

УДК 519.6

## Сходимость численных спектральных моделей поверхности морского волнения\*

К.В. Литвенко<sup>1</sup>, С.М. Пригарин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: litchristina@gmail.com (Литвенко К.В.), sergeim.prigarin@gmail.com (Пригарин С.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 13, 2020.

**Литвенко К.В., Пригарин С.М.** Сходимость численных спектральных моделей поверхности морского волнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 1. — С. 53–67.

Работа посвящена исследованию сходимости спектральных и условных спектральных моделей, которые используются для моделирования стохастической структуры поверхности морского волнения и гигантских океанических волн. Изучается сходимость пространственно-временных и пространственных моделей.

**DOI:** 10.15372/SJNM20200104

**Ключевые слова:** моделирование случайных полей, спектральные модели, сходимость, моделирование поверхности морского волнения, гигантские океанические волны.

**Litvenko K.V. and Prigarin S.M.** Convergence of numerical spectral models of the sea surface undulation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 1. — P. 53–67.

This paper deals with the convergence of spectral and conditional spectral models that are used to simulate a stochastic structure of the sea surface undulation and rogue ocean waves. We study the convergence of spatial-temporal and spatial models.

**Keywords:** simulation of random fields, spectral models, convergence, sea surface simulation, extreme ocean waves, rogue waves.

---

## Введение

Экспериментальные данные о статистических свойствах морского ветрового волнения свидетельствуют, что оно с высокой точностью может быть описано однородным гауссовским случайным полем возвышений относительно среднего уровня, статистические свойства которого оцениваются по наблюдениям [1–3]. Эффективный подход к построению численных алгоритмов моделирования однородных гауссовских случайных полей был в свое время разработан на основе спектрального разложения (см. работы [3–6]). Вычислительные спектральные модели поверхности морского волнения получили широкое распространение при решении ряда прикладных задач. В частности, работы [7–9] связаны с оптикой океана, в работе [5] рассматривается влияние спектра волнения на морские стационарные платформы, в работе [10] исследуется влияние рельефа морской

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00159).

поверхности на управление летательными аппаратами, а в работах [6, 11] численные условные спектральные модели используются для исследования морского волнения с аномально высокими волнами-убийцами. При построении спектральных моделей приходится решать проблемы, связанные со сходимостью и оптимизацией, которые часто оказываются сложно формализуемыми и весьма трудоемкими. Зачастую параметры моделей определяются “правдоподобностью” полученных результатов, либо возможностями вычислительной техники.

В работе представлены достаточные условия сходимости для широкого класса спектральных моделей поверхности морского волнения и условных спектральных моделей морского волнения с аномально высокими волнами.

## 1. Общие результаты о сходимости спектральных моделей

Сходимость спектральных моделей однородных гауссовских случайных полей исследовалась в ряде работ (см., например, [10, 12–18]). Ниже мы приведем формулировки результатов, которые затем будут использованы для изучения сходимости алгоритмов численного моделирования поверхности морского волнения.

Рассмотрим  $w(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ , — вещественное однородное гауссовское случайное поле с нулевым средним. Спектральные представления случайного поля  $w(x)$  и его корреляционной функции  $R(x)$  имеют следующий вид [19]:

$$w(x) = \int_{\Lambda} \cos\langle x, \lambda \rangle \xi(d\lambda) + \int_{\Lambda} \sin\langle x, \lambda \rangle \eta(d\lambda), \quad (1)$$

$$R(x) = \int_{\Lambda} \cos\langle x, \lambda \rangle \mu(d\lambda). \quad (2)$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение в  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mu(d\lambda)$  — спектральная мера случайного поля  $w(x)$ ,  $\Lambda$  — носитель спектральной меры  $\mu(d\lambda)$ ;  $\xi(d\lambda)$ ,  $\eta(d\lambda)$  — вещественные ортогональные стохастические гауссовские меры. Без ограничения общности далее мы будем предполагать, что носитель спектральной меры содержится в полупространстве  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^k$ ,

$$\mathbb{P} \cap (-\mathbb{P}) = \{0\}, \quad \mathbb{P} \cup (-\mathbb{P}) = \mathbb{R}^k.$$

Носитель спектральной меры  $\Lambda$  мы будем называть *спектральным пространством случайного поля*  $w(x)$ . Для дисперсии случайного поля выполнено

$$Vw(x) = R(0) = \mu(\Lambda).$$

Простейшей *нерандомизированной спектральной моделью* является аппроксимация интеграла (1) конечной суммой случайных гармоник:

$$w_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j [\xi_j \cos\langle \lambda_j, x \rangle + \eta_j \sin\langle \lambda_j, x \rangle], \quad \lambda_j \in Q_j, \quad a_j^2 = \mu(Q_j), \quad (3)$$

где  $n$  — число гармоник,  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  — независимые стандартные нормальные случайные величины, векторы  $\lambda_j$  неслучайны и выбираются в соответствующих множествах  $Q_j$  таких, что

$$\Lambda_n = \sum_{j=1}^n Q_j, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Здесь мы предполагаем, что множества  $\Lambda_n$  сходятся к спектральному пространству  $\Lambda$  в том смысле, что

$$\mu(\Lambda_n) \longrightarrow \mu(\Lambda). \quad (4)$$

Случайное поле  $w_n$  для нерандомизированной спектральной модели является гауссовским, а его корреляционная функция  $R_n$  записывается в виде:

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j^2 \cos\langle \lambda_j, x \rangle. \quad (5)$$

*Рандомизированная спектральная модель с разбиением* спектрального пространства, предложенная в работе [12], также имеет вид (3), однако векторы  $\lambda_j$  выбираются в множествах  $Q_j$  случайным образом в соответствии с вероятностными распределениями  $\mu(d\lambda)/a_j^2$ .

*Рандомизированная спектральная модель без разбиения* спектрального пространства описывается следующим образом [10]:

$$w_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j [\xi_j \cos\langle \lambda_j, x \rangle + \eta_j \sin\langle \lambda_j, x \rangle], \quad \lambda_j \in \Lambda_n, \quad a_j = \sqrt{\frac{\mu(\Lambda_n)}{n}}, \quad (6)$$

где  $n$  — число гармоник,  $\xi_j, \eta_j$  — независимые стандартные нормальные случайные величины, а случайные векторы  $\lambda_j$  независимы и имеют одинаковое вероятностное распределение на  $\Lambda_n$ , пропорциональное спектральной мере  $\mu$ .

Для корреляционной функции  $R_n(x)$  рандомизированных спектральных моделей  $w_n(x)$  (с разбиением и без разбиения спектрального пространства) выполнено:

$$R_n(x) = \int_{\Lambda_n} \cos\langle x, \lambda \rangle \mu(d\lambda).$$

Множество  $\Lambda_n$  далее мы будем называть *спектральным пространством модели  $w_n$* .

**Замечание 1.** Запись формул (3), (6) является в некотором смысле упрощенной, так как формально значения  $a_j, \xi_j, \eta_j, \lambda_j$  и множества  $Q_j$  в этих формулах зависят от  $n$ .

**Замечание 2.** Рандомизированные спектральные модели часто являются более предпочтительными, так как они позволяют в точности воспроизвести спектр случайного поля (хотя при этом свойство гауссовости, в отличие от нерандомизированных моделей, выполняется лишь асимптотически).

**Замечание 3.** В данной работе мы рассматриваем основные классы спектральных моделей, которые могут быть использованы для численного моделирования взволнованной морской поверхности. Более детальную информацию о различных модификациях спектральных моделей можно найти, например, в [15].

### 1.1. Сходимость спектральных моделей трех типов

Далее мы будем предполагать, что спектральное пространство случайного поля ограничено. Применительно к моделям морского волнения это означает, что нас интересуют достаточно крупные волны (например волны, которые оказывают заметное влияние на морские сооружения или движение морских судов) и можно игнорировать наличие волн пренебрежимо малой длины. Следующее утверждение можно получить как следствие результатов из [15, 20] и [21].

**Лемма 1.** Пусть  $w(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ , — гауссовское вещественное однородное случайное поле с нулевым средним, спектральной мерой  $\mu$  и ограниченным спектральным пространством  $\Lambda$ . Рассмотрим три спектральные модели  $w_n$  поля  $w$ : нерандомизированную, рандомизированную с разбиением и без разбиения спектрального пространства  $\Lambda$  (см. формулы (3) и (6)). Предположим, что выполнено (4), а для модели (3) (нерандомизированной и рандомизированной с разбиением спектрального пространства) выполнено

$$\max_{i \leq n} \text{diam}(Q_i) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

тогда при  $n \rightarrow \infty$  для всех трех моделей выполнено:

1.  $w_n$  сходятся к  $w$  в смысле сходимости конечномерных распределений;
2.  $w_n$  слабо сходятся к  $w$  в пространстве  $\mathbb{C}^p(K)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ ;
3.  $w_n$  слабо сходятся к  $w$  в пространстве  $\mathbb{L}^p(K)$ ,  $p \geq 1$ .

Через  $K$  здесь обозначен произвольный компакт в  $\mathbb{R}^k$  и

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} |x - y| \text{ — диаметр множества } A.$$

В работах [15, 20, 21] получены более общие результаты без требования ограниченности спектральной области. Представим краткие пояснения к лемме 1. Сходимость конечномерных распределений для спектральной модели без разбиения спектрального пространства следует из центральной предельной теоремы. Условия (4), (7) обеспечивают сходимость корреляционной функции (5) нерандомизированной спектральной модели с разбиением спектрального пространства к корреляционной функции (2) предельного поля  $w(x)$  для произвольного выбора неслучайных векторов  $\lambda_j \in Q_j$ . В силу гауссовости распределений это означает сходимость конечномерных распределений. Последовательность конечномерных распределений рандомизированной спектральной модели с разбиением спектрального пространства представляет собой последовательность смесей гауссовских распределений. Причем все гауссовские распределения, входящие в смесь, сходятся к одному предельному распределению. Таким образом, и смесь сходящихся гауссовских распределений, очевидно, сходится к тому же распределению. Это доказывает сходимость конечномерных распределений для рандомизированной спектральной модели с разбиением спектрального пространства.

Слабая сходимость спектральных моделей в пространствах непрерывно дифференцируемых функций следует из сходимости конечномерных распределений и условия слабой компактности. Достаточным для слабой компактности однородных случайных полей  $w_n$  является ограниченность спектральных моментов (см. [20, лемма 3]):

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^k} |\lambda|^{2p+\beta} \mu_n(d\lambda) < \infty.$$

Через  $\mu_n$  здесь обозначены спектральные меры полей  $w_n$ ,  $\beta = 2([k/2] + 1)$  ( $[\cdot]$  — целая часть числа). В силу сделанного предположения об ограниченности спектрального пространства условия слабой компактности спектральных моделей  $w_n$  выполняются и, таким образом, слабая сходимость спектральных моделей в пространствах непрерывно дифференцируемых функций доказана.

Слабая сходимость спектральных моделей в пространствах интегрируемых функций вытекает из результатов работы [21]. В этой работе доказано, что для слабой сходимости последовательности случайных полей  $w_n$  в пространствах  $\mathbb{L}^p(K)$ ,  $p \geq 1$ , достаточно

сходимости конечномерных распределений и выполнения условий  $E|w_n(x)|^p \rightarrow E|w(x)|^p$ ,  $\sup_n \sup_x E|w_n(x)|^p < \infty$ , которые, очевидно, выполнены для рассматриваемых спектральных моделей.

#### Замечание 4.

- (1) Слабая сходимость приближенных случайных моделей (в функциональном пространстве  $F$ ) представляет особый интерес при решении задач методом Монте-Карло, так как она означает сходимость средних

$$Ef(w_n) \rightarrow Ef(w) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для любого измеримого (на  $F$ ) функционала  $f$  такого, что случайные величины  $f(w_n)$  равномерно интегрируемы и  $P(w \in D_f) = 0$ , где  $D_f$  — множество точек разрыва функционала  $f$  [22].

- (2) Для рандомизированных спектральных моделей с разбиением спектрального пространства вместо условия (7) можно потребовать (см. [15])

$$\max_{j \leq n} \mu(Q_j) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

- (3) Другие виды сходимости спектральных моделей и, в частности, сходимость в среднем квадратичном исследовалась в работах [13, 14, 16, 17].

## 1.2. Условные спектральные модели

Гауссовское случайное поле  $w(x)$  при дополнительном условии

$$w(x_l) = b_l, \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}, \quad (8)$$

будем обозначать через  $w^{\text{cond}}(x)$ . Здесь  $L$  — число точек, в которых известны значения случайного поля  $w(x)$ . Далее для простоты будем предполагать, что корреляционная матрица случайного вектора  $(w(x_1), \dots, w(x_L))$  является невырожденной.

Спектральная модель случайного поля  $w^{\text{cond}}$  строится по формуле:

$$w_n^{\text{cond}}(x) = \sum_{j=1}^n a_j [\xi_j \cos\langle \lambda_j, x \rangle + \eta_j \sin\langle \lambda_j, x \rangle]. \quad (9)$$

Сначала, также как и для “безусловных” моделей (3), (6), вычисляются значения  $a_j$ ,  $\lambda_j$ . Отличие состоит в моделировании случайных величин  $\xi_j$ ,  $\eta_j$ . Теперь эти величины моделируются таким образом, что случайный вектор

$$\zeta = (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)^\top$$

является гауссовским с математическим ожиданием  $A^+b$  и корреляционной матрицей  $I - A^+A$ , где

$$A = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} & q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{L1} & \dots & p_{Ln} & q_{L1} & \dots & q_{Ln} \end{bmatrix},$$

$$p_{lj} = a_j \cos\langle \lambda_j, x_l \rangle, \quad q_{lj} = a_j \sin\langle \lambda_j, x_l \rangle,$$

$$b = (b_1, \dots, b_L)^\top.$$

Здесь  $A^+$  — псевдообратная к матрице  $A$ . Известно [15, 18, 23], что такой выбор случайных величин  $\xi_j, \eta_j$  минимизирует значение

$$\sum_{l=1}^L [w_n(x_l) - b_l]^2$$

при фиксированных значениях  $a_j, \lambda_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Соответствующую модель (9) будем называть *условной спектральной моделью* и обозначать через  $w_n^{\text{cond}}(x)$ . Аналогично “безусловным” спектральным моделям будем рассматривать три типа условных спектральных моделей: нерандомизированные, рандомизированные с разбиением и без разбиения спектрального пространства.

**Лемма 2.** *Предположим, что для гауссовского вещественного однородного случайного поля  $w(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ , с нулевым средним, спектральной мерой  $\mu$  и ограниченным спектральным пространством  $\Lambda$  выполнено дополнительное условие (8) и корреляционная матрица случайного вектора  $(w(x_1), \dots, w(x_L))$  является невырожденной. Рассмотрим три условные спектральные модели  $w_n^{\text{cond}}$  поля  $w^{\text{cond}}$ : нерандомизированную, рандомизированную с разбиением и без разбиения спектрального пространства  $\Lambda_n$ . Предположим, что выполнено (4), а для модели (3) (нерандомизированной и рандомизированной с разбиением спектрального пространства) выполнено (7). Тогда при  $n \rightarrow \infty$  для всех трех условных спектральных моделей выполнено:*

1.  $w_n^{\text{cond}}$  сходятся к  $w^{\text{cond}}$  в смысле сходимости конечномерных распределений;
2.  $w_n^{\text{cond}}$  слабо сходятся к  $w^{\text{cond}}$  в пространстве  $\mathbb{C}^p(K)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ ;
3.  $w_n^{\text{cond}}$  слабо сходятся к  $w^{\text{cond}}$  в пространстве  $\mathbb{L}^p(K)$ ,  $p \geq 1$ ,

где  $K$  — произвольный компакт в  $\mathbb{R}^k$ .

Это утверждение является простым следствием лемм 4.7–4.11, доказанных в [15]. По сути, в [15] рассматривается более сложная ситуация, когда не требуется ограниченность спектрального пространства. Как мы уже отмечали ранее, для численных моделей поверхности морского волнения, когда не требуется учитывать влияние волн сколь угодно малой длины, ограниченность спектрального пространства представляется естественным предположением.

Предположение о том, что корреляционная матрица случайного вектора  $(w(x_1), \dots, w(x_L))$  является невырожденной, также является естественным для моделей морской поверхности. Это предположение означает, что нет каких-либо “жестких” ограничений на возможные значения поля возвышений  $b_1, \dots, b_L$  морской поверхности в точках  $x_1, \dots, x_L$ .

## 2. Сходимость пространственных спектральных моделей морской поверхности

Исследуем сходимость пространственных и пространственно-временных спектральных моделей, которые использовались для моделирования поверхности морского волнения и аномально высоких волн-убийц в работах [6, 11, 24].

В качестве модели пространственного поля возвышений поверхности морского волнения относительно среднего уровня (в некоторый фиксированный момент времени) будем рассматривать гауссовское однородное поле  $w(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , с нулевым средним и со спектром, сосредоточенным в ограниченной области  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ . Без ограничения общности можно предполагать, что  $\Lambda = (-A, A) \times (0, B)$ . Через  $f(\lambda, \nu)$  ( $(\lambda, \nu) \in \Lambda$ ), будем обозначать спектральную плотность поля  $w(x, y)$ :

$$R(x, y) = Ew(x, y)w(0, 0) = \int_{\Lambda} \cos(\lambda x + \nu y) f(\lambda, \nu) d\lambda d\nu. \quad (10)$$

Согласно [1] для описания стохастических свойств поверхности морского волнения используют так называемый *частотный спектр*  $S(\mu)$  и *угловой спектр*  $Q(\phi)$ . Частотный спектр представляет собой спектральную плотность стационарного случайного процесса, описывающего зависимость от времени уровня морской поверхности в некоторой фиксированной точке на плоскости. Угловой спектр описывает распределение энергии волн в зависимости от угла относительно направления ветра. Именно эти спектры оцениваются по результатам наблюдений.

Для углового спектра часто используют аппроксимацию, предложенную в работе [4],

$$Q(\phi) = \frac{2}{\pi} \cos^2(\phi), \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (11)$$

В этом случае для глубокой воды спектральную плотность поверхности морского волнения  $w(x, y)$  можно представить в следующем виде [11, 15]:

$$f(\lambda, \nu) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} \sqrt{\frac{g}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}} S\left(\sqrt{g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}\right) Q(\phi). \quad (12)$$

Здесь  $\phi = \arg(\lambda + i\nu)$ ,  $g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения, частотный спектр  $S$  имеет размерность  $\text{м}^2\text{с}$ , угловой спектр является безразмерным, а спектральная плотность  $f$  имеет размерность  $\text{м}^4$ . В формулах (10)–(12) предполагается, что направление ветра совпадает с осью  $OX$ .

Примером частотного спектра является следующая аппроксимация, представленная в работе [1]:

$$S(\mu) = \begin{cases} 6m_0 (\mu_{\max}/\mu)^5 \mu^{-1} \exp\left\{-1.2 \left[(\mu_{\max}/\mu)^5 - (\mu_{\max}/\mu_1)^5\right]\right\}, & \mu \in (0, \mu_1], \\ S(\mu_1) + (S(\mu_2) - S(\mu_1))(\mu - \mu_1)/(\mu_2 - \mu_1), & \mu \in (\mu_1, \mu_2), \\ 0.0078g^2\mu^{-5}, & \mu \in [\mu_2, \mu_3]; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1.8 \mu_{\max} \tilde{\mu}^{(-0.7)}, & \mu_2 &= 2.0 \mu_{\max} \tilde{\mu}^{(-0.7)}, \\ \tilde{\mu} &= v \mu_{\max}/g, & m_0 &= 0.00127g^{-2}v^4 \tilde{\mu}^{(-3.19)}. \end{aligned}$$

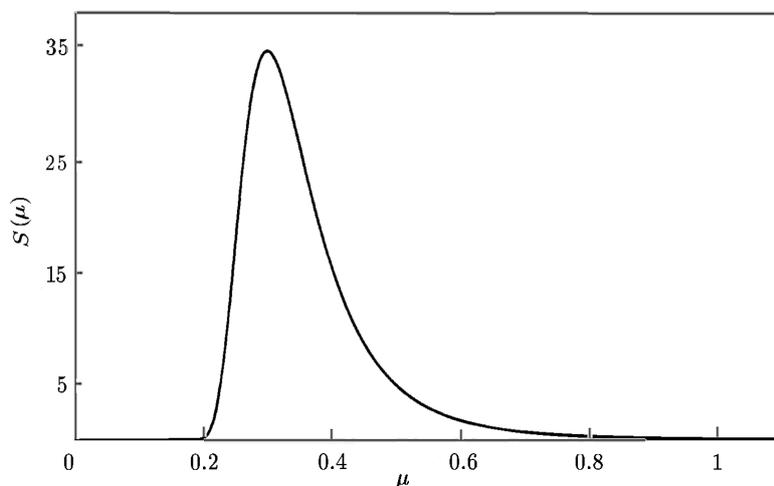
Здесь  $\mu_3 \approx 30 \text{ с}^{-1}$  — верхняя граница частотного спектра гравитационных волн,  $\mu_{\max}$  — частота спектрального максимума ( $\text{с}^{-1}$ ) частотного спектра  $S(\mu)$ ,  $v$  — скорость ветра ( $\text{м/с}$ ) на высоте 10 м над уровнем моря. На рисунке 1 представлен частотный спектр (13) с параметрами  $v = 10 \text{ м/с}$ ,  $\mu_{\max} = 0.3 \text{ с}^{-1}$ .

Для поля возвышений морской поверхности  $w(x, y)$  будем рассматривать пространственные спектральные модели вида

$$w_{MN}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} [\xi_{ij} \cos(\lambda_{ij}x + \nu_{ij}y) + \eta_{ij} \sin(\lambda_{ij}x + \nu_{ij}y)] \quad (14)$$

со спектральными пространствами

$$\Lambda_{MN} = (-A_{MN}, A_{MN}) \times (0, B_{MN}) \subset \Lambda. \quad (15)$$



**Рис. 1.** Частотный спектр (13) поверхности морского волнения с параметрами  $v = 10$  м/с,  $\mu_{\max} = 0.3$  с $^{-1}$

При построении спектральных моделей можно брать  $A_{MN} = A$ ,  $B_{MN} = B$ . Однако для уменьшения трудоемкости вычислений порой целесообразно выбирать значения  $A_{MN} < A$ ,  $B_{MN} < B$ , так чтобы основная “масса” спектра была сосредоточена в области  $\Lambda_{MN} = (-A_{MN}, A_{MN}) \times (0, B_{MN})$ .

Как и в работах [6, 11, 24], для нерандомизированных и рандомизированных спектральных моделей будем рассматривать разбиения спектральных пространств  $\Lambda_{MN}$  на  $MN$  одинаковых прямоугольников  $Q_{ij}$

$$\Lambda_{MN} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N Q_{ij}$$

со сторонами  $d_A = 2A_{MN}/M$  и  $d_B = B_{MN}/N$ ;

$$Q_{ij} = (-A_{MN} + (i-1)d_A, -A_{MN} + id_A) \times ((j-1)d_B, jd_B), \quad (16)$$

$$i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$

В случае нерандомизированной спектральной модели точки  $(\lambda_{ij}, \nu_{ij})$  выбираются в центрах этих прямоугольников. Рандомизированная спектральная модель без разбиения спектрального пространства полностью определяется заданием спектрального пространства  $\Lambda_{MN}$  и числом гармоник  $n = MN$ .

**Теорема 1.** (А) Предположим, что для описания пространственного поля возвышений поверхности морского волнения относительно среднего уровня используется гауссовское вещественное однородное случайное поле  $w(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , с нулевым средним и некоторой спектральной плотностью  $f(\lambda, \nu)$ , сосредоточенной на ограниченном спектральном пространстве  $\Lambda = (-A, A) \times (0, B)$ . Рассмотрим три типа спектральных моделей (14)–(16): нерандомизированную, рандомизированную с разбиением и без разбиения спектрального пространства  $\Lambda_{MN}$ . Если

$$M \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad A_{MN} \rightarrow A, \quad B_{MN} \rightarrow B, \quad (17)$$

то для всех трех типов спектральных моделей выполнено:

1.  $w_{MN}(x, y)$  сходятся к  $w(x, y)$  в смысле сходимости конечномерных распределений;
  2.  $w_{MN}(x, y)$  слабо сходятся к  $w(x, y)$  в пространстве  $\mathbb{C}^p(K)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ ;
  3.  $w_{MN}(x, y)$  слабо сходятся к  $w(x, y)$  в пространстве  $\mathbb{L}^p(K)$ ,  $p \geq 1$ ,
- где  $K$  — произвольный компакт в  $\mathbb{R}^2$ .

(Б) Если для поля  $w(x, y)$  выполнено дополнительное условие

$$w(x_l, y_l) = b_l, \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}, \quad (18)$$

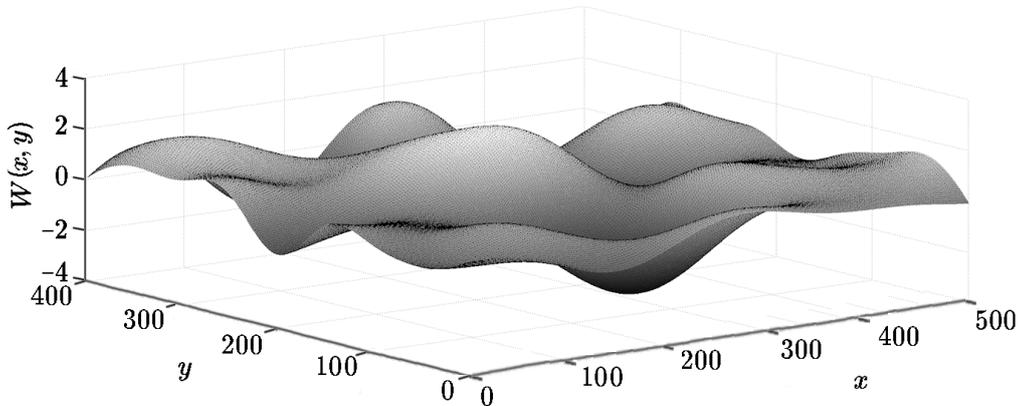
и корреляционная матрица случайного вектора  $(w(x_1, y_1), \dots, w(x_L, y_L))$  является невырожденной, то (17) гарантирует также сходимость соответствующих условных спектральных моделей.

Доказательство теоремы вытекает из лемм 1 и 2, так как (17) гарантирует выполнение (4) и (7).

На рисунке 2 приведена реализация спектральной модели  $w_{MN}(x, y)$  поля морского волнения со спектральной плотностью (11)–(13) с параметрами

$$v = 5 \text{ м/с}, \quad \mu_{\max} = 0.4 \text{ с}^{-1}, \quad (19)$$

где  $A = 0.035$ ,  $B = 0.075$ ,  $M = 200$ ,  $N = 100$ .



**Рис. 2.** Реализация спектральной модели поверхности морского волнения  $w_{MN}(x, y)$  со спектром (11)–(13), (19) и параметрами  $A = 0.035$ ,  $B = 0.075$ ,  $M = 200$ ,  $N = 100$

**Замечание о выборе спектральных пространств.** Несколько факторов определяют выбор “оптимальных” размеров множеств  $\Lambda$  и  $\Lambda_{MN}$ : особенности оцениваемых функционалов, вид спектральной плотности, а также значения параметров  $M$  и  $N$  (в случае спектральных пространств  $\Lambda_{MN}$ ). При этом очевидно, что нужно учитывать то, насколько существенно отличается дисперсия спектральной модели

$$D_{MN} = \int_{\Lambda_{MN}} f(\lambda, \nu) d\lambda d\nu \quad (20)$$

от дисперсии случайного поля

$$D = \int_{\Lambda} f(\lambda, \nu) d\lambda d\nu. \quad (21)$$

В качестве примера рассмотрим спектральную плотность (11)–(13) с параметрами (19) на спектральном множестве  $\Lambda = (-A, A) \times (0, B)$ , где

$$A = 0.3, \quad B = 0.6 \quad (22)$$

(эта спектральная плотность представлена на рис. 3 для области  $(-0.03, 0.03) \times (0, 0.05)$ ). Вычисления показали, что в этом случае  $D = 1.316$ , а значения  $D_{MN}$  и отношения  $D_{MN}/D$  приведены в таблице.

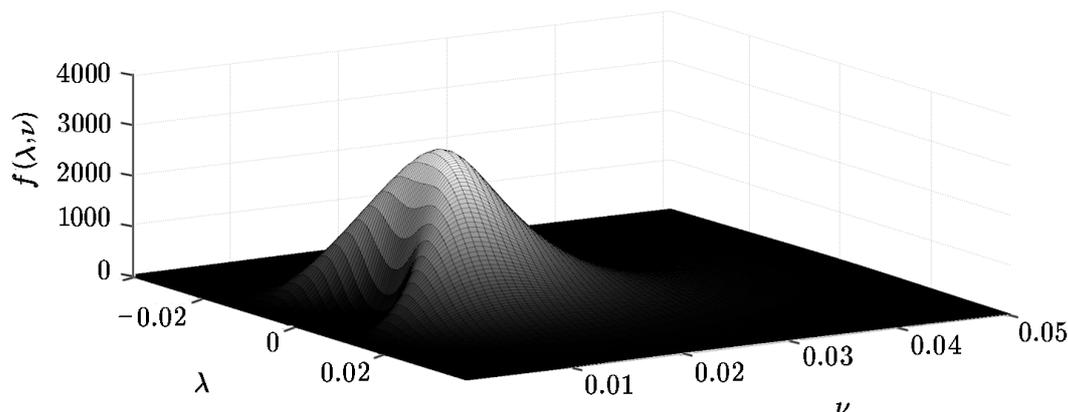


Рис. 3. Пример спектральной плотности  $f(\lambda, \nu)$  поверхности морского волнения

**Таблица.** Значения дисперсий  $D_{MN}$  спектральных моделей для спектральной плотности  $f(\lambda, \nu)$  (см. (11)–(13), (19)) и  $A_{MN} \leq A = 0.3$ ,  $B_{MN} \leq B = 0.6$

$A_{MN}$	$B_{MN}$	$D_{MN}$	$D_{MN} / D, \%$
0.3	0.6	1.316	100
0.15	0.3	1.314	99.85
0.075	0.15	1.306	99.24
0.05	0.1	1.290	98.02
0.0375	0.075	1.263	95.97
0.025	0.05	1.178	89.51

Из таблицы видно, что значительное уменьшение размеров спектрального пространства модели может исказить дисперсию исходного поля незначительно. При решении практических задач требуется сбалансированный выбор размеров спектрального пространства и числа гармоник спектральной модели.

### 3. Сходимость пространственно-временных спектральных моделей морской поверхности

Существенным преимуществом, которое выделяет спектральные модели среди других численных методов моделирования поверхности морского волнения, является относительно простой переход от пространственной модели к пространственно-временной. Этот переход осуществляется на основе дисперсионного соотношения, которое связывает временную и пространственную длины волн на водной поверхности. Предположим, что пространственно-временное поле возвышений водной поверхности относительно среднего уровня описывается гармоникой

$$u(x, y, t) = \xi \cos(\lambda x + \nu y + \mu t) + \eta \sin(\lambda x + \nu y + \mu t).$$

Тогда выполнено соотношение

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \operatorname{th}\left(H\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}\right), \quad (23)$$

которое называется *дисперсионным* [1]. Здесь  $H$  — глубина водоема, а  $g$  — ускорение свободного падения. В случае глубокой воды, когда  $\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}H \gg 1$ , используют упрощенное дисперсионное соотношение (23):

$$\mu^2 = g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}. \quad (24)$$

Пространственно-временная спектральная модель, соответствующая пространственной модели (14), принимает вид

$$u_{MN}(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} [\xi_{ij} \cos(\lambda_{ij}x + \nu_{ij}y + \mu_{ij}t) + \eta_{ij} \sin(\lambda_{ij}x + \nu_{ij}y + \mu_{ij}t)], \quad (25)$$

где

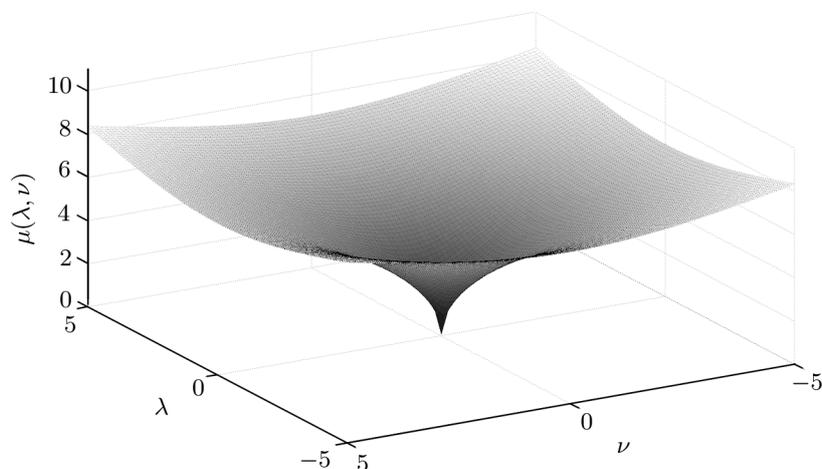
$$\mu_{ij} = \sqrt{g\sqrt{\lambda_{ij}^2 + \nu_{ij}^2}}. \quad (26)$$

**Замечание о спектре пространственно-временной модели морской поверхности.** В случае глубокой воды спектральная мера гауссовского случайного поля  $u(x, y, t)$  (стационарного по времени и однородного по пространству), описывающего взволнованную морскую поверхность, сосредоточена на поверхности

$$g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} - \mu^2 = 0, \quad (27)$$

изображение которой приведено на рис. 4. Для корреляций при этом выполнено

$$Mu(0, 0, 0)u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \cos(\lambda x + \nu y + \mu(\lambda, \nu)t) f(\lambda, \nu) d\lambda d\nu, \quad \mu(\lambda, \nu) = \sqrt{g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}.$$



**Рис. 4.** Поверхность  $g\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} - \mu^2 = 0$ , на которой сосредоточена спектральная мера поля  $u(x, y, t)$ , описывающего поверхность морского волнения в случае глубокой воды

**Теорема 2.** (А) *Предположим, что для описания пространственно-временного поля возвышений поверхности морского волнения относительно среднего уровня используется гауссовское вещественное однородное случайное поле  $u(x, y, t)$ ,  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ , с нулевым средним и спектральной мерой, сосредоточенной на поверхности (23) или (24). Предположим также, что однородное случайное поле  $w(x, y) = u(x, y, 0)$  имеет некоторую спектральную плотность  $f(\lambda, \nu)$ , равную нулю вне ограниченного множества  $\Lambda = (-A, A) \times (0, B)$ . Рассмотрим три типа пространственных спектральных моделей (14)–(16) для поля  $w(x, y)$ : нерандомизированную, рандомизированную с разбиением и без разбиения спектрального пространства  $\Lambda_{MN}$ , для которых выполнено (17), а также соответствующие пространственно-временные модели  $u_{MN}(x, y, t)$ , построенные на основе пространственных моделей  $w_{MN}(x, y)$  по формулам (25), (26). Тогда для пространственно-временных спектральных моделей выполнено:*

1.  $u_{MN}(x, y, t)$  сходятся к  $u(x, y, t)$  в смысле сходимости конечномерных распределений;
  2.  $u_{MN}(x, y, t)$  слабо сходятся к  $u(x, y, t)$  в пространстве  $\mathbb{C}^p(K)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ ;
  3.  $u_{MN}(x, y, t)$  слабо сходятся к  $u(x, y, t)$  в пространстве  $\mathbb{L}^p(K)$ ,  $p \geq 1$ ,
- где  $K$  — произвольный компакт в  $\mathbb{R}^3$ .

(Б) *Если для поля  $u(x, y, t)$  выполнено дополнительное условие*

$$u(x_l, y_l, t_l) = b_l, \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}, \quad (28)$$

*и корреляционная матрица случайного вектора  $(u(x_1, y_1, t_1), \dots, u(x_L, y_L, t_L))$  является невырожденной, то (17) гарантирует также сходимость соответствующих условных пространственно-временных спектральных моделей  $u_{MN}^{\text{cond}}(x, y, t)$  к предельному полю  $u^{\text{cond}}(x, y, t)$ .*

**Доказательство.** По условию теоремы спектр гауссовского случайного поля  $u(x, y, t)$  сосредоточен на поверхности или (23), или (24). Поэтому из ограниченности спектрального множества поля  $w(x, y)$  следует ограниченность спектрального множества поля

$u(x, y, t)$ . Так как для спектральных моделей  $w_{MN}(x, y)$  выполнены условия (17), то спектральные модели  $u_{MN}(x, y, t)$  представимы в виде (3), (6) и удовлетворяют условиям (4) и (7). Таким образом, можно воспользоваться леммами 1 и 2, из которых и вытекает утверждение теоремы.  $\square$

Части (Б) теорем 1 и 2 описывают достаточные условия сходимости численных пространственных и пространственно-временных моделей морского волнения с аномально высокими волнами, которые рассматривались в работах [6, 11, 24].

## Заключение

Численные спектральные модели поверхности морского волнения являются перспективным средством для решения множества прикладных задач, связанных, например, с исследованием влияния морского волнения на морские суда и платформы, решением задач оптики океана, изучением особенностей возникновения аномально высоких волн [5–11]. В данной работе на основе общих результатов о сходимости случайных полей для широкого класса пространственных и пространственно-временных спектральных моделей получены условия, гарантирующие сходимость к предельному полю, описывающему взволнованную морскую поверхность. Полученные условия имеют простой вид и обеспечивают сходимость оценок функционалов, вычисляемых методом Монте-Карло по множеству реализаций спектральных моделей морской поверхности.

## Литература

1. **Давидан И.М., Лопатухин Л.И., Рожков В.А.** Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. — Л.: Гидрометеиздат, 1978.
2. **Крылов Ю.М.** Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. — Л.: Гидрометеиздат, 1966.
3. **Лонге-Хиггинс М.С.** Статистический анализ случайно движущейся поверхности // Ветровые волны. — М.: Иностранная литература, 1962. — С. 112–230.
4. **Пирсон В., Нейман Г., Джеймс Р.** Развитие и прогноз ветровых волн // Ветровые волны. — М.: Иностранная литература, 1962. — С. 42–124.
5. **Товстик П.Е., Товстик Т.М., Шеховцов В.А.** О влиянии формы спектральной плотности случайного волнения на колебания морской стационарной платформы // Вестник СПбГУ. — 2012. — Сер. 1, вып. 2. — С. 61–68.
6. **Prigarin S.M., Litvenko K.V.** Conditional spectral models of extreme ocean waves // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2012. — Vol. 27, № 3. — P. 289–302.
7. **Anvarov S.R., Prigarin S.M.** Numerical simulation of the spatio-temporal structure of the sea swell surface in optical problems // Atmospheric and Oceanic Optics. — 1994. — Vol. 7, № 5. — P. 361–364.
8. **Kargin B.A., Ooppel U.G., Prigarin S.M.** Simulation of the undulated sea surface and study of its optical properties by Monte Carlo method // Proc. SPIE. — 1999. — Vol. 3583. — P. 316–324.
9. **Kargin B.A., Prigarin S.M.** Simulation of the sea undulation surface and study of its optical properties by Monte Carlo method // Atmospheric and Oceanic Optics. — 1992. — Vol. 5, № 3. — P. 186–190.
10. **Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.** Прикладные методы статистического моделирования. — Л.: Машиностроение, 1986.

11. **Литвенко К.В., Пригарин С.М.** Численные стохастические модели поверхности морского волнения и гигантских океанических волн // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 4. — С. 349–361.
12. **Михайлов Г.А.** Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 238, № 4. — С. 793–795.
13. **Михайлов Г.А.** Приближенные модели случайных процессов и полей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1983. — Т. 23, № 3. — С. 558–566.
14. **Михайлов Г.А.** Оптимизация весовых процессов Монте-Карло. — М: Наука, 1987.
15. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
16. **Войтишек А.В.** Рандомизированная численная спектральная модель стационарной случайной функции // Математические и имитационные модели систем. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1983. — С. 17–25.
17. **Курбанмурадов О.А.** Функциональная сходимость монте-карловских аппроксимаций однородных гауссовских случайных полей. — Новосибирск, 1993. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. ВЦ; 999).
18. **Prigarin S.M.** Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. — Utrecht: VSP, 2001.
19. **Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.** Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. — М.: Наука, 1973.
20. **Пригарин С.М.** Слабая сходимость вероятностных мер в пространствах непрерывно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журнал. — 1993. — Т. 34, № 1. — С. 140–144.
21. **Иванов А.В.** О сходимости распределений функционалов от измеримых случайных полей // Украинский мат. журнал. — 1980. — Т. 32, № 1. — С. 27–34.
22. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.
23. **Prigarin S.M.** Conditional spectral models of Gaussian homogeneous fields // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Model. — 1998. — Vol. 13, № 1. — P. 57–68.
24. **Prigarin S.M., Litvenko K.V.** Numerical simulation of the sea surface and extreme ocean waves with stochastic spectral models // Proc. of the AMSA-2011 Int. Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference”. — Novosibirsk: Publishing house of NSTU, 2011. — P. 394–402.

*Поступила в редакцию 12 сентября 2018 г.,  
После доработки 5 марта 2019 г.  
Принята к публикации 15 октября 2019 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Davidan I.M., Lopatuhin L.I., Rozhkov V.A.** Vetrovoe volnenie kak veroyatnostnyi gidrodinamicheskii process. — L.: Gidrometeoizdat, 1978.
2. **Krylov Yu.M.** Spektral'nye metody issledovaniya i rascheta vetrovyh voln. — L.: Gidrometeoizdat, 1966.
3. **Longe-Higgins M.S.** Statisticheskii analiz sluchaino dvizhuscheisya poverhnosti // Vetrovye volny. — M.: Inostrannaya literatura, 1962. — S. 112–230.
4. **Pirson V., Neiman G., Dzheims R.** Razvitie i prognoz vetrovyh voln // Vetrovye volny. — M.: Inostrannaya literatura, 1962. — S. 42–124.

5. **Tovstik P.E., Tovstik T.M., Shekhovcov V.A.** O vliyani formy spektral'noi plotnosti sluchainogo volneniya na kolebaniya morskoi stacionarnoi platformy // Vestnik SPbGU.— 2012.— Ser. 1, vyp. 2.— S. 61–68.
6. **Prigarin S.M., Litvenko K.V.** Conditional spectral models of extreme ocean waves // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.— 2012.— Vol. 27, № 3.— P. 289–302.
7. **Anvarov S.R., Prigarin S.M.** Numerical simulation of the spatio-temporal structure of the sea swell surface in optical problems // Atmospheric and Oceanic Optics.— 1994.— Vol. 7, № 5.— P. 361–364.
8. **Kargin B.A., Ooppel U.G., Prigarin S.M.** Simulation of the undulated sea surface and study of its optical properties by Monte Carlo method // Proc. SPIE.— 1999.— Vol. 3583.— P. 316–324.
9. **Kargin B.A., Prigarin S.M.** Simulation of the sea undulation surface and study of its optical properties by Monte Carlo method // Atmospheric and Oceanic Optics.— 1992.— Vol. 5, № 3.— P. 186–190.
10. **Shalygin A.S., Palagin Yu.I.** Prikladnye metody statisticheskogo modelirovaniya. — L.: Mashinostroenie, 1986.
11. **Litvenko K.V., Prigarin S.M.** Chislennye stohasticheskie modeli poverhnosti morskogo volneniya i gigantskih okeanicheskikh voln // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie.— Novosibirsk, 2014.— T. 17, № 4.— S. 349–361.
12. **Mikhailov G.A.** Chislennoe postroenie sluchainogo polya s zadannoi spektral'noi plotnost'yu // Dokl. AN SSSR.— 1978.— T. 238, № 4.— S. 793–795.
13. **Mikhailov G.A.** Priblizhennyye modeli sluchainykh processov i polei // Zhurn. vychisl. matematiki i mat. fiziki.— 1983.— T. 23, № 3.— S. 558–566.
14. **Mihailov G.A.** Optimizatsiya vesovykh processov Monte-Karlo.— M: Nauka, 1987.
15. **Prigarin S.M.** Metody chislennogo modelirovaniya sluchainykh processov i polei.— Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2005.
16. **Voitishkek A.V.** Randomizirovannaya chislennaya spektral'naya model' stacionarnoi sluchainoi funktsii // Matematicheskie i imitacionnye modeli sistem.— Novosibirsk: Izd-vo VC SO AN SSSR, 1983.— S. 17–25.
17. **Kurbanmuradov O.A.** Funktsional'naya skhodimost' monte-karlovskikh approksimatsii odnorodnykh gaussovskikh sluchainykh polei.— Novosibirsk, 1993.— (Preprint / RAN. Sib. otd-nie. VC; 999).
18. **Prigarin S.M.** Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods.— Utrecht: VSP, 2001.
19. **Prohorov Yu.V., Rozanov Yu.A.** Teoriya veroyatnostei. Osnovnye ponyatiya, predel'nye teoremy, sluchainyye processy.— M.: Nauka, 1973.
20. **Prigarin S.M.** Slabaya skhodimost' veroyatnostnykh mer v prostranstvakh nepreryvno differentsiruemykh funktsii // Sib. mat. zhurnal.— 1993.— T. 34, № 1.— S. 140–144.
21. **Ivanov A.V.** O skhodimosti raspredelenii funktsionalov ot izmerimyykh sluchainykh polei // Ukrainskii mat. zhurnal.— 1980.— T. 32, № 1.— S. 27–34.
22. **Billingsli P.** Skhodimost' veroyatnostnykh mer.— M.: Nauka, 1977.
23. **Prigarin S.M.** Conditional spectral models of Gaussian homogeneous fields // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Model.— 1998.— Vol. 13, № 1.— P. 57–68.
24. **Prigarin S.M., Litvenko K.V.** Numerical simulation of the sea surface and extreme ocean waves with stochastic spectral models // Proc. of the AMSA-2011 Int. Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference”.— Novosibirsk: Publishing house of NSTU, 2011.— P. 394–402.

