которая в данном методе определяется непосредственно. Метод может быть применен к телам сложной формы с трещинами, также имеющими сложную форму.

Поступила 5 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Irwin G. R.** Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.— «J. Appl. Mech.», 1957, vol. 24, N 3, p. 361.
2. **Sih G., Paris P., Erdogan F.** Crack-tip, stress intensity factors for plane extension and plate bending problems.— «J. Appl. Mech.», 1962, vol. 29 E, N 2.
3. **Парис П., Си Дж.** Анализ напряженного состояния около трещин.— В кн.: Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968, с. 64—142.
4. **Французова Л. П.** Экспериментальное исследование распространения трещин на модели слоистого пластика.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 19—20. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974. с. 141—145.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Г. В. Иванов

(*Новосибирск*)

В данной работе показано, что предложенный в [1] метод решения плоской смешанной задачи теории упругости может быть применен и при решении осесимметричной смешанной задачи для полого упругого цилиндра.

1. Формулировка задачи. При осесимметричной упругой деформации уравнения равновесия и закон Гука можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}+\gamma_1=0,\quad \frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}-t+\gamma_2=0,$$

$$p-r\left(\lambda\varepsilon+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\quad q-r\left(\lambda\varepsilon+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,$$

$$\tau-\mu r\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,\quad t-\lambda\varepsilon-2\mu\frac{v}{r}=0,$$

где

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{v}{r},\quad \lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad 0\leqslant\nu<\frac{1}{2},\quad E,\mu>0,$$

$$p=r\sigma_z,\ q=r\sigma_r,\ \tau=r\sigma_{rz},\ t=\sigma_\varphi,\ u=u_z,\ v=u_r,$$

$$x=z-z_0,\ y=r-r_0;$$

r, φ, z —цилиндрические координаты; σ_r, σ_φ, σ_z, σ_{rz}, u_r, u_z — комноненты тензора напряжений и вектора смещений в цилиндрической системе координат; γ_1, γ_2 — массовые силы; z_0, r_0 — постоянные; Е — модуль Юнга; μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Ограничимся случаем, когда $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $r_0 > 1$ и преобразованием искомых функций задача сводится к отысканию функций p, q, τ, t, u, v, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} - t + f_2 = 0,$$

$$p - r\left(\lambda\varepsilon + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_3 = 0, \quad q - r\left(\lambda\varepsilon + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + f_4 = 0,$$

$$\tau - \mu r\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + f_5 = 0, \quad t - \lambda\varepsilon - 2\mu\frac{v}{r} = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{r}$$

и нулевым граничным условиям

$$(pu)_{x=\pm 1} = (qv)_{y=\pm 1} = (\tau v)_{x=\pm 1} = (\tau u)_{y=\pm 1} = 0, \tag{1.1}$$

где f_α, $\alpha = 1, \ldots, 5$ — известные квадратично-суммируемые по $\Omega = \{x, y | x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$ функции. Полагаем, что в каждом из равенств (1.1) одна из перемножаемых функций равна нулю на всей стороне квадрата.

Если в случае перемещения цилиндра как абсолютно твердого тела из граничных условий (1.1) не следует равенство $u = 0$, то условия (1.1) будем дополнять уравнением

$$\int_\Omega u d\Omega = 0. \tag{1.2}$$

В этом случае функция f_1 не может быть произвольной, она должна удовлетворять условию

$$\int_\Omega f_1 d\Omega = 0.$$

2. Приближенное решение. Обозначим

$$p^{nm} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} p_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad q^{nm} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} q_{ki}^{nm} P_k Q_i, \tag{2.1}$$

$$\tau_1^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m+1} \tau_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad \tau_2^{nm} = \sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{m-1} \tau_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

$$u_0^{nm} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} u_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad v_0^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} v_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

$$u_1^{nm} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m+1} u_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad v_1^{nm} = \sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{m} v_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

$$u_2^{nm} = \sum_{k=0}^{n+2}\sum_{i=0}^{m-1} u_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad v_2^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m+2} v_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

$$t^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} t_{ki}^{nm} P_k Q_i.$$

Здесь $n, m \geqslant 1$; p_{ki}^{nm}, q_{ki}^{nm}, τ_{ki}^{nm}, u_{ki}^{nm}, v_{ki}^{nm}, t_{ki}^{nm} — постоянные; $P_k = P_k(y)$,

$Q_i = Q_i(x)$ — полиномы Лежандра, ортогональные на промежутке $[-1,1]$; k, i — степени полиномов.

Потребуем, чтобы функции (2.1) удовлетворяли уравнениям

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial p^{nm}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_2^{nm}}{\partial y}+f_1\right)P_kQ_i d\Omega=0,\ k=0,1,\ldots,n,\ i=0,1,\ldots,m-1; \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_1^{nm}}{\partial x}+\frac{\partial q^{nm}}{\partial y}-t^{nm}+f_2\right)P_kQ_i d\Omega=0,$$

$$k=0,1,\ldots,n-1,\ i=0,1,\ldots,m;$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[p^{nm}-r\left(\lambda\varepsilon^{nm}+2\mu\frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x}\right)+f_3\right]P_kQ_i d\Omega=0,$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[q^{nm}-r\left(\lambda\varepsilon^{nm}+2\mu\frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y}\right)+f_4\right]P_kQ_i d\Omega=0,$$

$$k=0,1,\ldots,n,\ i=0,1,\ldots,m;$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\tau_2^{nm}-\mu r\left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y}+\frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}\right)+f_5\right]P_kQ_i d\Omega=0,$$

$$k=0,1,\ldots,n+1,\ i=0,1,\ldots,m-1;$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\tau_1^{nm}-\mu r\left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y}+\frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}\right)+f_5\right]P_kQ_i d\Omega=0,$$

$$k=0,1,\ldots,n-1,\ i=0,1,\ldots,m+1;$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(t^{nm}-\lambda\varepsilon^{nm}-2\mu\frac{v_0^{nm}}{r}\right)P_kQ_i d\Omega=0,$$

$$k=0,1,\ldots,n-1,\ i=0,1,\ldots,m,$$

$$\varepsilon^{nm}=\frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x}+\frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y}+\frac{v_0^{nm}}{r},\quad r=r_0+y,\quad r_0>1$$

и нулевым граничным условиям

$$(p^{nm}u_1^{nm})_{x=\pm1}=(q^{nm}v_1^{nm})_{y=\pm1}=(\tau_1^{nm}v_2^{nm})_{x=\pm1}=(\tau_2^{nm}u_2^{nm})_{y=\pm1}=0. \tag{2.3}$$

Предполагается, что в каждом из равенств (2.3) один из сомножителей (тот же, что и в (1.1)) равен нулю на всей стороне квадрата.

Если формулировка задачи содержит уравнение (1.2), то в системе (2.2) уравнение

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial p^{nm}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_2^{nm}}{\partial y}+f_1\right)d\Omega=0$$

заменяется равенством $u_{00}^{nm}=0$.

Уравнения (2.2), (2.3) образуют замкнутую систему относительно постоянных в функциях (2.1).

Из (2.2), (2.3) находим

$$\int_\Omega \left[f_1 u_0^{nm} + f_2 v_0^{nm} + f_3 \frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x} + f_4 \frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y} + f_5 \left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x} \right) \right] d\Omega = \int_\Omega g_{nm} r d\Omega, \tag{2.4}$$

$$g_{nm} = \lambda (\varepsilon^{nm})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{v_0^{nm}}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Так как $r \geqslant r_0 - 1$, то

$$\mathrm{E}_{nm} = \int_\Omega g_{nm} d\Omega \leqslant \frac{1}{r_0 - 1} \int_\Omega g_{nm} r d\Omega. \tag{2.5}$$

Используя неравенства (4.8), (4.10), (4.11) работы [1], можно доказать, что

$$\max \{ \| u_1^{nm} \|, \| u_2^{nm} \|, \| v_1^{nm} \|, \| v_2^{nm} \| \} \leqslant C \mathrm{E}_{nm}^{1/2}, \tag{2.6}$$

где символ $\| \ \|$ означает норму в $L_2(\Omega)$. Буквой C в (2.6) обозначена постоянная, не зависящая от n, m. Из (2.3)—(2.6) находим, что нулевое решение однородной системы уравнений (2.2), (2.3) единственное и, следовательно, определитель этой системы отличен от нуля.

Функции (2.1), удовлетворяющие системе (2.2), (2.3),— приближенное решение смешанной задачи для полого цилиндра. Функции p^{nm}, q^{nm} — приближение функций p, q. Функции τ_1^{nm}, τ_2^{nm} можно рассматривать как приближение умноженных на r касательных напряжений на площадках с нормалями, направленными по осям z и r соответственно. Закону парности касательных напряжений τ_1^{nm}, τ_2^{nm} удовлетворяют приближенно

$$\int_\Omega \left(\tau_1^{nm} - \tau_2^{nm} \right) P_k Q_i d\Omega = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \ i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

В качестве приближения функции τ можно рассматривать и функцию

$$\tau^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m+1} \tau_{ki}^{nm} P_k Q_i + \sum_{k=n}^{n+1} \sum_{i=0}^{m-1} \tau_{ki}^{nm} P_k Q_i.$$

Очевидно, τ^{nm} удовлетворяет уравнениям (2.2), если вместо τ_1^{nm}, τ_2^{nm} подставить τ^{nm}, и удовлетворяет приближенно, как это указано в (2.3), граничным условиям (1.1) для τ.

3. Сходимость приближенных решений. Обобщенным решением смешанной задачи для полого упругого цилиндра назовем функции p, q, τ, u, v, удовлетворяющие уравнениям

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + f_1 \right) \omega_1 d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} - t + f_2 \right) \omega_2 d\Omega = 0, \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega \left[q - r \left(\lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f_4 \right] \omega_4 d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \left[p - r \left(\lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_3 \right] \omega_3 d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left(t - \lambda\varepsilon - 2\mu\frac{v}{r}\right)\omega_6 d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \left[\tau - \mu r\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + f_5\right]\omega_5 d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial p_*}{\partial x}u + p_*\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial q_*}{\partial y}v + q_*\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial \tau_*}{\partial y}u + \frac{\partial \tau_*}{\partial x}v + \tau_*\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left(p\frac{\partial u_*}{\partial x} + \tau\frac{\partial u_*}{\partial y} - f_1 u_*\right)d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \left[\tau\frac{\partial v_*}{\partial x} + q\frac{\partial v_*}{\partial y} + (t - f_2)v_*\right]d\Omega = 0$$

и неравенству

$$\int_\Omega \left[f_1 u + f_2 v + f_3\frac{\partial u}{\partial x} + f_4\frac{\partial v}{\partial y} + f_5\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]d\Omega \geqslant \tag{3.2}$$

$$\geqslant \int_\Omega \left\{\lambda\varepsilon^2 + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\} r d\Omega,$$

где

$$\varepsilon = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + v/r,$$

ω_k, $k = 1, 2, \ldots, 6$ — произвольные функции из $L_2(\Omega)$. p_*, q_*, τ_*, u_*, v_* — произвольные функции, удовлетворяющие условиям

$$(p_* u_*)_{x=\pm 1} = (q_* v_*)_{y=\pm 1} = (\tau_* v_*)_{x=\pm 1} = (\tau_* u_*)_{y=\pm 1} = 0, \tag{3.3}$$

$$p_*, \ q_*, \ \frac{\partial p_*}{\partial x}, \ \frac{\partial q_*}{\partial y} \in L_2(\Omega),$$

$$\tau_*, \ u_*, \ v_* \in W_2^1(\Omega).$$

Предполагается, что p, q, τ, u, v имеют те квадратично-суммируемые по Ω обобщенные производные и обобщенные суммы производных, которые входят в (3.1), (3.2), один из сомножителей в (3.3) (тот же, что и в (1.1)) равен нулю на всей стороне квадрата.

Из последовательности решений (2.1) можно извлечь подпоследовательность, которая сходится слабо в $L_2(\Omega)$ к обобщенному решению. Если существует обобщенное решение, удовлетворяющее условиям (3.3), то к нему сходится вся последовательность решений (2.1) при n, $m \to \infty$. Эти утверждения доказываются так же, как аналогичные утверждения в [1].

4. Сведение задачи к последовательности краевых задач для обыкновенных уравнений. Обозначим

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k^n P_k, \quad q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k^n P_k, \quad \tau'_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k^n P_k, \tag{4.1}$$

$$\tau''_n = \sum_{k=0}^{n+1} \tau_k^n P_k, \quad u'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^n P_k, \quad u''_n = \sum_{k=0}^{n+2} u_k^n P_k,$$

$$v'_n = \sum_{k=0}^{n+1} v_k^n P_k, \quad v''_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k^n P_k, \quad t_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k^n P_k,$$

где p_k^n, q_k^n, τ_k^n, u_k^n, v_k^n, t_k^n — функции x; $P_k = P_k(y)$ — полиномы Лежандра; k — степень полинома.

Приближенное решение смешанной задачи для полого упругого цилиндра ищем в виде функций (4.1), удовлетворяющих уравнениям

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x}+\frac{\partial \tau''_n}{\partial y}+f_1\right)P_k dy=0, \tag{4.2}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[p_n-r\left(\lambda\varepsilon_n+2\mu\frac{\partial u'_n}{\partial x}\right)+f_3\right]P_k dy=0,$$

$$\int_{-1}^{1}\left[q_n-r\left(\lambda\varepsilon_n+2\mu\frac{\partial v'_n}{\partial y}\right)+f_4\right]P_k dy=0,\quad k=0,1,\ldots,n;$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\tau''_n-\mu r\left(\frac{\partial u''_n}{\partial y}+\frac{\partial v''_n}{\partial x}\right)+f_5\right]P_k dy=0,\quad k=0,1,\ldots,n+1;$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial \tau'_n}{\partial x}+\frac{\partial q_n}{\partial y}-t_n+f_2\right)P_k dy=0,$$

$$\int_{-1}^{1}\left(t_n-\lambda\varepsilon_n-2\mu\frac{v''_n}{r}\right)P_k dy=0,$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\tau'_n-\mu r\left(\frac{\partial u''_n}{\partial y}+\frac{\partial v''_n}{\partial x}\right)+f_5\right]dy=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

$$\varepsilon_n=\frac{\partial u'_n}{\partial x}+\frac{\partial v'_n}{\partial y}+\frac{v''_n}{r}$$

и граничным условиям

$$(q_n v'_n)_{y=\pm1}=(\tau''_n u''_n)_{y=\pm1}=0; \tag{4.3}$$

$$(p_n^n u_n^n)_{x=\pm1}=(p_k^n u_k^n)_{x=\pm1}=(\tau_k^n v_k^n)_{x=\pm1}=0, \tag{4.4}$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Предполагается, что в каждом из равенств (4.3) один из сомножителей (тот же, что и в (1.1)) равен нулю на всей стороне квадрата.

Если формулировка задачи содержит уравнение (1.2), то система (4.2), (4.3) дополняется уравнением

$$\int_{-1}^{1} u_0^n dx=0.$$

Можно ввести понятие обобщенного решения краевой задачи для уравнений (4.2), (4.3) при граничных условиях (4.4), аналогичное соответствующему понятию в [1]. Доказательства существования и единственности этого обобщенного решения, сходимости его к обобщенному решению смешанной задачи для полого упругого цилиндра аналогичны соответствующим доказательствам в [1].

Поступила 6 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра.— ПМТФ, 1976, № 6.

УДК 539.37

К ВОПРОСУ О ПЛОСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ И РАЗУПРОЧНЯЮЩИХСЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин

(*Новосибирск*)

1. Классическое описание кинематики деформирования сплошной среды базируется на предположении о достаточной гладкости поля перемещений. Предположение о гладкости позволяет ввести понятие тензора деформаций и использовать аппарат дифференциальных уравнений для описания деформирования среды. Однако существуют широкие классы движений среды, в которых поле перемещений не обладает достаточной гладкостью. Для твердых тел негладкость поля смещений может быть связана с появлением пластической деформации. Эксперименты с различными материалами показывают, что механизм пластической деформации связан с локализацией сдвигов вдоль определенных поверхностей [1, 2]. Последнее означает, что на указанных поверхностях вектор перемещений испытывает сильный разрыв. В общем случае это обстоятельство оказывается существенным и должно учитываться при описании пластического деформирования. Принимая некоторые оправданные с механической точки зрения ограничения, негладкое поле смещений можно описать достаточно простыми средствами с помощью совокупности гладких функций.

Рассмотрим в качестве иллюстрации случай одной функции одного переменного. Обозначим через $F(x)$ исходную функцию, имеющую сильные разрывы в точках x_i. Предположим, что расстояния между точками разрыва малы, между точками разрыва функция $F(x)$ достаточно гладка, значения производных $F(x)$ справа и слева от точек разрыва равны между собой, т. е. функция

$$p(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{при } x \neq x_i, \\ F'(x_i \pm 0) & \text{при } x = x_i \end{cases}$$

достаточно гладка.

Пусть $f(x)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $f(x_i) = F(x_i + 0)$ и $P(x) = \int p(x)\,dx$. Тогда исходную функцию $F(x)$ можно характеризовать парой гладких функций ($f(x)$, $P(x)$) и последовательностью точек разрыва x_i (фиг. 1). Функция $f(x)$ имеет смысл осреднения исходной функции и характеризует с определенной точностью значения $F(x)$ во всей области определения. Функция $P'(x) - f'(x)$ характеризует различие в локальном поведении исходной и осредненной функций и при заданных точках разрыва определяет величины скачков исходной функции. Так, скачок функции $F(x)$ в точке x_{i+1} с точностью до l_i^2 равен