УДК 519.6

Обратная задача на собственные значения для одного класса матриц второго и третьего порядков

Е.А. Перепелкин

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, просп. Ленина, 46, Барнаул, 656038
E-mail: eap@list.ru

Перепелкин Е.А. Обратная задача на собственные значения для одного класса матриц второго и третьего порядков // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 3. — С. 319–326.

Предложен метод решения обратной задачи на собственные значения для произведения матриц второго и третьего порядков. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи.

DOI: 10.15372/SJNM20150306

Ключевые слова: *собственные значения, обратная задача, произведение матриц.*

Perepelkin E.A. An inverse eigenvalue problem for a class of matrices of second and third orders // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 3. — P. 319–326.

The method for solving the inverse eigenvalue problem for the product of matrices of second and third orders is proposed. The necessary and sufficient conditions for the existence of the problem solution have been obtained.

Keywords: *eigenvalues, inverse problem, product of matrices.*

---

1. Введение

Обратная задача на собственные значения встречается в физике, механике, теории управления [1]. В общем случае постановка обратной задачи на собственные значения заключается в следующем. Дано множество квадратных матриц M размера n. Как правило, это множество матриц с вещественными элементами. Необходимо найти матрицу $A \in M$, обладающую заданным набором собственных чисел $\Lambda = \{\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n\}$. В случае вещественных матриц комплексные числа λ_i входят в набор Λ сопряжёнными парами.

Различают аддитивную, мультипликативную, параметризованную и другие обратные задачи на собственные значения [1]. В настоящей работе рассматривается задача для произведения матриц. Данная задача известна в теории автоматического управления как задача синтеза периодической обратной связи для линейной дискретной системы [2].

Несмотря на простоту постановки, рассматриваемая задача является достаточно сложной в вычислительном отношении. В данной работе формулируются необходимые условия существования решения задачи в общем случае для матриц произвольного порядка. Для частного случая матриц второго и третьего порядков получены необходимые и достаточные условия существования решения и описан алгоритм решения задачи, суть которого заключается в последовательном решении двух подзадач: решении системы линейных алгебраических уравнений и нахождении корней многочлена.

Приведены примеры решения задачи на основе предложенного подхода. Вычисления проводились в системе научных и инженерных расчётов MATLAB. Результаты вычислений представлены приближённо с точностью до пяти значащих цифр в записи чисел.

2. Постановка задачи и предварительные результаты

Пусть даны вещественные матрицы A, b, c размеров $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$ соответственно. Пусть задан набор комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n\}$. Комплексные числа входят в Λ сопряжёнными парами. Необходимо найти вещественные числа $F_n = \{f_1; f_2; \ldots; f_n\}$ такие, что спектр матрицы

$$\Phi_n = (A + bcf_1)(A + bcf_2)\cdots(A + bcf_n)$$

совпадает с Λ.

Составим многочлен

$$q(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + \cdots + q_n.$$

Эквивалентная постановка задачи заключается в нахождении F_n, при котором характеристический многочлен Φ_n совпадает с $q(\lambda)$.

Замечание 1. В работе [2] предложено решение аналогичной задачи для $n + 1$ числа $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$, т. е. для матрицы

$$(A + bcf_1)(A + bcf_2)\cdots(A + bcf_{n+1}).$$

Здесь матрицы A, b, c имеют размеры $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$ соответственно. При этом алгоритм расчёта чисел $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$, описанный в работе [2], отличается от алгоритма, который предлагается в данной работе.

Введем квадратные матрицы:

$$X_n(A, b) = [b,\ Ab,\ \ldots,\ A^{n-1}b], \qquad Y_n(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

В математической теории линейных систем управления [3] известны следующие свойства матриц $X_n(A, b)$ и $Y_n(A, c)$.

Лемма 1. *Матрица* $X_n(A, b)$ *— невырожденная, т. е.* $\det X_n(A, b) \neq 0$, *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}[\lambda E - A,\ b] = n$ *для любого собственного числа* λ *матрицы* A.

Лемма 2. *Матрица* $Y_n(A, c)$ *— невырожденная, т. е.* $\det Y_n(A, c) \neq 0$, *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda E - A \\ c \end{bmatrix} = n$$

для любого собственного числа λ *матрицы* A.

Следующие две леммы получим как следствие лемм 1 и 2.

Лемма 3. *Если* $\det X_n(A,b)=0$, *то существует собственное число матрицы* Φ_n, *инвариантное по отношению к выбору* F_n, *и это собственное число является собственным числом матрицы* A^n.

Доказательство. Пусть $\det X_n(A,b)=0$. По лемме 1 $\operatorname{rank}\big[\lambda E-A,\ b\big]<n$ для некоторого собственного числа λ матрицы A. Это означает, что существует вектор v такой, что $v^\top\big[\lambda E-A,\ b\big]=0$. Следовательно, $v^\top A=\lambda v^\top$, $v^\top b=0$. Заметим, что вектор v является левым собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному числу λ. С учетом сказанного получим

$$v^\top(A+bcf_1)(A+bcf_2)\cdots(A+bcf_n)=\lambda v^\top(A+bcf_2)\cdots(A+bcf_n)=\lambda^n v^\top.$$

Таким образом, число λ^n является собственным числом матрицы Φ_n, и это число инвариантно по отношению к выбору F_n. □

Лемма 4. *Если* $\det Y_n(A,c)=0$, *то существует собственное число матрицы* Φ_n, *инвариантное по отношению к выбору* F_n, *и это собственное число является собственным числом матрицы* A^n.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Следовательно, если $\det X_n(A,b)=0$ или $\det Y_n(A,c)=0$, то собственные числа Φ_n не могут быть заданы произвольно.

Обозначим через $a(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$ характеристический многочлен матрицы A.

Лемма 5. *Пусть* $\det X_n(A,b)\neq 0$. *Тогда матрица* Φ_n *подобна матрице*

$$\Psi_n=(\bar A+\bar b\bar c f_1)(\bar A+\bar b\bar c f_2)\cdots(\bar A+\bar b\bar c\bar f_n),$$

где

$$\bar A=\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1\end{bmatrix},\qquad \bar b=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\qquad \bar c=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \dots & c_n\end{bmatrix}.$$

Доказательство. Составим невырожденную матрицу

$$P=\begin{bmatrix}a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1\\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0\\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

и матрицу $Q=X_n(A,b)P$. Заметим, что матрица Q также является невырожденной. Справедливы [3] соотношения: $\bar A=Q^{-1}AQ$, $\bar b=Q^{-1}b$. При этом вектор $\bar c=cQ$ будет иметь общий вид. Таким образом,

$$\begin{aligned}\Phi_n &= (A + bcf_1)(A + bcf_2)\cdots(A + bcf_n)\\ &= Q(\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_1)Q^{-1}Q(\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_2)Q^{-1}\cdots Q(\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_n)Q^{-1} = Q\Psi_n Q^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, матрицы Φ_n и Ψ_n подобны. □

Рассмотрим два частных случая задачи для матриц второго и третьего порядков.

3. Задача для матрицы второго порядка

Пусть даны вещественные матрицы A, b, c размеров 2×2, 2×1, 1×2 соответственно. Необходимо найти числа f_1, f_2, при которых собственные числа матрицы $\Phi_2 = (A + bcf_1)(A + bcf_2)$ совпадают с заданными значениями λ_1, λ_2, или, что эквивалентно, характеристический многочлен матрицы Φ_2 совпадает с заданным многочленом

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + q_1\lambda + q_2.$$

Теорема 1. *Все собственные числа матрицы Φ_2 можно произвольно задать, выбирая значения f_1 и f_2, в общем случае комплексные, тогда и только тогда, когда*

$$\det X_2(A, b) \neq 0, \qquad \det Y_2(A, c) \neq 0, \qquad cAb + a_1cb \neq 0. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость первых двух условий следует из лемм 3, 4. Пусть $\det X_2(A, b) \neq 0$. Коэффициенты характеристического многочлена Φ_2 линейно зависят от коэффициентов многочлена

$$p(\lambda) = (\lambda - f_1)(\lambda - f_2) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2.$$

Действительно,

$$\det(\lambda E - \Phi_2) = \det(\lambda E - \Psi_2),$$

поскольку матрицы Φ_2 и Ψ_2 подобны (лемма 5). Учитывая, что

$$\Psi_2 = (\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_1)(\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_2),$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

получим

$$\det(\lambda E - \Phi_2) = \lambda^2 + ((c_1 - a_1c_2)p_1 - c_2^2p_2 + 2a_2 - a_1^2)\lambda + c_1a_2p_1 + c_1^2p_2 + a_2^2,$$

где

$$p_1 = -(f_1 + f_2), \qquad p_2 = f_1f_2.$$

Приравнивая коэффициенты многочленов $\det(\lambda E - \Phi_2)$ и $q(\lambda)$, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$R\bar{p} = r, \tag{2}$$

где

$$R = \begin{bmatrix} c_1 - a_1c_2 & -c_2^2 \\ c_1a_2 & c_1^2 \end{bmatrix}, \qquad r = \begin{bmatrix} q_1 + a_1^2 - 2a_2 \\ q_2 - a_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \bar{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, алгоритм назначения собственных чисел Φ_2 заключается в следующем. Задаем многочлен $q(\lambda)$. Решаем систему уравнений (2). Находим корни многочлена $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$, которые и являются искомыми значениями f_1, f_2.

Система уравнений (2) имеет единственное решение при любых q_1, q_2 тогда и только тогда, когда матрица R — невырожденная. Нетрудно проверить, что $\det R = c_1(c_1^2 - a_1c_1c_2 + a_2c_2^2)$. При этом

$$c_1 = cAb + a_1cb, \quad c_1^2 - a_1c_1c_2 + a_2c_2^2 = \det Y_2(\bar{A}, \bar{c}) = \det Y_2(A, c) \det Q.$$

Следовательно, условия (1) являются необходимыми и достаточными для возможности произвольного назначения собственных чисел матрицы Φ_2. □

Замечание 2. Корни многочлена $p(\lambda)$ могут быть комплексными. В этом случае решение задачи во множестве вещественных чисел при заданном многочлене $q(\lambda)$ не существует. Можно записать условие, накладываемое на коэффициенты многочлена $q(\lambda)$, при которых корни многочлена $p(\lambda)$ будут вещественные. Это условие получается из неравенства $p_1^2 \geq 4p_2$ и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &(c_1^2(q_1 + a_1^2 - 2a_2) + c_2^2(q_2 - a_2^2))^2 \\ &\quad \geq 4((c_1 - a_1c_2)(q_2 - a_2^2) - c_1a_2(q_1 + a_1^2 - 2a_2))c_1(c_1^2 - a_1c_1c_2 + a_2c_2^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Зададим желаемые собственные числа матрицы Φ_2, равными

$$\Lambda = \{0.1 + 3i; 0.1 - 3i\}.$$

Условия теоремы 1 выполняются, поэтому система уравнений (2) имеет единственное решение, равное: $p_1 = -5.2314$; $p_2 = -1.8922$. Корни многочлена $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$ равны: $f_1 = 5.5710$; $f_2 = -0.33964$.

Пусть $\Lambda = \{6; 12\}$. В этом случае $p(\lambda) = \lambda^2 - 2.2615\lambda + 1.8154$. Корни многочлена $p(\lambda)$ комплексные: $f_1 = 1.1308 + 0.73263i$; $f_2 = 1.1308 - 0.73263i$. Условие (3) не выполняется.

4. Задача для матрицы третьего порядка

Рассмотрим матрицу $\Phi_3 = (A + bcf_1)(A + bcf_2)(A + bcf_3)$. Здесь $n = 3$. Необходимо найти числа f_1, f_2, f_3, при которых собственные значения Φ_3 совпадают с заданными значениями λ_1, λ_2, λ_3.

Теорема 2. *Все собственные числа матрицы Φ_3 можно произвольно задать, выбирая значения f_1, f_2, f_3, в общем случае комплексные, тогда и только тогда, когда*

$$\det X_3(A, b) \neq 0, \qquad \det Y_3(A, c) \neq 0, \tag{4}$$

$$c_1 \neq 0, \qquad c_1^2 - a_1c_1c_2 + a_3c_2c_3 \neq 0,$$

где

$$c_1 = cA^2b + a_1cAb + a_2cb, \qquad c_2 = cAb + a_1cb, \qquad c_3 = cb.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Необходимость неравенств (4) следует из лемм 3, 4. Пусть $\det X_3(A,b) \neq 0$. Согласно лемме 5, матрица Φ_3 подобна матрице

$$\Psi_3 = (\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_1)(\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_2)(\bar{A} + \bar{b}\bar{c}f_3),$$

где

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы Ψ_3 равен

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - \Psi_3) = \lambda^3 + ((&a_1^2 c_3 - a_1 c_2 - a_2 c_3 + c_1)p_1 + \\ &(a_1 c_3^2 - c_2 c_3)p_2 + c_3^3 p_3 + a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3)\lambda^2 + \\ &((a_2^2 c_2 + 2a_3 c_1 - a_1 a_2 c_1 - a_1 a_3 c_2 - a_2 a_3 c_3)p_1 + \\ &(a_2 c_2^2 - a_1 c_1 c_2 - a_2 c_1 c_3 - a_3 c_2 c_3 + c_1^2)p_2 + \\ &(c_2^3 - 3c_1 c_2 c_3)p_3 + a_2^3 - 3a_1 a_2 a_3 + 3a_3^2)\lambda + \\ &a_3^2 c_1 p_1 + a_3 c_1^2 p_2 + c_1^3 p_3 + a_3^3, \end{aligned}$$

где p_1, p_2, p_3 — коэффициенты многочлена

$$p(\lambda) = (\lambda - f_1)(\lambda - f_2)(\lambda - f_3) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3.$$

Приравнивая коэффициенты многочленов $\det(\lambda E - \Psi_3)$ и

$$q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 + q_1\lambda^2 + q_2\lambda + q_3,$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$R\bar{p} = r, \tag{5}$$

где

$$r = \begin{bmatrix} q_1 - a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3 \\ q_2 - a_2^3 + 3a_1 a_2 a_3 - 3a_3^2 \\ q_3 - a_3^3 \end{bmatrix}, \qquad \bar{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

равны:

$$\begin{aligned} &r_{11} = a_1^2 c_3 - a_1 c_2 - a_2 c_3 + c_1, \\ &r_{12} = a_1 c_3^2 - c_2 c_3, \quad r_{13} = c_3^3, \\ &r_{21} = a_2^2 c_2 + 2a_3 c_1 - a_1 a_2 c_1 - a_1 a_3 c_2 - a_2 a_3 c_3, \\ &r_{22} = a_2 c_2^2 - a_1 c_1 c_2 - a_2 c_1 c_3 - a_3 c_2 c_3 + c_1^2, \\ &r_{23} = c_2^3 - 3c_1 c_2 c_3, \\ &r_{31} = a_3^2 c_1, \quad r_{32} = a_3 c_1^2, \quad r_{33} = c_1^3. \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$\det R = c_1(c_1^2 - a_1 c_1 c_2 + a_3 c_2 c_3) \det Y_3(\bar{A}, \bar{c}).$$

Следовательно, уравнение (5) имеет единственное решение при любых q_1, q_2, q_3 тогда и только тогда, когда $\det Y_3(\bar{A}, \bar{c}) \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_1^2 - a_1 c_1 c_2 + a_3 c_2 c_3 \neq 0$. Заметим, что

$$\det Y_3(\bar{A}, \bar{c}) = \det Y_3(A, c) \det Q,$$
$$c_1 = cA^2 b + a_1 cAb + a_2 cb, \quad c_2 = cAb + a_1 cb, \quad c_3 = cb. \qquad \square$$

Замечание 3. Как и в случае матрицы второго порядка, корни многочлена $p(\lambda)$ могут быть комплексные. Условие, при котором многочлен $p(\lambda)$ не имеет комплексных корней, является достаточно сложным и поэтому здесь не приводится.

Пример 2. Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 3.8506 & -8.7682 & 2.1573 \\ 1.1334 & 5.6035 & 4.8251 \\ -2.0696 & -3.2483 & -7.9037 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -7.4422 \\ 0.99080 \\ -0.29541 \end{bmatrix},$$
$$c = \begin{bmatrix} 7.8095 & 5.9792 & 4.6868 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы A равен

$$a(\lambda) = \lambda^3 - 1.5504\lambda^2 - 23.070\lambda + 84.096.$$

Матрицы $\bar{A}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ имеют следующий вид:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -84.096 & 23.070 & 1.5504 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 941.16 & -171.26 & -53.580 \end{bmatrix}.$$

Зададим желаемые собственные числа матрицы Φ_3, равными $\Lambda = \{0.1; 0.2; 0.3\}$. Составим и решим систему уравнений (5). Получим

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} -0.48129 \\ 0.066259 \\ -0.0027912 \end{bmatrix}.$$

Искомые числа f_1, f_2, f_3 находим как корни многочлена

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 0.48129\lambda^2 + 0.066259\lambda - 0.0027912.$$

Эти числа равны: $f_1 = 0.28061$; $f_2 = 0.11132$; $f_3 = 0.089353$.

Замечание 4. В общем случае при $n > 3$ утверждение о том, что коэффициенты характеристического многочлена матрицы Φ_n линейно зависят от коэффициентов многочлена $p(\lambda)$, неверно. Приведем пример. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda E - \Phi_4) = {} & \lambda^4 + (-5 - f_1 - f_2 - f_3 - f_4)\lambda^3 + \\
& (2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + f_1f_2 + f_1f_3 + f_1f_4 + f_2f_3 + f_2f_4 + f_3f_4)\lambda^2 + \\
& (-f_1f_2 - f_1f_4 - f_2f_3 - f_3f_4 - f_1f_2f_3 - f_1f_3f_4 - f_2f_3f_4)\lambda + f_1f_2f_3f_4 \\
= {} & \lambda^4 + (-5 + p_1)\lambda^3 + (-2p_1 + p_2)\lambda^2 + (-p_2 + f_1f_3 + f_2f_4 + p_3)\lambda + p_4.
\end{aligned}
$$

В данном случае нельзя сказать, что коэффициенты характеристического многочлена матрицы Φ_4 линейно зависят от коэффициентов многочлена

$$p(\lambda) = (\lambda - f_1)(\lambda - f_2)(\lambda - f_3)(\lambda - f_4) = \lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4,$$

поскольку в коэффициенте при λ присутствуют слагаемые f_1f_3 и f_2f_4.

5. Заключение

В работе предложен подход к решению обратной задачи на собственные значения для матриц Φ_2, Φ_3, суть которого заключается в последовательном решении двух задач: решении системы линейных алгебраических уравнений и нахождении корней многочлена. Получен вид системы линейных алгебраических уравнений и определены необходимые и достаточные условия существования единственного решения данных систем уравнений.

Литература

1. **Chu M., Golub G.** Inverse Eigenvalue Problems. Theory, Algorithms, and Application. — Oxford: Science Publications Oxford University Press, 2005.
2. **Aeyels D., Willems J.** Pole assignment for linear time-invariant systems by periodic memoryless output feedback // Automatica. — 1992. — № 6. — P. 1159–1168.
3. **Sontag E.D.** Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. Vol. 6. — New York: Springer-Verlag, 1998. — (Texts in applied mathematics).

Поступила в редакцию 22 сентября 2014 г.,
в окончательном варианте 27 октября 2014 г.