

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТИ НЕАДИАБАТИЧЕСКОГО ПЛАМЕНИ ВБЛИЗИ ПРЕДЕЛОВ

А. Е. Медведев, С. С. Минаев*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

* Институт химической кинетики и горения СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках слабонелинейной модели, описывающей неадиабатическое пламя вблизи предела его распространения, связанного с потерями тепла, изучены стационарные состояния фронта волны горения. Образование пространственных структур фронта происходит из-за диффузионно-тепловой неустойчивости плоского пламени. Показано, что пределы распространения искривленного фронта пламени расширяются при учете диффузионно-тепловой неустойчивости — ячееистое пламя может существовать при теплотерях, превышающих критическое значение для плоского пламени. Исследуется устойчивость стационарных решений, описывающих ячееистое пламя вблизи пределов его распространения. При достаточно больших значениях теплотер получены стационарные решения для неадиабатического пламени с разрывами фронта.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что пределы распространения волны горения газовых смесей обусловлены тепловыми потерями в окружающую среду. Отвод тепла, например, через стенки трубы, в которой происходит горение, приводит к снижению температуры при удалении от зоны реакции и уменьшению нормальной скорости распространения пламени. В [1] было показано, что плоское пламя может распространяться лишь в том случае, когда понижение температуры в зоне реакции за счет теплотер не отличается от адиабатической на величину RT_b^2/E и наименьшая скорость на пределе распространения плоского пламени есть $U_{cr} = U_n/\sqrt{e}$. Здесь T_b — адиабатическая температура пламени, E — энергия активации в аррениусовской зависимости скорости реакции от температуры, R — универсальная газовая постоянная, U_n — нормальная скорость распространения плоского пламени, $e = 2,718$. Эти выражения получены в предположении, что на пределе пламя сохраняет плоскую форму. С другой стороны, известно, что действие процессов переноса (диффузии и теплопроводности) может приводить к неустойчивости плоского фронта пламени [2]. При этом локальная температура на выпуклых в сторону свежей смеси участках фронта оказывается выше адиабатической температуры плоского пламени из-за увеличенного, по сравнению с плоскими участками, диффузионного потока недостающего компонента свежей смеси. Поэтому можно предположить,

что неустойчивость пламени, приводящая к деформации фронта, расширит пределы распространения пламени [3].

В работе [4] получена система нелинейных уравнений, описывающая искривленный фронт пламени вблизи пределов распространения в предположении слабой нелинейности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu &= 0, \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{3} (\mu^2 + \nu). \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях искривленная поверхность пламени задается выражением $z = f(x, t)$ в системе отсчета, связанной с первоначально плоским фронтом $z = 0$, который распространяется по свежей смеси со скоростью U_{cr} . Свежая смесь и продукты горения заполняют области $z > f(x, t)$ и $z < f(x, t)$ соответственно, z и x — пространственные координаты, направленные нормально и вдоль фронта невозмущенного плоского пламени, $f(x, t)$ — малые возмущения фронта пламени, t — время. Безразмерная функция μ связана с локальной температурой $T(x, t)$ на искривленном фронте пламени выражением

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2e} \left(\frac{(T_b - T)E}{RT_b^2} - 1 \right), \\ \epsilon &= (1 - Le) \frac{(T_b - T_b)E}{6RT_b^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $Le = D_{th}/D$ — число Льюиса и $Le < 1$, так что имеет место случай диффузионно-

тепловой неустойчивости; D_{th} и D — коэффициенты температуропроводности и диффузии, T_0 — начальная температура свежей смеси. Единицей измерения отклонений фронта пламени от плоского состояния f и координаты z в (1) выбрана величина D_{th}/U_{cr} , время t и поперечная координата x измерялись в единицах $D_{th}/(U_{cr}^2 \epsilon)$ и $D_{th}/(U_{cr} \sqrt{\epsilon})$ соответственно.

В уравнениях (1) безразмерный параметр ν , характеризующий теплототери радиационной или кондуктивной природы, связан с безразмерной мощностью теплототери h следующим образом:

$$\nu = \frac{h - h_{cr}}{2\epsilon^2 h_{cr}}, \quad h_{cr} = \frac{1}{2\epsilon}.$$

В случае теплототери, обусловленных теплоотводом в стенки трубы (точнее, щели с размером d , так как рассматривается одномерная постановка),

$$h = \frac{K\lambda E(T_b - T_0)}{(\rho c_p U_n)^2 R T_b^2}.$$

Здесь K — коэффициент теплоотдачи, λ — коэффициент теплопроводности смеси, c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, ρ — плотность свежего газа. В случае радиационных теплототери оценка h имеет вид

$$h = \frac{4\sigma\lambda E(T_b - T_0)T_b}{l(\rho c_p U_n)^2 R}.$$

Здесь σ — постоянная Стефана — Больцмана, l — средняя длина поглощения излучения. При выводе этого выражения вместо функции, описывающей теплототери, обусловленные теплоотводом в стенки трубы $K(T - T_0)$, использовалась оценка радиационных теплототери вида

$$Q(T) = \frac{4\sigma(T^4 - T_0^4)}{l} \simeq \frac{4\sigma T_b^3(T - T_0)}{l}.$$

Определение безразмерного коэффициента h для случая радиационных или кондуктивных теплототери можно найти в [4], где приведен также вывод (1) из полной системы уравнений, описывающих пламя с теплототерями.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением стационарных решений системы (1) для искривленного фронта пламени. Ранее в [5] было показано, что при одном и том же значении параметра ν может существовать целый набор периодических стационарных решений,

описывающих ячеистый фронт пламени и отличающихся скоростью распространения. Чтобы определить, какие из этих решений реально моделируют стационарные состояния фронта пламени, выполнен линейный анализ устойчивости таких периодических решений. Показано, что при значениях теплототери $0 < \nu < \nu_{cr}$, превышающих критическое значение для плоского пламени $\nu = 0$, имеются устойчивые стационарные решения, описывающие ячеистый фронт пламени. Для таких решений скорость распространения пламени по заданному значению ν определяется однозначно. При достаточно больших значениях теплототери в работе получены решения для фронта пламени с разрывами. Такие решения, по-видимому, соответствуют случаю распада ячеистого пламени на отдельные очаги, что согласуется с результатами работы [6], в которой было выполнено прямое численное моделирование волны горения с радиационными теплототерями.

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В данном параграфе будет показано, что стационарные периодические решения системы (1), описывающие искривленный фронт пламени, могут существовать лишь при значениях теплототери, не превышающих критическую величину. Введем новые переменные $f(x, t) = 2 \ln g(x, t)$. Тогда из первого уравнения системы (1) следует выражение

$$\mu = \frac{2(g_{xx} - g_t)}{g}.$$

Такая замена переменных позволяет свести систему уравнений (1) к одному билинейному уравнению для функции $g(x, t)$:

$$\left(g_{xxxx} + g_{xx} + g_{tt} - 2g_{txx} + \frac{\nu}{6}\right)g - g_x^2 - \frac{1}{3}g_t^2 - \frac{1}{3}g_{xx}^2 + \frac{2}{3}g_t g_{xx} = 0. \quad (3)$$

Плоскому фронту пламени соответствуют решения (3) вида $f = ut$, $g = \exp(ut/2)$, при этом безразмерная скорость распространения искривленного пламени u и величина теплототери ν связаны соотношением

$$u^2 + \nu = 0$$

или в размерных величинах

$$\left(\frac{U - U_{cr}}{U_{cr}}\right)^2 + \frac{h - h_{cr}}{2h_{cr}} = 0.$$

Как показано в [5], плоский фронт пламени неустойчив относительно малых искривлений. Учет нелинейности (1) может стабилизировать неустойчивость, что приводит к образованию стационарных рельефов фронта пламени. В этом случае искривления фронта пламени вызывают изменение скорости его распространения по свежей смеси. Решения, описывающие стационарный фронт в системе отсчета, связанной с пламенем, записываются в виде

$$f(x, t) = ut + 2 \ln p(x). \quad (4)$$

В этом случае вспомогательная функция $g(x, t)$ имеет вид $g(x, t) = \exp(ut/2)p(x)$, а из (3) следует уравнение для $p(x)$:

$$\left(p_{xxxx} + \left(1 - \frac{2u}{3}\right)p_{xx} + \frac{1}{6}(u^2 + \nu)p\right)p - p_x^2 - \frac{1}{3}p_{xx}^2 = 0. \quad (5)$$

Заметим, что по определению (4) функция $p(x)$ должна быть неотрицательной. Если $p(x^*) = 0$, то в точке $x = x^*$ фронт пламени имеет разрыв $f(x^*) \rightarrow -\infty$. Билинейная форма уравнения (5) позволяет использовать интегральные оценки для нахождения области параметров ν и u , в которой уравнение (5) допускает существование периодических решений.

Пусть решение уравнения (5) есть периодическая функция с периодом L , тогда $p(x + L) = p(x)$. Кроме того, предположим, что функция $p(x)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{d^3p}{dx^3} = 0, \quad x = \pm \frac{L}{2}. \quad (6)$$

Поскольку уравнение (5) не изменяет своего вида при преобразовании $x \rightarrow x + \text{const}$, заменой переменной всегда можно добиться того, чтобы периодическая функция была определена в интервале $-L/2 \leq x \leq L/2$. Умножая (5) на $\cos(\kappa x)$, где $\kappa = 2\pi/L$ — волновое число, и интегрируя в интервале $-L/2 \leq x \leq L/2$, получим

$$\int \left(A_1 p^2 + A_2 p_x^2 + \frac{2}{3} p_{xx}^2 \right) \cos(\kappa x) dx = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$A_1 = \left(\frac{1}{6}(u^2 + \nu) + \left(\frac{u}{3} - \frac{1}{2} \right) \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{2} \right),$$

$$A_2 = 2 \left(\kappa^2 - 1 + \frac{u}{3} \right).$$

При выводе этого уравнения применялось интегрирование по частям для подынтегральных функций вида $p_{xxxx}p \cos(\kappa x)$, $p_{xx}p \cos(\kappa x)$ и использовались граничные условия (6). Если решение (5) описывает малые возмущения поверхности пламени и функция $p(x)$ записана в виде ряда по степеням малости параметра $\delta^{1/2}$:

$$p(x) = 1 + \alpha \cos(\kappa x) + O(\delta), \quad \alpha \propto O(\delta^{1/2}),$$

то уравнение (7) с точностью до $O(\delta)$ будет иметь вид

$$u^2 + \nu + 2u\kappa^2 - 3\kappa^2 + 3\kappa^4 = 0.$$

Отсюда легко получить оценку критической величины теплотеря для таких решений:

$$\nu = 9/8 - (u + \kappa^2)^2 - 2(\kappa^2 - 3/4)^2 \leq 9/8. \quad (8)$$

Следовательно, не существует периодических решений с малой амплитудой искривлений фронта при $\nu \geq \nu_{cr} = 9/8 = 1,125$. Интересно, что в работе [5] с использованием численного интегрирования системы (1) найдены периодические решения при $\nu \leq \nu_{\max} \simeq 1,13$. Критическая величина теплотеря $\nu_{\max}$, полученная в этой работе, близка к значению ν_{cr} из оценки (8), несмотря на то, что в [5] не использовалось предположение о малости возмущений фронта пламени.

Найдем максимальное значение параметра теплотеря, при превышении которого система (1) не имеет периодических решений с конечной амплитудой искривления фронта. Для этого проинтегрируем уравнение (5) по периоду функции $p(x)$ и будем считать, что $p(x)$ удовлетворяет условиям (6). После интегрирования по частям получим, что для произвольного периодического решения (5) должно выполняться равенство

$$\int \left(\frac{1}{6}(u^2 + \nu)p^2 + 2 \left(-1 + \frac{u}{3} \right) p_x^2 + \frac{2}{3} p_{xx}^2 \right) dx = 0. \quad (9)$$

Предположим теперь, что функцию $p(x)$ можно разложить в ряд Фурье, например, по косинусам:

$$p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\kappa x).$$

Тогда по теореме Парсеваля (предполагается,

что интеграл в интервале $-L/2 \leq x \leq L/2$ существует)

$$\langle p^2 \rangle = \sigma_0 = \frac{1}{L} \int p(x)^2 dx = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \quad (10)$$

Для средних значений $\langle p_x^2 \rangle$ и $\langle p_{xx}^2 \rangle$ имеем

$$\langle p_x^2 \rangle = \kappa^2 \sigma_1 = \frac{\kappa^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2, \quad (11)$$

$$\langle p_{xx}^2 \rangle = \kappa^4 \sigma_2 = \frac{\kappa^4}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2. \quad (12)$$

Учитывая выражения (10), (11), (12), из (9) получим

$$\nu = -u^2 + (12 - 4u)\kappa^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 4\kappa^4 \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \leq \frac{9\sigma_1^2}{\sigma_2\sigma_0 - \sigma_1^2}. \quad (13)$$

Далее, воспользовавшись неравенствами

$$\begin{aligned} \sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \right)^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2, \\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2} &\leq \frac{(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2)^2}{2 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \end{aligned}$$

получим оценку критического значения параметра теплопотерь для произвольного периодического решения:

$$\nu \leq \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \frac{9}{2}. \quad (14)$$

Последнее неравенство в (14) всегда выполняется, если функция $p(x)$ неотрицательна:

$$p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\kappa x) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq 0.$$

Интересно, что с возрастанием амплитуды искривления фронта пламени, которая задается коэффициентами a_n , предел распространения пламени расширяется (14). Простые оценки, проведенные в этом параграфе, позволяют найти максимально возможную величину теплопотерь (14), при которой могут существовать стационарные периодические решения.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ОПИСАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ФРОНТА ПЛАМЕНИ

Плоский фронт пламени описывается решением $p(x) = 1$, $\delta = u^2 + \nu = 0$, поэтому решение для слабо искривленного фронта можно искать в виде ряда по степеням малости $O(\delta^{1/2})$, $\delta \ll 1$:

$$p(x) = 1 + \alpha_1 \cos(\kappa x) + \alpha_2 \cos(2\kappa x) + O(\delta^{3/2}),$$

$$\alpha_1 \propto \delta^{1/2}, \quad \alpha_2 \propto \delta. \quad (15)$$

После подстановки решения (15) в (5) и приравнивания нулю выражений при одинаковых степенях малости по δ получим

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{\delta}{3\kappa^2 + \kappa^4}}, \quad \alpha_2 = \frac{\delta(\kappa^2 - 3)}{72\kappa^4(3 + \kappa^2)},$$

$$\delta = u^2 + \nu =$$

$$= \frac{72(3 + \kappa^2)\kappa^4((3/2)(1 - \kappa^2) - u)}{43\kappa^4 + 84\kappa^2 + 9}. \quad (16)$$

Эти решения впервые найдены в [5]. Там же проведено сравнение полученных аналитических результатов с результатами прямого численного моделирования системы (1). Было показано, что при $\nu < \nu_{cr} \simeq 1,13$, эти решения описывают периодические рельефы фронта пламени.

Найдем некоторые частные точные решения (5), которые удобно использовать в качестве тестовых примеров при численном моделировании. Для этого понизим порядок уравнения (5), проведя замену переменных

$$\left(\frac{dp(x)}{dx} \right)^2 = F(p). \quad (17)$$

Уравнение для $F(p)$ имеет вид

$$6pF_{ppp}F + 3pF_{pp}F_p + (6 - 4u)pF_p + (u^2 + \nu)p^2 - 12F - F_p^2 = 0. \quad (18)$$

Здесь нижние индексы означают дифференцирование по переменной p . Далее, переходя к переменным

$$\eta = \ln p, \quad F(\eta) = \exp(2\eta)\psi(\eta),$$

приведем уравнение (18) к виду

$$(6\psi_{\eta\eta\eta} + 24\psi_{\eta\eta} + 32\psi_{\eta})\psi + 3\psi_{\eta\eta}\psi_{\eta} + 8(\psi_{\eta}^2 + \psi^2 - u\psi) + (6 - 4u)\psi_{\eta} + 2(u^2 + \nu) = 0. \quad (19)$$

Заметим, что порядок этого уравнения допускает дальнейшее понижение, так как в него не входит явно переменная η . Частные решения этого уравнения имеют вид

$$\psi = c + \exp(\chi(\eta - \eta_0)). \quad (20)$$

После подстановки (20) в (19) получим

$$\chi = -\frac{7}{9} + \frac{\sqrt{13}}{9}, \quad (21)$$

$$c = \frac{4u + (2u - 3)\chi}{3\chi^3 + 12\chi^2 + 16\chi + 8},$$

$$\nu = -(u - 2c)^2. \quad (22)$$

Рельеф поверхности пламени, удовлетворяющий этим решениям, имеет вид

$$f(x) = ut + (7 \pm \sqrt{13}) \ln(\cos(\kappa x)), \quad (23)$$

$$\kappa^2 = -c\chi^2/4.$$

Как следует из (23), эти решения описывают одиночную выпуклую в сторону свежей смеси ячейку пламени в области $-\pi/2\kappa < x < \pi/2\kappa$, причем в точках $x = \pm\pi/2\kappa$ фронт пламени имеет разрыв $f(\pm\pi/2\kappa) \rightarrow -\infty$. Очевидно, что вблизи точек разрыва функции f модель (1) выходит за рамки своей применимости, так как не выполняется условие слабой нелинейности. В то же время, это решение, по-видимому, справедливо для фронта пламени вблизи максимума одиночной ячейки ($x \simeq 0$). Из (22) видно, что эти разрывные частные решения лежат в области $\nu \leq 0$. Численное решение (5) показывает, что подобные разрывные решения имеются и при положительных значениях ν . Более того, как видно из численного моделирования, при больших значениях ν уравнение (5) допускает лишь разрывные решения. По-видимому, это свидетельствует о том, что при больших теплотерях фронт пламени может разбиваться на отдельные очаги. Точные частные решения (23) также удобно использовать в качестве тестового примера для сравнения с численным решением для фронта пламени с разрывами. В качестве тестового примера для периодических решений можно использовать точное решение (5) вида

$$p(x) = 1 \pm \frac{\sqrt{3 - \kappa^2}}{\sqrt{3}} \cos(\kappa x), \quad (24)$$

$$\kappa^2 = -3 - 2u, \quad \nu = -9(u + 2)^2.$$

Интересно, что при $u < -3/2$ это решение описывает периодические рельефы поверхности, а

при $u > -3/2$ (в этом случае κ — мнимая величина) — рельеф вида

$$f(x) \simeq ut + 2 \ln(\operatorname{ch}(\kappa x)), \quad x \gg 1.$$

В этом случае пламя имеет форму угла, острие которого направлено в сторону продуктов горения.

Этот пример показывает, что наряду с периодическими решениями при одном и том же значении параметра теплотерь могут существовать решения, которые описывают поверхность пламени в виде клина. Фронт пламени принимает такую форму в случае, когда скорость потока превышает скорость плоского пламени при заданном значении параметра теплотерь. Применяя уравнение (5), можно построить периодические, разрывные решения и решение для пламени в форме клина. Покажем это на простом примере. Будем искать решения (5) со следующими условиями при $x = 0$:

$$p(0) = 1, \quad p_x(0) = 0, \quad (25)$$

$$p_{xx}(0) = \gamma, \quad p_{xxx}(0) = 0.$$

Если положить теперь, что и четвертая производная равна нулю в точке $x = 0$, из (5) следует связь кривизны поверхности в начальной точке

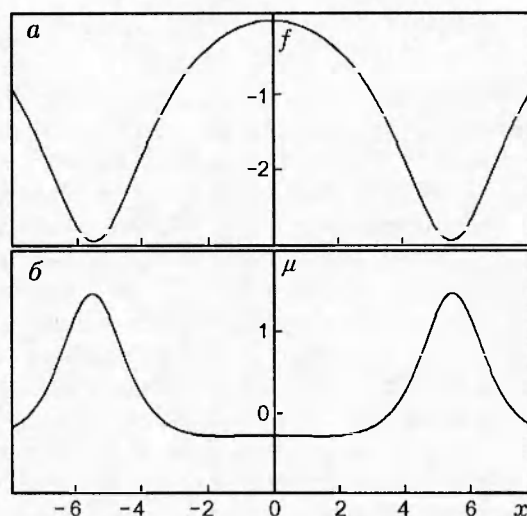


Рис. 1. Рельеф поверхности пламени $f(x)$ (а) и распределение безразмерной функции $\mu(x)$ (б), связанной с температурой фронта пламени (2), для стационарного периодического решения с начальными условиями (25) при $\nu = 0,5$, $\gamma = -0,0883$, $u = 0,1$

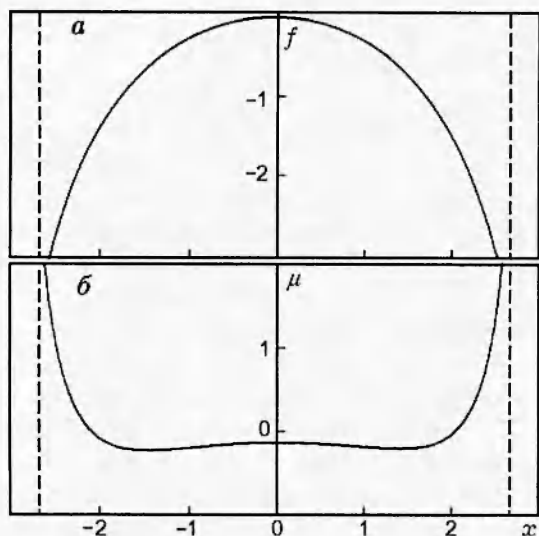


Рис. 2. Рельеф поверхности пламени $f(x)$ (а) и распределение безразмерной функции $\mu(x)$ (б) для стационарного разрывного решения с начальными условиями (25) при $\nu = 2$, $\gamma = -0,2656$, $u = -0,4$:

штриховые линии проведены через точки разрыва фронта пламени

γ с параметром теплопотерь и скоростью распространения искривленного пламени:

$$\nu = -u^2 + 2\gamma^2 + (4u - 6)\gamma, \quad p_{xxxx} = 0. \quad (26)$$

Численные расчеты по уравнению (5) с граничными условиями (25), (26) показывают, что при $\gamma > 0$ решения имеют форму клина, при некоторых значениях u и ν существуют периодические решения, а при больших значениях ν — только решения, описывающие фронт пламени с разрывами поверхности. Например, при $\nu > 2$ и при любых значениях из интервала $-3 < u < 3$ уравнение (5) с начальными условиями (25), (26) имеет только разрывные решения. При расчетах использовался метод Гира [7], и для разрывных решений, когда функция $p(x)$ обращалась в нуль в некоторой точке, численный счет обрывался при $p < 10^{-8}$. На рис. 1 приведены рельеф поверхности и распределение безразмерной функции $\mu(x)$, связанной с температурой на фронте пламени (2) для периодического решения. На рис. 2 и 3 показаны рельеф поверхности и распределение $\mu(x)$ для разрывного решения и решения в форме клина.

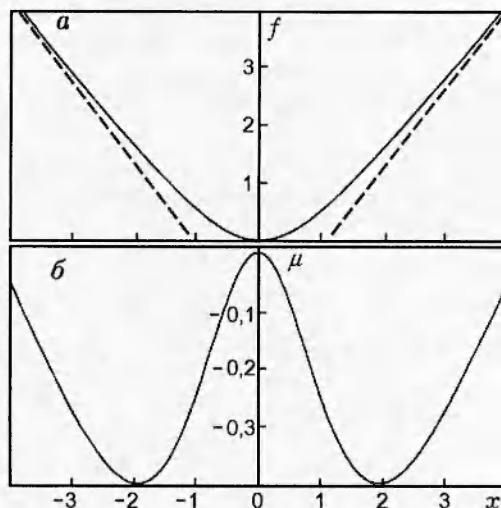


Рис. 3. Рельеф поверхности пламени $f(x)$ (а) и распределение безразмерной функции $\mu(x)$ (б) для стационарного решения в виде клина с начальными условиями (25) при $\nu = -1,4$, $\gamma = 0,6$, $u = 1,2$:

штриховые линии — асимптотические границы фронта пламени при $x \rightarrow \pm\infty$

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В этом параграфе рассматривается устойчивость относительно малых возмущений периодических решений (15), описывающих слабо искривленный фронт пламени. Подобное исследование проводилось в [8], поэтому в данной работе кратко излагается метод интегральных оценок, позволяющий выделить в плоскости параметров u, ν область, в которой существуют устойчивые периодические решения (1). Для таких решений зависимость $u(\nu)$ задается выражением (16). При фиксированном значении κ и при одном и том же значении ν возможны два состояния поверхности пламени с разной скоростью распространения u по свежей смеси. Если задан пространственный размер L физической системы, в которой происходит горение, то уравнение (3) допускает существование целого набора периодических решений с волновыми векторами $\kappa_n = 2n\pi/L \leq 1$, где n — положительное целое число.

Чтобы ответить на вопрос, какие из возможных решений (3) при заданном значении L реально моделируют стационарные состояния поверхности искривленного пламени, необходимо исследование устойчивости таких реше-

ний относительно малых возмущений. Для этого решение уравнения (3) будем искать в виде

$$g(x, t) = (p(x) + \beta(x) \exp(\omega t)) \exp \frac{ut}{2}. \quad (27)$$

Здесь $p(x)$ — стационарное решение вида (15), $\beta(x)$ — малое возмущение стационарного решения, ω — инкремент нарастания малых возмущений. После подстановки (27) в (3) и учета только линейных членов, содержащих функцию $\beta(x)$, получим линейное уравнение для возмущений стационарного рельефа $p(x)$:

$$\begin{aligned} \omega^2 \beta p + \omega \left(\frac{2}{3} (up - p_{xx}) \beta - 2p\beta_{xx} \right) + \\ + \left(\beta_{xxxx} + \left(1 - \frac{2u}{3} \right) \beta_{xx} \right) p + \\ + \left(p_{xxxx} + \left(1 - \frac{2u}{3} \right) p_{xx} + \frac{\delta}{3} p \right) \beta - \\ - \frac{2}{3} \beta_{xx} p_{xx} - 2\beta_x p_x = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Наиболее опасными с точки зрения неустойчивости являются периодические возмущения с той же длиной волны, что и стационарное решение. В этом случае стационарное решение $p(x)$ задается выражением (15), решения (28) записываются в виде ряда по степеням малости $\delta = u^2 + \nu$ ($\delta \ll 1$ по условиям задачи.) В случае симметричных возмущений $\beta(x) = \beta(-x)$ решение имеет вид

$$\beta \simeq 1 + s_1 \cos(\kappa x) + s_2 \cos(2\kappa x), \quad (29)$$

$$s_1 \propto O(\delta^{1/2}), \quad s_2 \propto O(\delta).$$

Для антисимметричных возмущений $\beta(x) = -\beta(-x)$ решение в виде ряда по степеням δ записывается как

$$\beta \simeq \sin(\kappa x) + r_1 \sin(2\kappa x) + r_2 \sin(3\kappa x), \quad (30)$$

$$r_1 \propto O(\delta^{1/2}), \quad r_2 \propto O(\delta).$$

После подстановки этих решений в (28) и приравнивания нулю выражений при одинаковых степенях малости по параметру δ получим условия устойчивости стационарных решений:

— для симметричных возмущений

$$\operatorname{Re} \omega \leq 0, \quad u \geq 0,$$

— для антисимметричных возмущений

$$\operatorname{Re} \omega \leq 0, \quad u \geq 0, \quad 3/7 \leq \kappa^2 \leq 7/5. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь устойчивость стационарных периодических решений относительно длинноволновых (характерная длина волны возмущений $2\pi n/\kappa$, $n = 2, 3, \dots, N$, больше длины волны основного решения $2\pi/\kappa$)

и коротковолновых возмущений (характерная длина волны возмущения равна $2\pi/n\kappa$, $n = 2, 3, \dots, N$). Для таких возмущений решение можно искать также в виде ряда по степеням малости $O(\delta)$, но существует и более простой способ оценки устойчивости стационарных решений. Прежде всего, заметим, что в состоянии нейтральной устойчивости ($\omega = 0$) точные решения (28) имеют вид $\beta = p$ и $\beta = p(x)\theta(x)$. Подставим в (28) решение в виде $\beta = p(x)\theta(x)$ и получившееся уравнение умножим на $\theta(x)$. Далее, интегрируя по частям в интервале $[-nL/2, nL/2]$ в случае длинноволновых возмущений (для которых функция θ имеет период nL , где $n > 1$ — целое положительное число) и в интервале $[-L/2, L/2]$ в случае коротковолновых возмущений (для которых θ — периодическая функция с периодом L/n), уравнение для θ приведем к виду

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0, \quad (32)$$

$$A = \langle p^2 \theta^2 \rangle, \quad B = 2 \langle p^2 \theta_x^2 \rangle + \frac{2}{3} \langle (up^2 - 2pp_{xx}) \theta^2 \rangle,$$

$$\begin{aligned} C = \langle p^2 \theta_{xx}^2 \rangle + \left\langle \left(2p_x^2 - \frac{10}{3} pp_{xx} - \left(1 - \frac{2}{3} u \right) p^2 \right) \theta_x^2 \right\rangle + \\ + \frac{1}{3} \langle (5(p_x p)_x - (p_{xx} p)_{xx}) \theta^2 \rangle. \end{aligned}$$

Здесь скобки $\langle \cdot \rangle$ означают интегрирование по периоду функции θ для длинноволновых уравнений и по периоду функции p для коротковолновых. Далее отбросим в выражениях для A , B , C члены с малостью $O(\delta^{1/2})$ и $O(\delta)$. Учитывая, что $(1 - 2u/3) = (1 - 2u_{\max}/3) + O(\delta) \simeq \kappa^2$, получим приближенные выражения для коэффициентов B и C :

$$B \simeq 2 \langle \theta_x^2 \rangle + \frac{2}{3} u \langle \theta^2 \rangle, \quad C = \langle \theta_{xx}^2 \rangle - \kappa^2 \langle \theta_x^2 \rangle. \quad (33)$$

Условие устойчивости, при котором все корни уравнения для ω отрицательны, имеет вид $B \geq 0$, $C \geq 0$. В случае длинноволновых возмущений, когда период функции θ равен $2n\pi/\kappa$, $n > 1$, коэффициент $C \leq -\kappa^2(1 - 1/n^2) \langle \theta_x^2 \rangle$ всегда отрицателен, и следовательно, стационарные периодические решения неустойчивы относительно длинноволновых возмущений. Что касается коротковолновых возмущений, то для них всегда выполняются условия устойчивости при $u \geq 0$ (в этом случае $B > 0$), так как коэффициент C в (32) положителен.

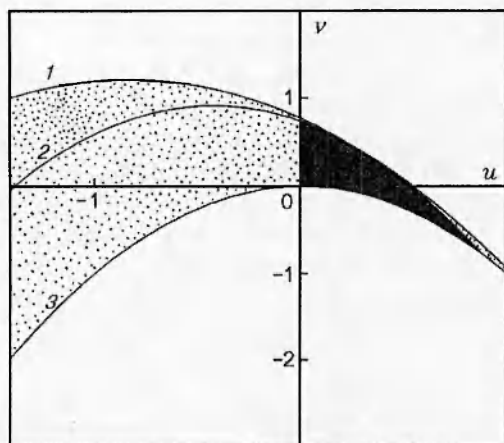


Рис. 4. Область существования периодических решений (выделена точками) и область устойчивых периодических решений (затемнена):

кривая 1 ограничивает область существования периодических решений, кривая 2 — зависимость $\nu(u)$ из выражения (16) при $\kappa = \sqrt{3/7}$, ограничивающая область существования устойчивых периодических решений, 3 — зависимость $\nu = -u^2$ для плоского пламени

Анализ устойчивости решений (15) показывает, что при заданном значении ν имеет единственное устойчивое решение. Действительно, пусть в интервале $[-L/2, L/2]$, задаваемом, например, поперечными размерами системы, в которой происходит горение, требуется найти устойчивые стационарные решения с конечной амплитудой искривления фронта. Как следует из проведенного анализа, все решения с длинами волн, равными L/n , где $n > 1$ — целое положительное число, неустойчивы относительно длинноволновых возмущений. Следовательно, устойчивым может быть только решение с наибольшей для данной физической системы длиной волны L (и, соответственно, волновым числом $\kappa = 2\pi/L$). При этом из (16) следует, что при заданных значениях κ и ν имеется два решения с разной скоростью распространения u . В то же время, из условия устойчивости этого решения относительно антисимметричных возмущений (31) устойчивым будет решение при $3/7 \leq \kappa^2 \leq 7/5$ и $u > 0$. Последнее условие однозначно определяет из выражения (16) скорость по заданному параметру теплопотерь и волновому числу. Заметим, что согласно условию (31) устойчивые стационарные решения могут существовать только в системах, поперечный размер которых удовлетворяет нера-

венству $L < 2\pi\sqrt{7/3}$. Минимальный размер системы, в которой могут существовать устойчивые стационарные структуры фронта, задается условием $u > 0$. Область существования устойчивых периодических решений в плоскости параметров ν и u приведена на рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные стационарные решения системы нелинейных эволюционных уравнений для формы поверхности пламени и его температуры, описывающих неадиабатическое пламя вблизи предела его распространения, указывают на возможность существования ячеистого пламени при теплопотерях, превышающих критическое значение для плоского пламени. Это связано с тем, что диффузионно-тепловая неустойчивость препятствует затуханию пламени из-за локального повышения температуры на выпуклых в сторону свежей смеси участках фронта. Показано, что кроме периодических стационарных решений существуют решения (1) с разрывами фронта. При достаточно больших значениях теплопотерь система (1) имеет только разрывные решения. Несмотря на то, что вблизи точек разрыва используемая слабонелинейная модель выходит за рамки своей применимости, существование разрывных решений указывает, по-видимому, на возможность распада пламени на отдельные очаги. Этот вывод согласуется с результатами работы [6], в которой выполнено численное моделирование полной системы уравнений, описывающих волну горения с радиационными теплопотерями. Если система (1) допускает устойчивые стационарные периодические решения, развитие возмущений первоначально плоского пламени может привести к образованию стационарных ячеистых структур фронта. В области параметров ν , при которых имеются неустойчивые стационарные решения, следует ожидать, что фронт пламени будет обладать сложным динамическим поведением. На это указывает неединственность стационарных решений при заданном значении теплопотерь.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS-96-1173 и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-03-32308).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Теория предела распространения тихого пламени // ЖЭТФ. 1941. Т. 11, вып. 1. С. 159–168.

2. **Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г.** О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени // ПМТФ. 1962. № 4. С. 21–26.
3. **Joulin G., Clavin P.** Linear stability analysis of the nonadiabatic flames // Combust. Flame. 1979. V. 35. P. 139–153.
4. **Joulin G., Sivashinsky G. I.** On the dynamics of nearly-extinguished non-adiabatic cellular flames // Combust. Sci. Technol. 1983. V. 31. P. 79–90.
5. **Joulin G.** Shapes, velocities and propagation limits of a non-adiabatic cellular flame // Combust. Sci. Technol. 1986. V. 47. P. 69–79.
6. **Kagan L., Sivashinsky G.I.** Self-fragmentation of non-adiabatic cellular flames // Combust. Flame. 1997. V. 108. P. 220–226.
7. **Gear C. W.** The automatic integration of ordinary differential equations // Commun. ACM. 1971. V. 14, N 3. P. 176–179.
8. **Sinay L., Williams F. A.** Stability of nonadiabatic cellular flames near extinction, in dynamics of gaseous combustion // Progress in Astronautics and Aeronautics. V. 151 / A. I. Kuhl, J.-C. Leyer, A. A. Borisov and W. A. Sirignano (Eds). Washington, DC: AIAA, 1993. P. 263–273.

*Поступила в редакцию 20/VII 1998 г.,
в окончательном варианте — 28/X 1998 г.*