

УДК 532.5.013.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА

И. Л. Хабибуллин, А. А. Хисамов

Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

E-mails: Habibi.bsu@mail.ru, khisamovartur@list.ru

Представлены результаты моделирования процесса нестационарной фильтрации жидкости в пласте, вскрытом скважиной, которая по всей толщине пласта пересекается вертикальной трещиной гидроразрыва конечной длины. С использованием метода интегральных преобразований Лапласа построено аналитическое решение системы уравнений, описывающей фильтрацию жидкости в пласте и трещине. На основе анализа полученных решений установлены основные характерные особенности исследуемого процесса фильтрации в системе пласт — трещина.

Ключевые слова: пласт, трещина гидроразрыва, нестационарная фильтрация, аналитическое решение, метод преобразований Лапласа, распределение давления, дебит скважины.

DOI: 10.15372/PMTF20220412

Введение. Использование технологии гидроразрыва пластов в настоящее время становится одним из основных методов интенсификации нефтегазодобычи. Это обусловлено увеличением доли пластов с низкопроницаемыми коллекторами. В таких коллекторах гидродинамическая связь скважины и пласта непосредственно через призабойную зону практически отсутствует и может быть реализована только через трещину гидроразрыва. При наличии трещины геометрия фильтрационных потоков существенно меняется, поэтому актуальна разработка моделей фильтрации в пласте с трещиной гидроразрыва. Стационарные модели фильтрации в пластах с трещиной гидроразрыва разработаны достаточно хорошо [1]. Рассмотрим возможность использования нестационарных моделей, более актуальных для низкопроницаемых коллекторов, в рамках гидродинамических методов исследования пластов [1–6]. Наиболее полная теория нестационарной фильтрации в пластах с трещиной гидроразрыва построена в последние годы на основе модели билинейного потока [7–11]. Полученные в работах [7–11] решения позволяют в явном виде определить зависимости дебита, давления в скважине, распределения давления в пласте и трещине от коллекторских характеристик пласта и трещины, физических свойств фильтрующейся жидкости. При этом рассматривается трещина бесконечной протяженности. Такой подход упрощает процесс построения решений соответствующих краевых задач. Однако эти модели имеют существенное ограничение, обусловленное тем, что длина трещины не входит в число определяющих параметров соответствующих моделей. В настоящей работе

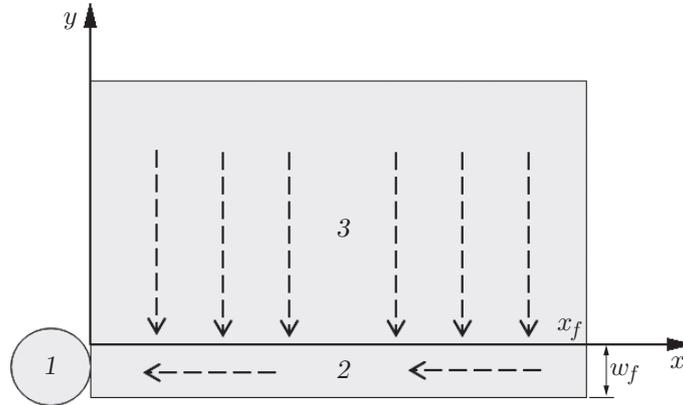


Рис. 1. Схема области течения (вид сверху):

1 — скважина, 2 — трещина, 3 — пласт; стрелки — направление течения флюида

это ограничение отсутствует, так как рассматривается модель трещины ограниченной длины.

Постановка задачи. Рассмотрим теорию билинейного потока флюида в системе пласт — вертикальная трещина гидроразрыва пласта (ГРП) для случая, когда протяженность пласта по горизонтали считается бесконечной, а трещина имеет конечную длину. Поток является билинейным, это означает, что в системе пласт — трещина реализуется два взаимно перпендикулярных потока флюида: фильтрация из пласта в трещину и фильтрация по трещине к скважине.

Области фильтрации в пласте и трещине являются симметричными относительно осей x и y , поэтому при моделировании достаточно рассмотреть 1/4 этих областей: $0 < x < x_f$, $0 < y < \infty$ и $0 < x < x_f$, $-w_f < y < 0$ (рис. 1).

По аналогии с [2, 9] постановка задачи имеет вид

$$a \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}}, \quad 0 < \bar{x} < 1, \quad \bar{t} > 0; \quad (1)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}, 0) = 0; \quad (2)$$

$$\bar{P}_f(0, \bar{t}) = 1, \quad \frac{\partial \bar{P}_f(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{b}{a}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(1, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}}, \quad 0 < \bar{y} < \infty, \quad \bar{t} > 0; \quad (5)$$

$$\bar{P}_r(\bar{y}, 0) = \bar{P}_r(\infty, \bar{t}) = 0; \quad (6)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 0. \quad (7)$$

Задача (1)–(4) описывает распределение давления в трещине, при этом на забое скважины (линия $\bar{x} = 0$) выполняется одно из условий (3), которые соответствуют эксплуатации скважины в режиме заданной депрессии или в режиме заданного дебита (первая и вторая краевые задачи соответственно). Распределение давления в пласте описывается задачей (5)–(7), при этом на границе пласт — трещина выполняется условие (7). Таким образом, в рассматриваемой модели нестационарное распределение давления в пласте является двумерным $\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$, а в трещине одномерным $\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t})$. При этом давление $\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t})$

принято равным его среднему значению по ширине трещины. Такое приближение является допустимым, вследствие того что ширина трещины значительно меньше ее длины и высоты [12]. В соответствии с теорией фильтрации в пластах с трещиной гидроразрыва полагается, что жидкость поступает в скважину только через трещину, а из пласта в трещину — через ее боковые поверхности, трещина по высоте вскрывает пласт по всей толщине, поток жидкости в трещину через ее торец считается пренебрежимо малым.

В (1)–(7) использованы следующие безразмерные величины и обозначения:

$$\bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P^*}, \quad \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P_{1,2}^*}, \quad P_1^* = P_c - P_0, \quad P_2^* = \frac{Q\mu}{k_r h_r},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{x_f}, \quad \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \quad \bar{t} = t \frac{\varkappa_r}{x_f^2}, \quad a = \frac{\varkappa_f}{\varkappa_r}, \quad b = a \frac{k_r}{k_f} \frac{x_f}{w_f},$$

P — давление; x, y — координаты; t — время; x_f — полудлина трещины; w_f — полуширина трещины; \varkappa — коэффициент пьезопроводности; k — проницаемость; Q — дебит скважины; h_r — мощность пласта; индексы $f, r, 0$ соответствуют параметрам трещины, пласта и начальным параметрам.

Заметим, что рассматриваемая модель описывает как отбор жидкости из пласта через трещину гидроразрыва, так и закачку жидкости в пласт. Эти случаи различаются знаками величин Q и $P_c - P_0$.

Метод решения задачи. Задача (1)–(7) решается с помощью метода преобразований Лапласа функции давления по переменной t [13]:

$$\bar{P}(\bar{x}, s) = L[\bar{P}(\bar{x}, \bar{t})] = \int_0^{\infty} \bar{P}(\bar{x}, \bar{t}) e^{-s\bar{t}} d\bar{t}.$$

С учетом начальных условий (2), (6) задача (1)–(7) в пространстве изображений Лапласа преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \bar{P}_f}{d\bar{x}^2} + \frac{b}{a} \frac{d\bar{P}_r}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{s}{a} \bar{P}_f; \quad (8)$$

$$\bar{P}_f \Big|_{\bar{x}=0} = \frac{1}{s}, \quad \frac{d\bar{P}_f}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = \frac{b}{a} \frac{1}{s}; \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{P}_f}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=1} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \bar{P}_r}{d\bar{y}^2} = s \bar{P}_r; \quad (11)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, 0, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s), \quad \bar{P}_r(\bar{y}, s) = 0, \quad \bar{y} \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Задача (8)–(12) решается стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для первой (первое условие (9)) и второй (второе условие (9)) краевых задач решения соответственно имеют вид

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = -\frac{1}{s} \frac{\operatorname{ch}[f(s)(1-\bar{x})]}{\operatorname{ch}[f(s)]}, \quad f(s) = \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}} \sqrt{s}; \quad (13)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = -\frac{b}{a} \frac{1}{s f(s)} \frac{\operatorname{ch}[f(s)(1-\bar{x})]}{\operatorname{sh}[f(s)]}. \quad (14)$$

При известном значении $\bar{P}_f(\bar{x}, s)$ из (13) или (14) следует, что распределение давления в пласте определяется из выражения

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s) e^{-\bar{y}\sqrt{s}}. \quad (15)$$

Переход в выражениях (13)–(15) к оригиналу представляет собой окончательное решение задач.

Решение первой краевой задачи. Рассмотрим переход к оригиналу в выражении (13), которое представим в виде

$$\bar{P}_f(x, s) = -\frac{1}{s} L[V(x, t)]; \quad (16)$$

$$L[V(\bar{x}, \bar{t})] = \operatorname{ch} \left[(1 - \bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right] / \operatorname{ch} \left[\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right]. \quad (17)$$

Используя теорему подобия (здесь и далее функции $f(t)$ и $F(s)$ означают соответственно оригинал и изображение) [13]

$$f(at) \iff \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

выражение (17) можно представить в виде

$$L[V(\bar{x}, b^2\bar{t})] = \operatorname{ch} \left[(1 - \bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}} \right] / \operatorname{ch} \left[\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}} \right]. \quad (18)$$

В выражении (16) переходим к оригиналу, используя теорему интегрирования для оригинала [13]:

$$\frac{1}{s} F(s) \iff \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = - \int_0^{\bar{t}} V(\bar{x}, b^2\tau) d\tau. \quad (19)$$

Таким образом, необходимо найти $V(\bar{x}, b^2\bar{t})$ из (18), тогда давление в трещине определяется выражением (19).

Для перехода к оригиналу в (18) используем следующую формулу операционного исчисления [13]:

$$L^{-1}[F(s + \sqrt{s})] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u}{(t-u)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(t-u)}\right) f(u) du. \quad (20)$$

Получаем

$$f(u) = L^{-1}F(s) = L^{-1} \left[\frac{\operatorname{ch}(b(1-\bar{x})\sqrt{s}/\sqrt{a})}{\operatorname{ch}(b\sqrt{s}/\sqrt{a})} \right] \quad (21)$$

(L^{-1} — символ обратного преобразования Лапласа).

Далее используем формулу перехода от изображения к оригиналу [14]

$$L^{-1} \left[\frac{\operatorname{ch}((l-x)\sqrt{s/\kappa})}{\operatorname{ch}(l\sqrt{s/\kappa})} \right] = -\frac{\kappa}{l} \frac{\partial}{\partial x} \theta_2 \left(\frac{x}{2l} \frac{\kappa t}{l^2} \right), \quad 0 < x < l, \quad (22)$$

где вторая тета-функция определяется по формуле

$$\theta_2(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(v+n)^2}{\tau}\right). \quad (23)$$

Используя формулы (22), (23), выражение (21) можно представить в виде

$$L^{-1} \left[\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} (1 - \bar{x}) \sqrt{s} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s} \right)} \right] = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{1}{\bar{t}\sqrt{\bar{t}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \exp \left(- \frac{b^2 (\bar{x} + 2n)^2}{4a\bar{t}} \right). \quad (24)$$

С учетом (20), (21), (24) из (18) находим

$$V(\bar{x}, b^2\bar{t}) = - \frac{b}{4\pi\sqrt{a}} \int_0^{b^2\bar{t}} \exp \left(- \frac{u^2}{4(b^2\bar{t} - u)} \right) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \exp \left(- \frac{b^2}{4au} (\bar{x} + 2n)^2 \right) \frac{du}{\sqrt{u} (b^2\bar{t} - u)^{3/2}}. \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в (19), получаем

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{b}{4\pi\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} d\tau \int_0^{b^2\tau} \exp \left(- \frac{u^2}{4(b^2\tau - u)} \right) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \exp \left(- \frac{b^2}{4au} (\bar{x} + 2n)^2 \right) \frac{du}{\sqrt{u} (b^2\tau - u)^{3/2}}. \quad (26)$$

Изменяя в (26) порядок интегрирования и вычисляя интеграл по τ

$$\int_{u/b^2}^{\bar{t}} \exp \left(- \frac{u^2}{4(b^2\tau - u)} \right) \frac{d\tau}{(b^2\tau - u)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{b^2u} \operatorname{erfc} \left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t} - u}} \right),$$

выражение для распределения давления в трещине можно представить в виде

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a} b} \int_0^{b^2\bar{t}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \exp \left(- \frac{b^2}{4au} (\bar{x} + 2n)^2 \right) \times \\ \times \operatorname{erfc} \left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t} - u}} \right) \frac{du}{u\sqrt{u}} \quad (27)$$

($\operatorname{erfc} \xi = \frac{2}{\pi} \int_{\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz$ — дополнительная функция ошибок).

Используя в (27) замену переменной интегрирования $u = \rho^2 b^2 \bar{t}$, имеем

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \exp \left(- \frac{1}{4a\rho^2\bar{t}} (\bar{x} + 2n)^2 \right) \times \\ \times \operatorname{erfc} \left(\frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \frac{d\rho}{\rho^2}. \quad (28)$$

Аналогичным образом, переходя к оригиналу в (15), получаем выражение для давления в пласте

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \exp\left(-\frac{1}{4a\rho^2 \bar{t}} (\bar{x} + 2n)^2\right) \times \\ \times \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b \bar{t} + \bar{y}}{2\sqrt{b}\sqrt{\bar{t}}\sqrt{1-\rho^2}}\right) \frac{d\rho}{\rho^2}. \quad (29)$$

Таким образом, выражения (28), (29) представляют собой окончательное решение первой краевой задачи.

Из выражения (28) определяется скорость фильтрации жидкости в трещине:

$$\bar{v}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[(-1)^n \exp\left(-\frac{(\bar{x} + 2n)^2}{4a\rho^2 \bar{t}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n (\bar{x} + 2n)^2}{2a\rho^2 \bar{t}} \exp\left(-\frac{(\bar{x} + 2n)^2}{4a\rho^2 \bar{t}}\right) \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right) \frac{d\rho}{\rho^2}. \quad (30)$$

При $\bar{x} = 0$ из выражения (30) следует формула для определения дебита скважины

$$\bar{Q}(\bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2}{a\rho^2 \bar{t}}\right) \left(1 - \frac{2n^2}{a\rho^2 \bar{t}}\right) \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right) \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Из выражения (29) можно найти расход жидкости, поступающей из пласта в трещину:

$$\frac{\partial \bar{P}_r(\bar{x}, 0, \bar{t})}{\partial \bar{y}} = \bar{q}(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n (\bar{x} + 2n) \times \\ \times \exp\left(-\frac{(\bar{x} + 2n)^2}{4a\rho^2 \bar{t}}\right) \exp\left(-\frac{(\rho^2 b \sqrt{\bar{t}} + \bar{y})^2}{4(1-\rho^2)}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Заметим, что из формул (27), (28) при $n = 0$ следуют соответствующие выражения, полученные в рамках модели трещины бесконечной длины. Подробный анализ этой модели проведен в [8].

Решение второй краевой задачи. Выражение (14) представим в виде

$$\bar{P}_f(x, s) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{s} L[V(x, t)], \quad (31)$$

где

$$L[V(\bar{x}, \bar{t})] = \frac{1}{\sqrt{s/b^2 + \sqrt{s/b^2}}} \frac{\operatorname{ch}[(1-\bar{x})(b/\sqrt{a})\sqrt{s/b^2 + \sqrt{s/b^2}}]}{\operatorname{sh}[(b/\sqrt{a})\sqrt{s/b^2 + \sqrt{s/b^2}}]}. \quad (32)$$

Используя теорему интегрирования для оригинала

$$\frac{1}{s} F(s) = \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

в выражении (31) переходим к оригиналу

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} V(\bar{x}, \tau) d\tau. \quad (33)$$

Таким образом, необходимо найти $V(\bar{x}, \bar{t})$ для соотношения (32). Тогда распределение давления в трещине определяется выражением (31).

Переход к оригиналу в (32) реализуется с использованием методики, аналогичной использованной при решении первой задачи, поэтому, опуская подробные расчеты, приведем окончательный результат.

Распределения давления в трещине и пласте описываются выражениями

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{(2n-\bar{x})^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\rho; \quad (34)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{(2n-\bar{x})^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\bar{t} + \bar{y}}{2\sqrt{\bar{t}}(1-\rho^2)}\right) d\rho. \quad (35)$$

При $\bar{x} = 0$ из (34) следует выражение, определяющее зависимость давления на забое скважины от времени:

$$\bar{P}_f(0, \bar{t}) = \frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{a\rho^2\bar{t}}\right)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}} + \bar{y}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\rho.$$

Используя закон Дарси, из выражений (34), (35) можно найти скорости фильтрации жидкости в трещине и пласте.

Результаты численных расчетов и их анализ. Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов по формулам (28), (29). Рассматривается отбор жидкости из пласта через трещину ГРП со следующими параметрами: половина длины трещины $x_f = 100$ м, давление в скважине $P_c = 100 \cdot 10^5$ Па, начальное давление $P_0 = 200 \cdot 10^5$ Па, мощность (толщина) пласта $h_r = 10$ м, ширина трещины $w_f = 5 \cdot 10^{-3}$ м, проницаемости пласта и трещины соответственно $k_r = 10^{-15}$ м², $k_f = 10^{-9}$ м², вязкость жидкости $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ Па·с, коэффициенты упругоэластичности пласта и трещины $\beta = 10^{-9}$ Па⁻¹. В расчетах n изменялось в диапазоне от -5 до 5 , так как ряды, входящие в решения, сходятся достаточно быстро.

На рис. 2 представлено распределение давления в трещине при фиксированном значении ее проницаемости $k_f = 10^{-9}$ м² и различных значениях времени. Давление по всей длине трещины со временем уменьшается, при этом скорость падения давления со временем также резко уменьшается.

На рис. 3 представлено распределение давления в трещине при различных значениях ее проницаемости. Видно, что с увеличением проницаемости трещины величина падения давления вдоль трещины уменьшается. Принято считать, что изменение давления в трещине зависит от ее безразмерной проводимости $\bar{k}_f w_f = k_f w_f / (k_r x_f)$, которая может варьироваться в диапазоне $1 < \bar{k}_f w_f < 1000$ [1–3]. Установлено, что при $\bar{k}_f w_f > 300$ распределение давления в трещине является практически однородным и совпадает с давлением на забое скважины (так называемая трещина бесконечной проводимости). На рис. 3 этому случаю соответствует кривая 1 ($\bar{k}_f w_f = 500$), кривая 3 соответствует трещине малой

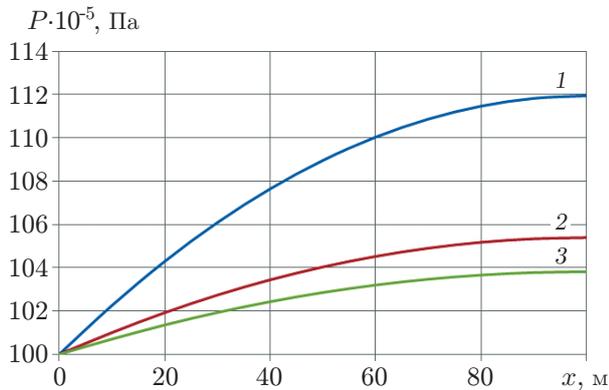


Рис. 2

Рис. 2. Распределение давления в трещине при $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$ и различных значениях времени:

1 — $t = 1$ сут, 2 — $t = 5$ сут, 3 — $t = 10$ сут

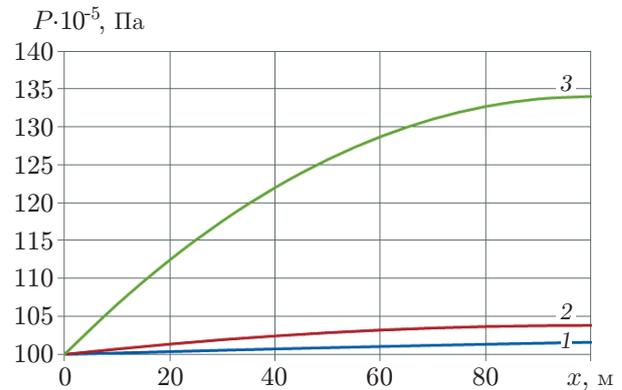


Рис. 3

Рис. 3. Распределение давления в трещине при $t = 10$ сут и различных значениях проницаемости трещины:

1 — $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$, 2 — $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$, 3 — $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$

проводимости ($\overline{k_f w_f} = 5$), при этом вдоль трещины реализуется значительный перепад давления.

На рис. 4 показано распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости пласта. Видно, что с увеличением проницаемости пласта величина падения давления в трещине увеличивается.

На рис. 5 представлены распределения давления в трещинах различной длины при $t = 1$ сут. Видно, что влияние длины трещины на распределение давления является существенным. Кривая 4 соответствует модели трещины бесконечной длины (эта модель построена по формуле (28) при $n = 0$).

Из рис. 6 следует, что зависимость дебита от времени существенна на начальной стадии. Со временем устанавливается практически постоянное значение дебита.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов с использованием выражения (34) при указанных выше значениях параметров и $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут}$.

На рис. 7 видно, что с увеличением проницаемости трещины величина падения давления вдоль трещины уменьшается. При $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$ давление в трещине уменьшается менее чем на 10^5 Па (штриховые линии). Это означает, что при принятых значениях параметров трещина имеет высокую проводимость, поэтому распределение давления вдоль трещины становится практически однородным (см. также рис. 3 для первой краевой задачи). При отборе жидкости с постоянным расходом падение давления наблюдается по всей длине трещины включая точки $x_f = 0$, $x_f = 100 \text{ м}$. Со временем скорость падения давления значительно уменьшается.

Заключение. В работе представлены новые аналитические формулы, описывающие распределение давления в пласте с трещиной гидроразрыва. Получены аналитические решения, позволяющие исследовать зависимости давления и дебита от коллекторских характеристик пласта и трещины, физических свойств флюида и пористой среды. Эти аналитические решения могут служить теоретической основой дальнейших гидродинамических исследований пластов с трещинами гидроразрыва методом типовых кривых, который предполагает проведение сопоставительного анализа теоретических зависимостей дебита

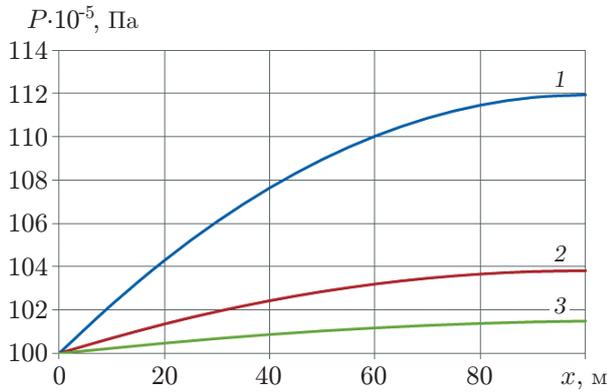


Рис. 4

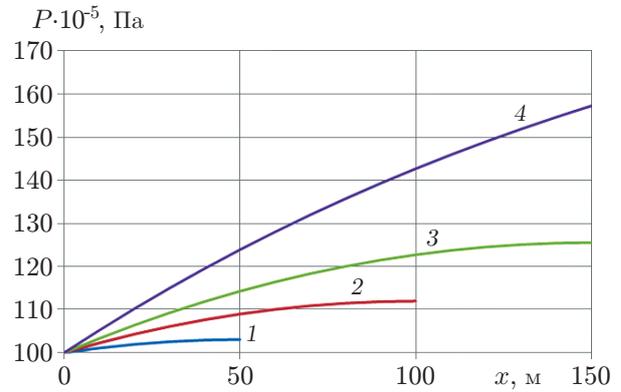


Рис. 5

Рис. 4. Распределение давления в трещине при $t = 10$ сут и различных значениях проницаемости пласта:

1 — $k_r = 10^{-14} \text{ м}^2$, 2 — $k_r = 10^{-15} \text{ м}^2$, 3 — $k_r = 10^{-16} \text{ м}^2$

Рис. 5. Распределение давления в трещине при $t = 1$ сут и различных значениях x_f :

1 — $x_f = 50 \text{ м}$, 2 — $x_f = 100 \text{ м}$, 3 — $x_f = 150 \text{ м}$, 4 — $x_f = \infty$

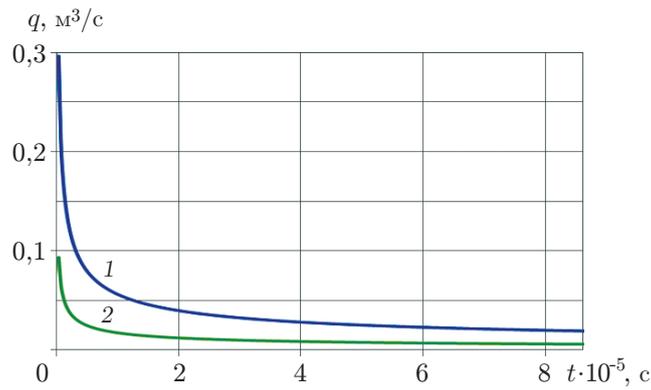


Рис. 6. Зависимость дебита скважины от времени при различных значениях проницаемости трещины:

1 — $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$, 2 — $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$

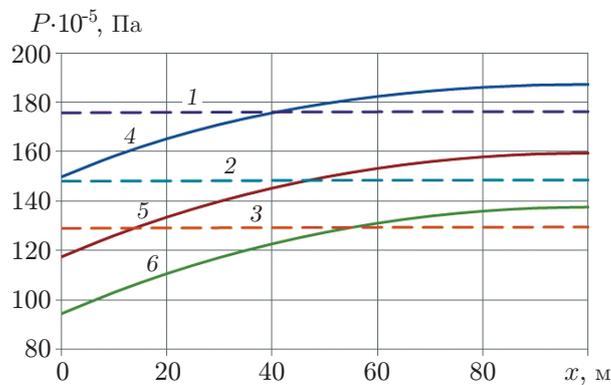


Рис. 7. Распределение давления в трещине при различных значениях ее проницаемости и времени:

сплошные линии — $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$, штриховые — $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$; 1, 4 — $t = 1$ сут, 2, 5 — $t = 5$ сут, 3, 6 — $t = 10$ сут

и давления в скважине от времени с кривыми, полученными в экспериментах на скважинах. Эти решения также могут служить для тестирования вычислительных алгоритмов, используемых в различных симуляторах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каневская Р. Д.** Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: Недра-Бизнесцентр, 1999.
2. **Cinco-Ley H., Samaniego V. F.** Transient pressure analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33, N 9. P. 1749–1766.
3. **Cinco-Ley H.** Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // Soc. Petrol. Engrs. 1982. N 1. P. 639–665. DOI: 10.2118/10043-MS.
4. **Wong D. W., Harrington A. G., Cinco-Ley H.** Application of the pressure-derivative function in the pressure-transient testing of fracture wells // SPE Format. Evaluat. 1986. V. 1, iss. 5. P. 470–480.
5. **Назмутдинов Ф. Ф., Хабибуллин И. Л., Вахитова Н. К.** Моделирование фильтрации к скважине с трещиной ГРП // Вестн. Башкир. ун-та. 2018. Т. 23, № 4. С. 953–956.
6. **Blasingame T. A., Poe B. D.** Semianalytic solutions for a well with a single finite-conductivity vertical fracture // Proc. of the SPE Annual technical conf. and exhibit., Houston (USA), 3–6 Oct. 1993. S. 1, 1993. P. 89–100.
7. **Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А.** Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестн. Башкир. ун-та. 2017. Т. 22, № 2. С. 309–314.
8. **Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А.** К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // Вестн. Башкир. ун-та. 2018. Т. 23, № 4. С. 958–963.
9. **Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А.** Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 5. С. 6–9.
10. **Нагаева З. М., Шагапов В. Ш.** Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикл. математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 3. С. 319–329.
11. **Хасанов М. М., Головнева О. Ю.** Определение дебита вертикальных скважин с гидроразрывом пласта на неустановившемся режиме фильтрации // Нефт. хоз-во. 2016. № 12. С. 64–68.
12. **Баренблатт Г. И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1972.
13. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1971.
14. **Doetsch G.** Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und Physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion // Ann. Scuola Normale Superiore Pisa. Ser. 2. 1993. V. 2, N 3. P. 325–342.

*Поступила в редакцию 23/VII 2021 г.,
после доработки — 8/X 2021 г.
Принята к публикации 25/X 2021 г.*