

В заключение изобразим ударную адиабату с выделенным на ней множеством допустимых разрывов на плоскости u_1, u_2 (рис. 4). Как и в случае электромагнитных ударных волн, множество допустимых промежуточных ударных волн, имеющееся при $x > 0$, приводит к неединственности решений задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Вариационные свойства осредненных моделей периодических сред // Тр. МИАН. 1990. Т. 192. С. 5–19.
2. Куликовский А. Г., Гвоздовская Н. И. О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Тр. МИАН. 1998. Т. 225. С. 73–85.
3. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998.
4. Гвоздовская Н. И., Куликовский А. Г. Об электромагнитных волнах и их структуре в анизотропных ферромагнетиках // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 1. С. 139–148.
5. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. О структуре квазипоперечных ударных волн // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 51. С. 926–932.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.