

УДК 539.3

ОБ ОЦЕНКЕ СКРЫТОЙ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ И ПОВРЕЖДЕННОСТИ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

Ю. Н. Радаев

Самарский государственный университет, 443011 Самара

Предложен способ оценки скрытой упругой энергии, ассоциированной с микронеоднородностью поля напряжений и пластических деформаций внутри локализованной у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния пластической зоны (зоны Дагдейла). Микронеоднородность пластического течения при малом деформационном упрочнении учтена только в форме значительного искажения геометрии свободных поверхностей пластической зоны. Получена оценка поврежденности, развивающейся в результате освобождения скрытой свободной энергии, в зависимости от величины раскрытия трещины.

Оценка скрытой упругой энергии, аккумулирующейся в зонах локализованной пластической деформации, которые обычно наблюдаются вблизи концентраторов напряжений, необходима при исследовании упругопластического разрушения металлов. Именно скрытая свободная (согласно традиционной термодинамической классификации) энергия впоследствии в значительной мере расходуется на развитие и рост поврежденности, когда для этого создаются подходящие условия (знакопеременное циклическое нагружение, действие различных охрупчивающих факторов — агрессивной внешней среды, радиационного излучения).

В данной работе приводится способ оценки скрытой свободной энергии, основанный на сравнении геометрии идеально пластического течения и пластического течения, искажаемого микронеоднородным полем напряжений. У металлов со слабым деформационным упрочнением (мягкие стали и некоторые алюминиевые сплавы) микронеоднородность напряжений проявляется как поверхностная неустойчивость в области пластического течения, поэтому искажение геометрии свободной границы и поля скольжения является определяющим фактором. Этот способ позволяет указать оценку сверху для значения скрытой энергии, ассоциируемой с сильнонеоднородным полем напряжений в зоне с высокой степенью локализации пластической деформации, если удастся вычислить изменение среднего по сечению тела нормального напряжения в зоне локализации, обусловленное искажением свободной границы.

В данной работе приводится оценка скрытой свободной энергии и поврежденности у вершины трещины нормального отрыва в стальной пластине в условиях плоского напряженного состояния после цикла нагружение — разгрузка. При этом моделирование сильнолокализованного пластического течения осуществляется с учетом нетривиальной геометрии поля скольжения в нормальных сечениях пластины, перпендикулярных линии трещины. С помощью указанной оценки получена величина раскрытия трещины, которая является достаточной для неконтролируемого растрескивания пластины у вершины трещины.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим тонкую металлическую пластинку, содержащую внутренний разрез $|x_1| \leq l$, которая растягивается напря-

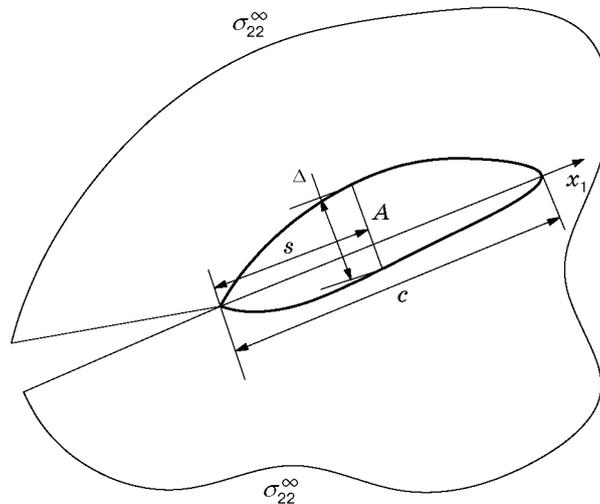


Рис. 1. Геометрия локализованной пластической зоны у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния

жением σ_{22}^{∞} (рис. 1). Длина трещины $2l$ предполагается значительно меньше размеров пластины и значительно больше толщины пластины $2a$. Обозначим через Y предел текучести при одноосном растяжении.

Как известно [1, 2], для мягких сталей образующиеся у вершины трещины пластические зоны представляют собой чрезвычайно тонкие полоски, продолжающие трещину. Соответствующая подобной сильнолокализованной у вершины трещины текучести модель трещины, предложенная Д. С. Дагдейлом [1], основывается на следующих предположениях:

1. Элементы пластической зоны подвержены воздействию только нормального растягивающего напряжения, равного пределу текучести при растяжении Y .
2. Толщина пластической зоны намного меньше ее длины, так что внутренняя граница упругой зоны может рассматриваться как сильно сплюснутый эллипс с большой полуосью, равной $l + c$, где c — длина пластической зоны.
3. Длина пластической зоны c такова, что эта зона полностью поглощает сингулярность поля нормальных напряжений.

Пластическое течение у вершины трещины характеризуется существенно микронеоднородным полем пластической деформации, практически полным отсутствием деформационного упрочнения (что обуславливает первое из перечисленных выше предположений) и сопровождается сильной поверхностной неустойчивостью, что приводит к значительному качественному искажению геометрии пластины в пределах пластической зоны. В пределах локализованной пластической зоны осредненные по толщине пластины нормальные напряжения могут превосходить предел текучести Y . Это характерно и для локализованного осесимметричного течения (шейки) [3]. В отсутствие упрочнения увеличение среднего по сечению локализованной пластической зоны нормального напряжения происходит только за счет искажения геометрии свободной границы, поэтому необходим более тщательный анализ геометрии пластического течения в плоскостях, нормальных как к линии трещины, так и к плоскости пластины. При этом нельзя пренебрегать протяженностью пластической зоны в нормальном к берегам трещины направлении, как это предлагается в схеме Дагдейла. Тем не менее, поскольку линейный размер пластической зоны и распределение перемещений у вершины трещины довольно точно вычисляются на основе предположений Дагдейла, соответствующие расчетные формулы могут быть использованы для оценки длины пластической зоны и величины раскрытия трещины.

Напряжения и деформации в пределах локализованной у вершины трещины пластической зоны представим в форме суммы регулярных (средних) значений и флуктуаций, обусловленных микронеоднородностью распределения: $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^\mu$, $\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}^\mu$, где осреднение выполняется по элементу объема τ , характерный линейный размер которого сравним с типичным масштабом микронеоднородности пластического течения:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{|\tau|} \iiint_{\tau} \sigma_{ij} d\tau, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{|\tau|} \iiint_{\tau} \varepsilon_{ij} d\tau.$$

Средние значения флуктуаций напряжений и деформаций равны нулю:

$$\iiint_{\tau} \sigma_{ij}^\mu d\tau = 0, \quad \iiint_{\tau} \varepsilon_{ij}^\mu d\tau = 0.$$

Предполагая, что микронеоднородность распределения существенна только в зоне локализации пластических деформаций, можно считать, что за пределами пластической зоны указанные флуктуации равны нулю. Если дополнительно принять, что напряжения и пластические деформации непрерывны при переходе через границу упругой и пластической зон, то флуктуации напряжений и деформаций будут равны нулю и на самой границе пластической зоны.

Микронеоднородное пластическое течение с энергетической точки зрения характеризуется тем, что часть его свободной энергии, приходящаяся на долю микронапряжений σ_{ij}^μ , существует в скрытой форме и может освобождаться только при некоторых условиях, например при знакопеременном циклическом нагружении.

Для оценки скрытой свободной энергии при изотермическом микронеоднородном пластическом течении рассмотрим выражение для работы напряжений, затрачиваемой на малую деформацию элемента объема на величину $d\varepsilon_{ij}$:

$$\frac{1}{|\tau|} \iiint_{\tau} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\tau = \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{|\tau|} \iiint_{\tau} \sigma_{ij}^\mu d\varepsilon_{ij}^\mu d\tau. \quad (1.1)$$

Разложим полную и среднюю деформации на упругую и пластическую составляющие:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^P, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}^E + \bar{\varepsilon}_{ij}^P.$$

Из полученных соотношений следует аналогичное разложение для флуктуации тензора деформации: $\varepsilon_{ij}^\mu = \varepsilon_{ij}^{\mu E} + \varepsilon_{ij}^{\mu P}$.

Роль упругих обратимых деформаций для микроскопического тензора напряжений σ_{ij}^μ играют пластические микродеформации $\varepsilon_{ij}^{\mu P}$, поскольку напряжения σ_{ij}^μ появляются и исчезают вместе с деформациями $\varepsilon_{ij}^{\mu P}$. Будем считать, что полная работа микронапряжений σ_{ij}^μ на микропластических деформациях $\varepsilon_{ij}^{\mu P}$ для любого цикла, замкнутого по пластическим микродеформациям, равна нулю:

$$\oint \sigma_{ij}^\mu d\varepsilon_{ij}^{\mu P} = 0. \quad (1.2)$$

Это предположение принимается в большинстве теорий пластичности, учитывающих микронеоднородность пластического течения.

Следовательно, скрытую свободную энергию ψ^μ (приходящуюся на единицу объема) можно определить как потенциал микронапряжений:

$$\sigma_{ij}^\mu = \frac{\partial \psi^\mu}{\partial \varepsilon_{ij}^{\mu P}},$$

существование которого обеспечено при выполнении условия (1.2). Тогда уравнение (1.1) может быть представлено в следующем виде:

$$d\bar{\psi}^\mu = \frac{1}{|\tau|} \iiint_{\tau} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\tau - \frac{1}{|\tau|} \iiint_{\tau} \sigma_{ij}^\mu d\varepsilon_{ij}^{\mu E} d\tau - \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}.$$

Полагая, что флуктуациями упругой составляющей деформации можно пренебречь ($\varepsilon_{ij}^{\mu E} = 0$, $\varepsilon_{ij}^E = \bar{\varepsilon}_{ij}^E$), получим уравнение

$$d\bar{\psi}^\mu = \frac{1}{|\tau|} \iiint_{\tau} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P d\tau - \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^P.$$

Таким образом, изменение средней по характерному объему скрытой свободной энергии определяется разностью необратимых работ, которые совершаются при пластическом деформировании, искаженном внутренней микронеоднородностью, и идеальном пластическом деформировании. Последнее уравнение можно также представить в форме

$$d\bar{\psi}^\mu = \overline{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P} - \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^P \quad (1.3)$$

и рассматривать как макроскопическое определение величины $\bar{\psi}^\mu$ — плотности (на единицу объема) скрытой свободной энергии микронапряжений.

В рамках континуальной модели на основании принципа энергетической эквивалентности можно ввести микрооднородный тензор экстранапряжений Σ_{ij} , с энергетической точки зрения представляющий микрофлуктуации, так чтобы выполнялось равенство

$$\overline{\sigma_{ij}^\mu d\varepsilon_{ij}^{\mu P}} = \Sigma_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^P.$$

Тензор экстранапряжений Σ_{ij} не определяется однозначно последним равенством, но в дальнейшем достаточно принять, что существует возможность такого представления. Заметим, что в соответствии с принципом энергетической эквивалентности флуктуации напряжений и пластических деформаций зависят от достигнутых средних по характерному объему пластических деформаций.

В терминах нефлуктуирующего тензора Σ_{ij} уравнение (1.3) приобретает вид

$$d\bar{\psi}^\mu = \Sigma_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^P,$$

где $\bar{\psi}^\mu$ — потенциал тензора экстранапряжений Σ_{ij} , характеризующего микронеоднородность пластического течения в изотермических процессах.

Можно конкретизировать потенциал состояния $\bar{\psi}^\mu$ и получить определяющее уравнение, связывающее тензор экстранапряжений Σ_{ij} и осредненные по характерному объему пластические деформации, что в рамках континуальной модели приводит к классическим уравнениям Ишлинского — Прагера или к их усложненным вариантам. Отличие развиваемого подхода состоит в том, что для низколегированных сталей кинематическое упрочнение мало, поэтому влияние микронеоднородности пластического течения может быть учтено только в форме поверхностной неустойчивости пластической зоны, т. е. существенного искажения свободной поверхности по сравнению с ее геометрией при идеально пластическом течении.

Уравнение (1.3), которое, по-видимому, ранее не рассматривалось, может быть использовано, как показано ниже, для оценки поврежденности пластины у вершины трещины. С этой целью необходимо прежде всего получить суммарное (для всех элементов локализованной пластической зоны) приращение скрытой свободной энергии, а затем, интегрируя вдоль всего процесса нагружения, — полную скрытую свободную энергию.

Пусть C — некоторый силовой или геометрический параметр процесса нагружения, монотонно возрастающий в процессе нагружения. В случае трещины нормального отрыва в пластине, если нормальное растягивающее напряжение σ_{22}^{∞} возрастает и достигает максимального значения $\hat{\sigma}_{22}^{\infty}$, в качестве параметра процесса C можно выбрать возрастающий размер пластической зоны c (рис. 1).

Суммируя по всем элементам текущей пластической зоны V' уравнение (1.3) и интегрируя затем вдоль всего процесса, получим следующее уравнение:

$$\int_0^{\hat{c}} dc \iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{dc} = J - I, \quad (1.4)$$

где

$$J = \int_0^{\hat{c}} dc \iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\overline{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P}}{dc}; \quad (1.5)$$

$$I = \int_0^{\hat{c}} dc \iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \bar{\sigma}_{ij} \frac{d\bar{\varepsilon}_{ij}^P}{dc}. \quad (1.6)$$

Преобразуем сначала интеграл в левой части уравнения (1.4). Для этого интеграл по пластической зоне представим как повторный (внутренний интеграл возьмем по плоской области A , которая является сечением на расстоянии s от вершины трещины пластической зоны плоскостью, нормальной как к пластине, так и к линии трещины, а внешний — вдоль линии трещины (рис. 1)):

$$\iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{dc} = \int_0^{\hat{c}} ds \iint_A dA \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{dc}.$$

Полагая, что относительное смещение $\delta(s, c)$ частей пластины, расположенных по разные стороны пластической зоны, в направлении, нормальном к линии трещины, уменьшается с увеличением s , вместо переменной s введем новую переменную интегрирования $s = s(\delta, c)$:

$$\int_0^{\hat{c}} ds \iint_A dA \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{dc} = \int_0^{\omega(c)} \left(-\frac{\partial s}{\partial \delta} \right)_c d\delta \iint_A dA \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{dc}. \quad (1.7)$$

В этом уравнении учтено, что $\delta(c, c) = 0$, и использовано обозначение $\omega(c) = \delta(0, c)$. В первом приближении можно считать, что $\omega(c)$ представляет собой величину раскрытия трещины в зависимости от длины пластической зоны.

Вместо параметра процесса c удобно ввести параметр ω . Заменяя переменную интегрирования вдоль процесса и используя (1.7), находим

$$\int_0^{\hat{c}} dc \iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{dc} = \int_0^{\hat{\omega}} d\omega \int_0^{\omega} \left(-\frac{\partial s}{\partial \delta} \right)_{\omega} d\delta \iint_A dA \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{d\omega}.$$

Интегрирование по δ выполним приближенно с помощью теоремы о среднем:

$$\int_0^{\hat{c}} dc \iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{d\bar{\psi}^{\mu}}{dc} = \int_0^{\hat{\omega}} \omega \left(-\frac{\partial s}{\partial \delta} \right)_{\omega, \bar{A}} \iint_{\bar{A}} \frac{d}{d\omega} (\bar{\psi}^{\mu})_{\bar{A}} dA d\omega,$$

где \bar{A} — некоторое характерное поперечное сечение пластической зоны.

Предполагая, что скрытая свободная энергия $\overline{\psi^\mu}$ слабо меняется в пределах \bar{A} (или этим изменением можно пренебречь по сравнению с изменением $\overline{\psi^\mu}$, связанным с возрастом ω) и площадь \bar{A} незначительно меняется в процессе нагружения, получим

$$\int_0^{\hat{c}} dc \iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{d\overline{\psi^\mu}}{dc} = \iint_{\bar{A}} dA \int_0^{\hat{\omega}} \omega \left(-\frac{\partial s}{\partial \delta} \right)_{\omega, \bar{\delta}} \frac{d}{d\omega} (\overline{\psi^\mu})_{\bar{\delta}} d\omega.$$

Внутреннее интегрирование по $d\omega$ можно выполнить, если аппроксимировать δ зависимостью вида $\delta(\omega(c)(c-s))$ и проинтегрировать затем по частям. Окончательно получим

$$\int_0^{\hat{c}} dc \iiint_{V'} dx_1 dx_2 dx_3 \frac{d\overline{\psi^\mu}}{dc} = \hat{\omega} \left(-\frac{\partial s}{\partial \delta} \right)_{\hat{\omega}, \bar{\delta}} \iint_{\bar{A}} (\overline{\psi^\mu})_{\hat{\omega}, \bar{s}} dA. \quad (1.8)$$

Интеграл J можно оценить следующим образом. Объемный интеграл в (1.5) сведем, как и выше, к повторному. Затем по теореме о среднем выполним интегрирование по s и вместо переменной интегрирования c введем переменную $\bar{\delta}$, которая определяется в результате обращения уравнения $c = c(\bar{s}, \bar{\delta})$. В итоге получим

$$J = \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})} c(\bar{s}, \bar{\delta}) d\bar{\delta} \iint_{\bar{A}} dA \frac{\overline{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P}}{d\bar{\delta}}.$$

Заменяя $c(\bar{s}, \bar{\delta})$ максимально возможным для всего процесса нагружения значением, равным \hat{c} , окончательно получим

$$J = \hat{c} \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})} d\bar{\delta} \iint_{\bar{A}} dA \frac{\overline{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P}}{d\bar{\delta}} \quad (1.9)$$

и аналогичную формулу для интеграла (1.6)

$$I = \hat{c} \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})} d\bar{\delta} \iint_{\bar{A}} dA \bar{\sigma}_{ij} \frac{d\overline{\varepsilon_{ij}^P}}{d\bar{\delta}}. \quad (1.10)$$

С помощью формул (1.8)–(1.10) уравнение (1.4) можно представить в виде

$$\hat{\omega} \left(-\frac{\partial s}{\partial \delta} \right)_{\hat{\omega}, \bar{\delta}} \iint_{\bar{A}} (\overline{\psi^\mu})_{\hat{\omega}, \bar{s}} dA = \hat{c} \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})} d\bar{\delta} \iint_{\bar{A}} dA \frac{\overline{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P}}{d\bar{\delta}} - \hat{c} \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})} d\bar{\delta} \iint_{\bar{A}} dA \bar{\sigma}_{ij} \frac{d\overline{\varepsilon_{ij}^P}}{d\bar{\delta}}. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) используется ниже для оценки скрытой свободной энергии, локализованной у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния.

Заметим также, что

$$\left(-\frac{\partial s}{\partial \delta} \right)_{\hat{\omega}, \bar{\delta}} = \left\{ \left(-\frac{\partial \delta}{\partial s} \right)_{\hat{\omega}, \bar{s}} \right\}^{-1} = \left\{ \frac{1}{\hat{c}} \int_0^{\hat{c}} \left(-\frac{\partial \delta}{\partial s} \right)_{c=\hat{c}} ds \right\}^{-1} = \frac{\hat{c}}{\hat{\omega}}, \quad (1.12)$$

и, следовательно, уравнение (1.11) может быть представлено в форме

$$\iint_{\bar{A}} (\overline{\psi^\mu})_{\hat{\omega}, \bar{s}} dA = \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})} d\bar{\delta} \iint_{\bar{A}} dA \frac{\overline{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P}}{d\bar{\delta}} - \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})} d\bar{\delta} \iint_{\bar{A}} dA \bar{\sigma}_{ij} \frac{d\overline{\varepsilon_{ij}^P}}{d\bar{\delta}}.$$

2. Концентрация свободной энергии микронапряжений в среднем сечении локализованной пластической зоны. Значения каждого интеграла в правой части уравнения (1.4) могут быть оценены, если предположить, что характерный линейный размер пластической зоны значительно превосходит толщину пластины, так что в поперечных сечениях пластической зоны реализуются состояния, близкие к плоской деформации.

Последнее предположение подтверждается экспериментальными данными [4]: за исключением чрезвычайно малой зоны непосредственно у вершины трещины, система скольжения обладает всеми характерными признаками плоского пластического течения с характерным прямым углом пересечения линий скольжения. Поэтому для аппроксимации напряжений можно использовать статически допустимые поля напряжений, построенные по схеме плоского пластического течения.

Предположим также, что величина раскрытия трещины значительно меньше толщины пластины. Поскольку деформационное упрочнение является незначительным, предел текучести Y не меняется в процессе нагружения. Таким образом, микронеоднородность напряжений и деформаций проявляется только в форме неустойчивости текучести и учитывается только через значительное изменение геометрии поверхности пластины и возрастание среднего напряжения в наиболее тонком нормальном сечении пластической зоны. Геометрия поперечного сечения пластины и схематичная форма пластической зоны представлены на рис. 2.

Прежде всего, оценим значение интеграла I , рассматривая схему идеального жесткопластического течения Оната — Прагера, изображенную на рис. 3 ($\beta = \arctg(1/2)$). Геометрия течения довольно проста и определяется условием несжимаемости.

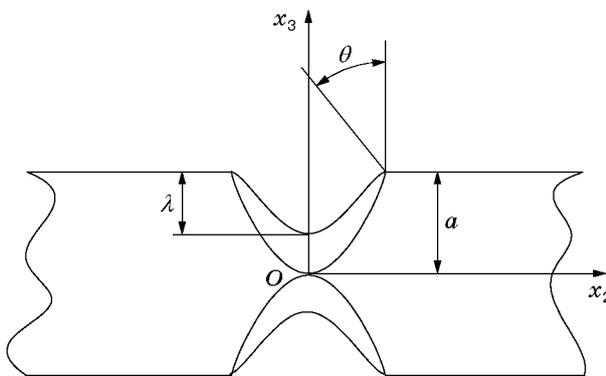


Рис. 2

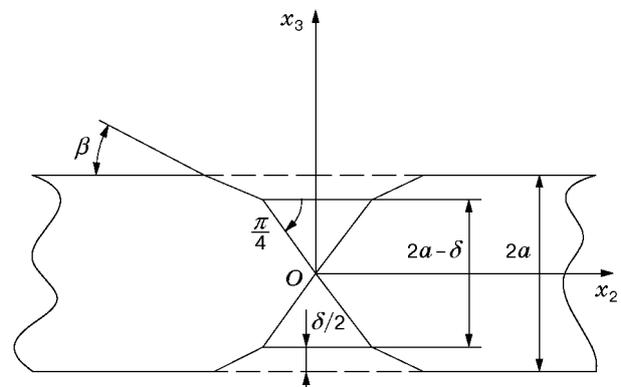


Рис. 3

Рис. 2. Сечение локализованной микронеоднородной пластической зоны нормальной плоскостью

Рис. 3. Геометрия идеально пластического течения в сечении пластической зоны нормальной плоскостью

Обозначая через F_{δ} суммарное растягивающее усилие на единицу длины пластической зоны в направлении оси x_2 :

$$F_{\delta} = 2 \int_0^{a-\delta/2} \sigma_{22} dx_3,$$

где a — половина толщины пластины, и учитывая, что

$$2 \int_0^{\hat{\delta}/2} F_{\delta} d \frac{\delta}{2} = 4Y \left(a\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{\xi=0}^{\hat{\delta}/2},$$

находим

$$I = 2\hat{c} \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})/2} F_{\bar{\delta}} d \frac{\bar{\delta}}{2} = 4Y\hat{c} \left(a\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{\xi=0}^{\hat{\delta}(\bar{s})/2}.$$

Соответствующие оценки для неустойчивого пластического течения, сопровождающегося искажением геометрии свободной границы (см. рис. 2), значительно сложнее, поскольку форма свободной границы заранее неизвестна. В приближении плоской деформации напряженное состояние может быть исследовано методом годографа [5]. Как и выше, вводя суммарное растягивающее усилие F_{δ} , в жесткопластическом приближении имеем [5]

$$F_{\delta} = 2Y \left\{ a - \lambda(\delta) - \int_0^{\theta(\delta)} \varkappa(v, \delta) dv \right\},$$

где уравнения изменяющейся свободной границы $x_2 = \mu_2(u, \delta)$, $x_3 = \mu_3(u, \delta)$ параметризованы с помощью угла между касательной к свободной границе и горизонтальной осью; $\lambda(\delta)$ — наибольшая глубина утонения пластины; $\theta(\delta)$ — угол между нормалью к свободной границе и вертикалью в точке ее пересечения с жесткопластической границей (см. рис. 2);

$$\varkappa(v, \delta) = \Lambda(v, \delta) + \frac{\partial \Lambda(v, \delta)}{\partial v} - (1+v) \int_0^v \Lambda(t, \delta) \frac{I_1(\sqrt{t^2 - v^2})}{\sqrt{t^2 - v^2}} dt - v \int_0^v \Lambda(t, \delta) \frac{\partial}{\partial v} \frac{I_1(\sqrt{t^2 - v^2})}{\sqrt{t^2 - v^2}} dt,$$

$$\Lambda(u, \delta) = \mu_2(u, \delta) \sin u - \mu_3(u, \delta) \cos u.$$

Через I_1 обозначена функция Бесселя первого порядка мнимого аргумента. Заметим также, что справедливо разложение

$$\frac{I_1(\sqrt{t^2 - v^2})}{\sqrt{t^2 - v^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v^2 - t^2)^n}{2^{2n+1} n! (n+1)!}.$$

Поскольку, как и выше, искомый интеграл представляет собой полную работу осредненного по наиболее тонкому сечению пластической зоны нормального напряжения,

$$J = 2\hat{c} \int_0^{\hat{\delta}(\bar{\delta})/2} F_{\bar{\delta}} d \frac{\bar{\delta}}{2}.$$

Отсюда имеем следующую оценку:

$$J = 4Y\hat{c} \int_0^{\hat{\delta}(\bar{\delta})/2} \left\{ a - \lambda(\bar{\delta}) - \int_0^{\theta(\bar{\delta})} \varkappa(v, \bar{\delta}) dv \right\} d \frac{\bar{\delta}}{2}.$$

Таким образом, уравнение (1.11) с учетом равенства (1.12) можно представить в виде

$$\iint_{\bar{A}} (\bar{\psi}^\mu)_{\hat{\omega}, \bar{s}} dx_2 dx_3 = -2Y \xi^2 \Big|_{\xi=0}^{\hat{\delta}(\bar{s})/2} - 4Y \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})/2} \lambda(\bar{\delta}) d\frac{\bar{\delta}}{2} + 4Y \int_0^{\hat{\delta}(\bar{s})/2} \left\{ \int_0^{\theta(\bar{\delta})} (-\varkappa(v, \bar{\delta})) dv \right\} d\frac{\bar{\delta}}{2}.$$

Полученное уравнение позволяет дать некоторые простые оценки скрытой свободной энергии. Прежде всего, заметим, что первое слагаемое в правой части последнего уравнения имеет второй порядок по величине раскрытия трещины. Второе слагаемое имеет порядок произведения утонения пластины и величины раскрытия трещины. Вводя обобщенную силу

$$\mathcal{F}_{\bar{\delta}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\delta}} \frac{1}{a} \iint_{\bar{A}} (\bar{\psi}^\mu)_{\bar{\delta}, \bar{s}} dx_2 dx_3 = -\frac{2Y \bar{\delta}}{a} - \frac{4Y}{a} \lambda(\bar{\delta}) + 4Y \int_0^{\theta(\bar{\delta})} \frac{-\varkappa(v, \bar{\delta})}{a} dv, \quad (2.1)$$

получим уравнение

$$\frac{1}{a} \iint_{\bar{A}} d(\bar{\psi}^\mu)_{\bar{\delta}, \bar{s}} dx_2 dx_3 = \mathcal{F}_{\bar{\delta}} d\frac{\bar{\delta}}{2}. \quad (2.2)$$

3. Приближенные оценки скрытой свободной энергии. Рассмотрим простейшие приближенные оценки скрытой свободной энергии микронеоднородного поля напряжений и деформаций у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния.

Аппроксимируя неизвестную свободную границу дугой окружности радиуса $\rho(\bar{\delta})$ и отрезками ломаной (рис. 4), находим

$$\varkappa(v, \bar{\delta}) = \rho(\bar{\delta}) \exp(v) - (\rho(\bar{\delta}) + a - \lambda(\bar{\delta})). \quad (3.1)$$

Угол между нормалью к свободной границе и осью x_3 в точке ее пересечения с жесткопластической границей находится в виде

$$\theta(\bar{\delta}) = \ln \left(1 + (a - \lambda(\bar{\delta})) / \rho(\bar{\delta}) \right). \quad (3.2)$$

Если $\alpha(\bar{\delta})$ есть угол раствора, определяющий указанную дугу окружности, то

$$\cos(\alpha(\bar{\delta})/2) = 1 - \lambda(\bar{\delta}) / \rho(\bar{\delta}). \quad (3.3)$$

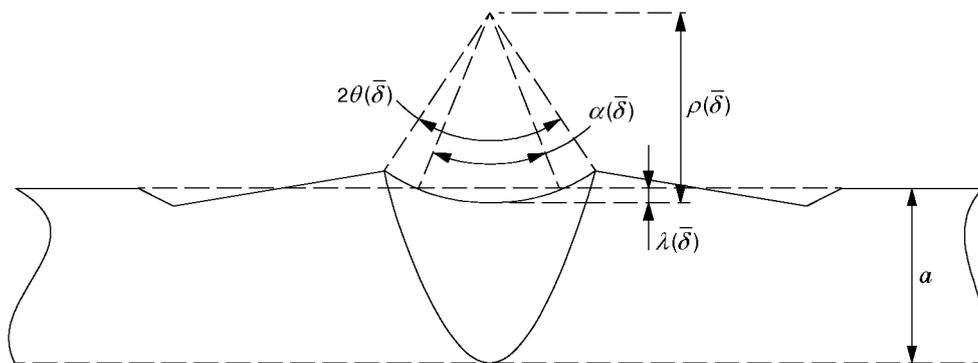


Рис. 4. Простейшая модель локализованной пластической зоны с криволинейной свободной поверхностью

Последнее вспомогательное уравнение (условие несжимаемости) может быть представлено в виде

$$2\bar{\delta}a = \rho^2(\bar{\delta})(\alpha(\bar{\delta}) - \sin \alpha(\bar{\delta})). \quad (3.4)$$

В силу (3.1) и (3.2) находим

$$4Y \int_0^{\theta(\bar{\delta})} \frac{-\alpha(v, \bar{\delta})}{a} dv = \frac{4Y}{a} \rho(\bar{\delta}) \left\{ 1 + \left(1 + \frac{a - \lambda(\bar{\delta})}{\rho(\bar{\delta})} \right) \left[\ln \left(1 + \frac{a - \lambda(\bar{\delta})}{\rho(\bar{\delta})} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (3.5)$$

Для угла $\alpha(\bar{\delta})$ примем асимптотику

$$\alpha(\bar{\delta}) = (\bar{\delta}/\Gamma)^\gamma, \quad \bar{\delta} \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

(Γ, γ — некоторые постоянные), с помощью которой из уравнения (3.4) получим

$$\rho(\bar{\delta}) = 2\sqrt{3a} \Gamma^{3\gamma/2} \bar{\delta}^{(1-3\gamma)/2}. \quad (3.7)$$

Будем считать, что $1/3 \leq \gamma \leq 1$, т. е. при $\bar{\delta} \rightarrow 0$ криволинейная свободная граница становится прямой. Можно показать также (см. (3.3), (3.6), (3.7)), что

$$\lambda(\bar{\delta}) = (\sqrt{3a}/4) \Gamma^{-\gamma/2} \bar{\delta}^{(1+\gamma)/2}. \quad (3.8)$$

На основании (3.5), (3.7) и (3.8) выражение для обобщенной силы (2.1) приобретает вид

$$\mathcal{F}_{\bar{\delta}} = -\frac{2Y\bar{\delta}}{a} - \frac{Y\sqrt{3}}{\sqrt{a}} \Gamma^{-\gamma/2} \bar{\delta}^{(1+\gamma)/2} + \frac{2Y\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \Gamma^{-3\gamma/2} \bar{\delta}^{(3\gamma-1)/2}.$$

Если $1/3 \leq \gamma \leq 1$, то главным членом в последнем асимптотическом представлении будет третье слагаемое: $\mathcal{F}_{\bar{\delta}} = (2Y\sqrt{a}/\sqrt{3})\Gamma^{-3\gamma/2}\bar{\delta}^{(3\gamma-1)/2}$.

Поскольку для предложенной аппроксимации свободной границы поле скольжения может быть построено только при условии $a - \lambda(\bar{\delta}) \leq \rho(\bar{\delta})[\exp(\pi/2) - 1]$, в силу (3.7)

$$\frac{1}{\Gamma^{3\gamma/2}} \leq \frac{2\sqrt{3}[\exp(\pi/2) - 1]}{\sqrt{a}\bar{\delta}^{(3\gamma-1)/2}}.$$

Полагая, что величина раскрытия трещины значительно меньше толщины пластины, константу Γ можно выбрать так, чтобы

$$\frac{1}{\Gamma^{3\gamma/2}} \leq \frac{2\sqrt{3}[\exp(\pi/2) - 1]}{a^{3\gamma/2}}.$$

При этом предыдущее неравенство будет заведомо удовлетворяться. Однако тогда

$$\mathcal{F}_{\bar{\delta}} = 4Y \left[\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] \left(\frac{\bar{\delta}}{a}\right)^{(3\gamma-1)/2}.$$

На основании (2.2) находим

$$\iint_{\bar{A}} (\overline{\psi^\mu})_{\hat{\omega}, \bar{s}} dx_2 dx_3 = \frac{4Y a^2 [\exp(\pi/2) - 1]}{3\gamma + 1} \left(\frac{\bar{\delta}}{a}\right)^{(3\gamma+1)/2}.$$

Правая часть последнего уравнения максимальна при $\gamma = 1/3$. Поскольку $\bar{\delta} \leq \hat{\omega}$, находим

$$\iint_{\bar{A}} (\overline{\psi^\mu})_{\hat{\omega}, \bar{s}} dx_2 dx_3 = 2Ya \left[\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] \hat{\omega}. \quad (3.9)$$

Учитывая формулу Дагдейла

$$\hat{\omega} = \frac{8Yl}{\pi E} \ln(\sec \hat{\beta}), \quad \hat{\beta} = \frac{\pi \hat{\sigma}_{22}^{\infty}}{2Y},$$

где E — модуль Юнга, окончательно получим грубую оценку скрытой свободной энергии (на единицу длины пластической зоны)

$$\iint_A (\overline{\psi^{\mu}})_{\hat{\omega}, \bar{s}} dx_2 dx_3 = \frac{16Y^2 al}{\pi E} \left[\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] \ln(\sec \hat{\beta}).$$

Уточненные оценки могут быть получены, если использовать более точные аппроксимации геометрии свободной поверхности локализованной пластической зоны.

Влияние скрытой свободной энергии, ассоциированной с микронеоднородностью пластического течения, на процесс разрушения твердых тел обсуждалось в ряде работ. Полученные к настоящему времени в этой области результаты изложены в [6]. Скрытая свободная энергия, освобождаясь, например, при циклическом нагружении трещины, практически полностью расходуется на микроразрушения элементов вблизи вершины трещины. В случае водородной коррозии охрупчивание металла у вершины трещины с одновременной деградацией его пластических свойств также приводят к растрескиванию, которое с точки зрения термодинамики представляет собой процесс выравнивания микронеоднородности напряженно-деформированного состояния локализованной пластической зоны. В любом случае указанные микроразрушения можно охарактеризовать скалярной [7] либо тензорной переменной [8], которая обычно называется поврежденностью.

Самая простая схема исследования подразумевает некоторую оценку суммарной свободной поверхности микродефектов Σ . Полагая, что накопленная скрытая энергия полностью расходуется на зарождение и развитие микродефектов, находим

$$\frac{1}{2a} \iint_A (\overline{\psi^{\mu}})_{\hat{\omega}, \bar{s}} dx_2 dx_3 = \frac{k_f \Sigma}{2\hat{c}a}, \quad (3.10)$$

где k_f — энергия, затрачиваемая на образование единицы свободной поверхности (константа Гриффитса). Отношение $\Sigma/(2\hat{c}a)$ может быть принято в качестве простейшей скалярной меры поврежденности D .

С учетом (3.9), (3.10) находим оценку поврежденности

$$D = \frac{Y}{k_f} \left[\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] \hat{\omega}, \quad (3.11)$$

которая представляет собой оценку сверху, т. е. максимально возможную поврежденность.

Поскольку для большинства металлов критическое значение поврежденности D_c , соответствующее неконтролируемому растрескиванию, заключено в пределах $0,2 \leq D_c \leq 0,8$, оценка (3.11) позволяет вычислить величину раскрытия трещины $\hat{\omega}_c$, достаточную для того, чтобы произошло неконтролируемое растрескивание пластины у вершины трещины.

На основании формулы (3.11) величина критического раскрытия трещины $\hat{\omega}_c$ вычисляется как

$$\hat{\omega}_c = \frac{D_c k_f}{Y(\exp(\pi/2) - 1)}$$

и зависит от критического значения скалярного параметра поврежденности D_c .

Следовательно, величина критического раскрытия трещины может быть почти на порядок меньше, чем это предсказывают традиционные теории (см., например, [9]), не учитывающие влияния поврежденности, локализованной у вершины трещины в пределах пластической зоны, на состояние самой трещины.

Необходимо также заметить, что приведенная выше оценка величины критического раскрытия трещины получена в предположении о *полном* освобождении скрытой свободной энергии, локализованной у вершины трещины, что подразумевает значительное охрупчивание концевой зоны (например, за счет притока атомов водорода), либо реверсивное ее деформирование (например, при циклическом нагружении). В противном случае указанная оценка величины критического раскрытия трещины не будет справедливой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
2. **Hanh G. T., Rosenfield A. R.** Local yielding and extension of crack under plane stress // Acta Metall. 1969. V. 13. P. 292–306.
3. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
4. **Зайцев Ю. В.** Механика разрушения для строителей. М.: Высш. шк., 1991. С. 73–77.
5. **Радаев Ю. Н.** Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 6. С. 69–75.
6. **Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И.** Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990.
7. **Kachanov L. M.** Introduction to continuum damage mechanics. Dordrecht; Boston; Lancaster: Martinus Nijhoff, 1986.
8. **Мураками С., Радаев Ю. Н.** Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 4. С. 93–110.
9. **Брок Д.** Основы механики разрушения. М.: Высш. шк., 1980.

*Поступила в редакцию 15/VI 1998 г.,
в окончательном варианте — 17/XI 1999 г.*
