

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ВЕРХНЕЙ  
ПОВЕРХНОСТИ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА В ОБЛАСТИ  
РАСШИРЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА***Г. П. Воскресенский**(Москва)*

Описан численный метод расчета сверхзвукового обтекания верхней произвольной поверхности треугольного крыла в области расширения. Ударная волна должна быть всюду присоединена к передней кромке со стороны нижней поверхности этого крыла. Поток, обтекающий крыло, предполагается невязким. Для нелинейной системы уравнений газовой динамики ставится задача с начальными условиями на некоторой плоскости, граничными условиями на поверхности крыла и характеристической поверхности.

Разностная система уравнений, аппроксимирующая на сетке исходную систему дифференциальных уравнений, имеет второй порядок точности и решается по итерационной схеме, предложенной в [1]. Начальные условия определяются методом установления автомодельного течения. Рассмотрен ряд примеров. Дано сравнение с решениями других авторов и экспериментом.

1. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание треугольного крыла, полагая, что составляющая вектора скорости набегающего потока, нормальная передней кромке, больше скорости звука и головная ударная волна присоединена к передней кромке крыла. Течения сверху и снизу крыла не влияют друг на друга и их можно рассматривать отдельно. Решение задачи для течения сжатия было дано в [2]. Рассмотрим течение расширения, которое возникает на верхней поверхности крыла, если угол атаки крыла, исчисляемый в плоскости, нормальной к передней кромке, станет больше угла полураствора носика профиля в той же плоскости. Область течения будет ограничена поверхностью крыла и характеристической поверхностью, исходящей из передней кромки. Будем считать, что поверхность крыла произвольная. Если она коническая, то течение на верхней поверхности в указанной области будет обладать автомодельными свойствами конического течения.

Введем декартову систему координат с началом в вершине крыла. Ось  $x$  расположена в вертикальной плоскости симметрии, ось  $z$  направлена по размаху влево и ось  $y$  — вверх. Вектор скорости набегающего потока имеет произвольный угол атаки и лежит в плоскости  $xz$  (фиг. 1). Последнее условие может быть исключено, тогда обтекание будет со скольжением. Введение условия симметричности обтекания делается для сокращения вычислений.

Набегающий поток газа будем считать невязким и нетеплопроводным. Разобьем область течения плоскостью  $Q_0$  и поверхностью  $Q_1$  на три части. Плоскость  $Q_0$  совпадает с плоскостью  $x = \text{const}$ , а поверхность  $Q_1$  — с поверхностью  $\eta = \text{const}$ , где  $\eta = z / H(t)$  и  $H = H(t)$  — уравнение передней кромки крыла (см. фиг. 1).

Решение задачи разбивается на три задачи определения течения в областях 1, 2, 3. Решение задачи для области 1 дает начальные условия в плоскости  $Q_0$ , для области 2 — граничные значения на поверхности  $Q_1$ . Предположив, что задачи для областей 1 и 2 решены, сформулируем

краевую задачу для области  $Z$  и дадим алгоритм ее численного решения, затем дадим алгоритмы для задач в областях  $I$  и  $2$ .

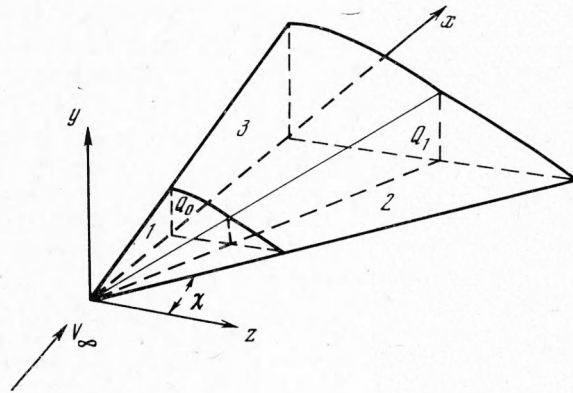
Уравнение неразрывности течения, энергии и движения запишем в матричной форме

$$(1.1) \quad A_1 \frac{\partial X}{\partial x} + B_1 \frac{\partial X}{\partial y} + C_1 \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$

Здесь  $A_1, B_1, C_1$  — квадратные матрицы пятого порядка с компонентами  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$

$$\begin{aligned} a_{11} = b_{12} = c_{13} = \rho, \quad a_{21} = b_{22} = c_{23} = \rho a^2, \quad a_{51} = a_{42} = \\ = a_{33} = a_{24} = a_{15} = u \\ b_{51} = b_{42} = b_{33} = b_{24} = b_{15} = v, \quad c_{51} = c_{42} = c_{33} = c_{24} = c_{15} = w \\ a_{54} = b_{44} = c_{34} = 1/\rho \end{aligned}$$

остальные компоненты матриц нулевые;  $X$  — вектор-столбец с компонентами  $u, v, w, p, \rho$ ;  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости по осям



Фиг. 1

$x, y, z$  соответственно, отнесенные к величине  $\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}$ ;  $p$  — давление, отнесенное к  $p_\infty$ , а  $\rho$  — плотность, отнесенная к  $\rho_\infty$ ;  $a^2 = k_\infty p / \rho$ ;  $k_\infty$  — отношение удельных теплоемкостей.

Пусть уравнение верхней поверхности крыла  $y = G(x, z)$ , а уравнение внешней характеристической поверхности  $y = F(x, z)$ . На поверхности крыла справедливо условие непротекания. На характеристической поверхности известен вектор  $X$ , имеющий те же компоненты, что и в набегающем потоке, а функция  $F(x, z)$  неизвестна.

Краевая задача для области  $Z$  формулируется так: на плоскости  $Q_0$  и поверхности  $Q_1$  известны вектор  $X$  и функция  $F(x, z)$ . Требуется найти решение системы (1.1) в этой области с данными на плоскости  $Q_0$ , поверхности  $Q_1$ , граничными условиями на поверхности крыла и на характеристической поверхности и условиями симметрии на плоскости симметрии.

Решение этой задачи строится численно. Сначала находится вектор  $X$  и функция  $F$  в плоскости  $Q_0^{(1)}$ , близкой к  $Q_0$ , затем плоскость  $Q_0^{(1)}$  принимается в качестве начальной и процесс повторяется вплоть до задней кромки крыла.

Перейдем в уравнениях (1.1) к новым координатам, чтобы область решения  $\mathcal{Z}$  имела вид параллелепипеда

$$x \rightarrow t, \quad y \rightarrow \xi = \frac{y-G}{F-G}, \quad z \rightarrow \eta = \frac{z}{H(t)}$$

В этих координатах область решения будет характеризоваться неравенствами  $t > t_0$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $0 \leq \eta < 1$ , а система уравнений

$$(1.2) \quad A \frac{\partial X}{\partial t} + B \frac{\partial X}{\partial \xi} + C \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0$$

$$A = A_1, \quad B = A_1 \xi_x + B_1 \xi_y + C_1 \xi_z, \quad C = A_1 \eta_x + C_1 \eta_z$$

$$\xi_x = -\frac{1}{(F-G)H} \{H[(1-\xi)G_t + \xi F_t] - \eta H_t [(1-\xi)G_\eta + \xi F_\eta]\}$$

$$\xi_y = \frac{1}{F-G}, \quad \xi_z = -\frac{1}{(F-G)H} [(1-\xi)G_\eta + \xi F_\eta]$$

$$\eta_x = -\eta H_t / H, \quad \eta_y = 0, \quad \eta_z = 1/H$$

Алгоритм численного решения задачи для области  $\mathcal{Z}$  совпадает с алгоритмом решения задачи для течения сжатия [2] с той разницей, что отпадает необходимость определения вектора  $X$  на внешней границе области. В искомой области выстраивается прямоугольная решетка и используется неявная разностная схема второго порядка точности. Решение системы разностных уравнений проводится от слоя к слою итерационно. Алгоритм этого процесса был изложен в [1-3].

2. Задача для области  $\mathcal{Z}$  решается в предположении, что передняя кромка обтекается как скользящий клин и в плоскости, нормальной передней кромке, течение подчиняется закону Прандтля — Майера. Газодинамические функции постоянны вдоль лучей, исходящих из передней кромки крыла в указанной плоскости и зависят лишь от угла между данным лучом и горизонтальной плоскостью. Этот угол является функцией координаты  $\xi$ .

Для вычисления газодинамических функций вдоль лучей, а следовательно, и на поверхности  $Q_1$ , которую они пересекают, вектор скорости набегающего потока раскладывается на две компоненты. Одна из них ( $V_{\tau_\infty}$ ) направлена по касательной к передней кромке. Она остается неизменной. Другая ( $V_{n_\infty}$ ) лежит в плоскости, нормальной передней кромке. В указанном течении Прандтля — Майера она изменяется от луча к лучу.

Угол клина считается равным углу, образованному вектором  $V_{n_\infty}$  с линией пересечения касательной плоскости к поверхности крыла и плоскости, ей перпендикулярной на передней кромке.

По скорости  $V_{n_\infty}$  вычисляются газодинамические функции на лучах. Результирующая величина вектора скорости на поверхности  $Q_1$  равняется сумме неизменной компоненты  $V_{\tau_\infty}$  и компоненты, полученной на соответствующем луче. Таким путем на границе области  $\mathcal{Z}$ , образованной поверхностью  $Q_1$ , для каждого слоя получают необходимые значения газодинамических функций.

Поскольку течение Прандтля — Майера распространяется от передней кромки крыла внутрь потока вплоть до характеристического конуса, исходящего из вершины крыла, то поверхность  $Q_1$  (в частном случае — плоскость) для экономии в счете следует располагать на линии пересечения характеристического конуса с поверхностью крыла.

Течение на верхней поверхности полукрыла имеет заметную поперечную составляющую скорости  $w$ , возникающую при расширении около перед-

ней кромки и направленную к оси симметрии крыла. В плоскости симметрии компоненты  $w$ , приходящие с обеих половин крыла, взаимно погашаются, что свидетельствует о повороте потока. Поворот и сжатие потока вблизи плоскости симметрии крыла происходят скачкообразно. Образующийся скачок невелик и не вызывает больших изменений энтропии. Он расположен внутри характеристического конуса, исходящего из вершины крыла, и в своей нижней части нормален к поверхности крыла. Существование этого скачка отмечалось ранее [4,5] и подтверждено экспериментами [6].

3. Рассмотрим задачу определения начальных данных на плоскости  $Q_0$  для области  $I$ . Она решается методом установления автомодельного течения расширения, так же как и для течения сжатия [2]. Многократно используется алгоритм перехода от слоя к слою из задачи для области  $Z$  вплоть до установления автомодельности по координате  $t$  с заданной точностью. Начинать установление можно от произвольных данных. Целесообразно использовать для этой цели течение около двух клиньев: в плоскости симметрии и в плоскости, нормальной передней кромке. Промежуточные значения в точках могут быть получены интерполяцией. Контроль точности установления можно вести по отдельным значениям или по графикам функций  $w$  и  $p$ , учитывая, что эти функции устанавливаются медленнее других. О качестве решения и его установлении можно также судить по поведению энтропийной функции  $S = p / \rho^k$ , которая всюду в потоке (кроме окрестности внутреннего скачка) должна равняться единице. Поскольку энтропийная функция в алгоритме прямо не участвует, то для целей контроля ее следует вычислять дополнительно.

Факт существования скачка в алгоритме прямо не учитывался. Скачок проявлялся в результатах в «размытом» виде. В зоне скачка располагалось обычно 4—5 счетных точек. Увеличению устойчивости разностной схемы при расчете разрыва способствовали кроме «внутренней вязкости» (имеющей место потому, что разностная схема эквивалентна исходным уравнениям плюс ошибка аппроксимации) введение искусственной «вязкости» по координате  $\eta$  с регулируемым малым параметром при ней и однократное сглаживание функций на слое. Задача для области  $I$  имеет самостоятельное значение для крыльев с конической поверхностью.

4. По описанному алгоритму были проведены на ЭВМ расчеты обтекания верхней поверхности треугольных пластин при вариации  $M_\infty$ , угла стреловидности передней кромки  $\chi$  и угла атаки  $\alpha$ .

В расчетах контроль качества решения производился по значениям энтропийной функции, а также по значению интеграла Бернулли, не входящему в алгоритм. Энтропийная функция всюду, кроме области скачка, не более чем на 5% отличалась от единицы, а интеграл Бернулли не более чем на 1% отличался от его значения в набегающем потоке.

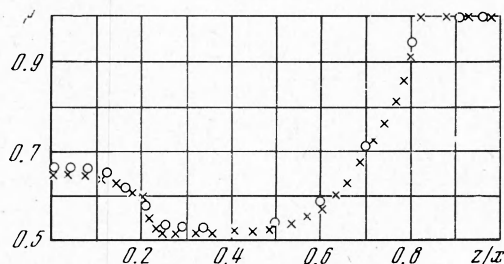
Давление на верхней поверхности треугольной пластины при  $M_\infty = 6$ ,  $\chi = 60^\circ$  и  $\alpha = 7^\circ$  совпадает с результатами расчета из работы [5].

На фиг. 2 показано сравнение расчета с экспериментом [6]. В эксперименте специальным щупом, вводимым в поток, измерялось полное давление за прямым скачком, возникающим перед щупом в поле между верхней поверхностью треугольной пластины и внешней характеристической поверхностью. Это давление относилось к полному давлению за прямым скачком в невозмущенном потоке. В эксперименте использовалась пластина с  $\chi = 44.7^\circ$ ,  $\alpha = 12^\circ$  при  $M_\infty = 2.94$ . На фигуре крестиками показана экспериментально полученная величина отношения давлений по размаху крыла  $\bar{p}$ , а кружками — результаты расчета. Относительное расстояние от поверхности крыла, на котором вдоль размаха производился

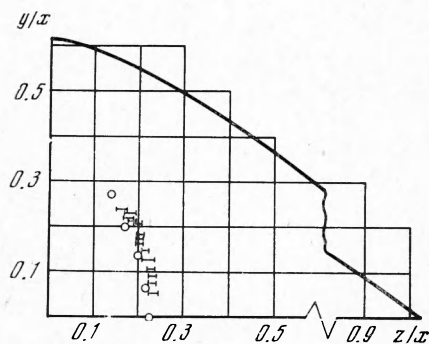


замер давления  $y/x = 0.1282$ ,  $z/x$  — полуразмах, отнесенный к корневой хорде крыла.

В этом же эксперименте определялось положение внутреннего скачка. На фиг. 3 отрезками прямых указано вероятное положение проекции скачка на плоскости  $x = \text{const}$ . Кружками нанесено положение скачка, полученное из расчета. Нанесено также расчетное положение следа характеристической поверхности на плоскости  $x = \text{const}$ .



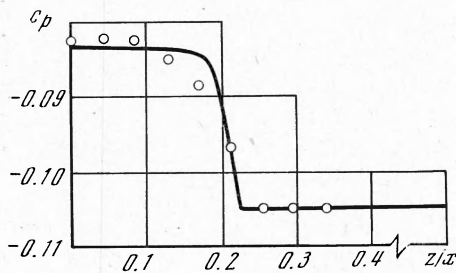
Фиг. 2



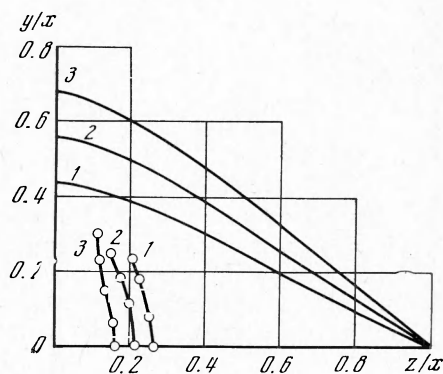
Фиг. 3

Поскольку в расчетах скачок «размыт» и график давления по размаху не имеет четко выраженной «ступеньки», то положение скачка определялось по графикам давления как точка, соответствующая полусумме максимального и минимального давлений на ступеньке.

Интенсивность скачка падает по направлению от поверхности крыла к внешней характеристической поверхности. На некотором расстоянии от поверхности крыла скачок вырождается. Об этом свидетельствует отсутствие перепада давления на графиках, начиная с некоторого значения координаты  $\xi$ .



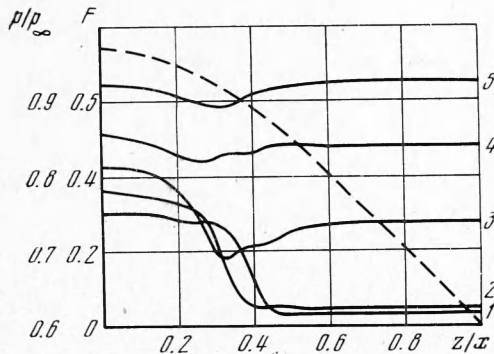
Фиг. 4



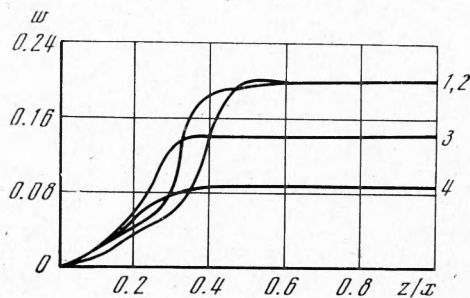
Фиг. 5

На фиг. 4 представлено сравнение данных расчетов (кружки) с расчетами коэффициента давления  $c_p$  при  $M_\infty = 3$ ,  $\chi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 12^\circ$  из [7] (сплошная линия). В [7] использовалась схема сквозного счета через разрыв по методу «предиктор — корректор» с большим, чем в данной работе, числом счетных точек. Предлагаемой схемой разрыв аппроксимируется достаточно хорошо при счетной сетке  $9 \times 9$  точек внутри «ядра» потока (ядро ограничено плоскостью симметрии и плоскостью  $Q_1$ , расположенной на линии пересечения характеристического конуса с поверхностью крыла).

На фиг. 5 показаны следы внешних характеристических поверхностей и внутренних скачков на плоскость  $x = \text{const}$  треугольной пластины при  $M_\infty = 4$  и  $\chi = 45^\circ$  для разных углов атаки. Видно, что по мере роста угла атаки скачок приближается к плоскости симметрии крыла. Здесь  $\alpha = 5, 10, 15^\circ$  для 1, 2, 3 соответственно. Анализ изменения положения скачка на верхней поверхности треугольных пластин с различной стреловидностью передней кромки показывает, что стреловидность слабо влияет на положение скачка.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 и 7 представлены типичные графики изменения  $p/p_\infty = p$  и  $w = w/\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}$  внутри потока по размаху верхней поверхности треугольной пластины при  $M_\infty = 2$ ,  $\chi = 45^\circ$ ,  $\alpha = 7^\circ$ . На графиках 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют  $\xi = 0, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875$ . Здесь  $\xi = y/F$ , где  $F$  — расстояние (в долях корневой хорды) от поверхности пластины до внешней характеристической поверхности. Положение этой поверхности изображено пунктиром на фиг. 6. Из графиков видно, что уже при  $\xi = 0.75$  внутренний скачок практически вырождается. Этот вариант расчета находится на границе применимости данного метода решения, так как поворот потока в плоскости, нормальной передней кромке, у нижней поверхности такого крыла близок к предельному, а следовательно, близок к отходу ударной волны от передней кромки и нарушению постановки задачи.

Автор благодарен А. С. Ильиной, проводившей расчеты, а также В. С. Татаренчику за советы.

Поступила 24 V 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
2. Воскресенский Г. П. Численное решение задачи обтекания произвольной поверхности треугольного крыла в области сжатия сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
3. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
4. Булах В. М. К теории нелинейных конических течений. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4, стр. 393—409.
5. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 2.
6. Vannink W. J., Nebbeling C. An experimental investigation of the expansion flow field over a delta wing at supersonic speed. Delft. Univ. Technol. Dep. Aeronaut. Engng Rept, 1971, No. 167.
7. Küller P., Lomax H. Shock-capturing, finite — difference approach to supersonic flows. J. Spacecraft and Rockets, 1972, vol. 8, No. 12.