ЛИТЕРАТУРА

1. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1960.— № 6.
2. **Когарко Б. С.** Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации // ДАН СССР.— 1964.— Т. 155, № 4.
3. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1, 2.
4. **Гаврилюк С. Л.** Существование, единственность и устойчивость по Лаксу бегущих волн в полидисперсной пузырьковой среде с диссипацией // Дифференциальные уравнения с частными производными: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ИМ.— 1989.
5. **Gasenko V. G., Izergin V. L.** Nonlinear waves stochastisation in a polydispersive gas-liquid mixture // Тр. XI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике.— Новосибирск, 1987.— Ч. 2.
6. **Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.** Курс гомотопической топологии.— М.: Наука, 1989.
7. **Динамические** системы — 1 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления.— М.: ВИНИТИ, 1985.
8. **Smoller J.** Shock waves and reaction-diffusion equations.— N. Y.: Springer-Verlag, 1983.
9. **Conley C.** Isolated invariant sets and the Morse index.— Providence: Amer. Math. Soc., 1978.— (Conf. Board Math. Sci.; N 38).

г. Новосибирск *Поступила 22/I 1990 г.*

УДК 551.466

В. В. Булатов

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Задача об установившихся гравитационных внутренних волнах (ВВ), возникающих в потоке стратифицированной среды, набегающем на неровное дно, имеет большое значение для исследования волновых процессов в океане и атмосфере. При решении данной задачи в линейном приближении наиболее распространенными являются два способа. Первый заключается в точном численном решении линеаризованной системы уравнений гидродинамики [1, 2], второй — в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму неровного дна, или функцией, имеющей простой вид (например, полусферическая форма неровного дна [3]), или системой точечных источников, взятых с некоторым весом [1, 4]; в результате для частных случаев распределения частоты Брента — Вяйсяля $N(z)$ (обычно $N(z)$ предполагается постоянной [3, 4]) задачу удается решить аналитически. К недостаткам первого способа относится ограниченность области пространства, в котором численно решается задача, при исследовании задачи вторым способом не удается оценить границы применимости приближений. Поэтому представляет интерес решить задачу с использованием функции Грина уравнения внутренних волн, а также ее асимптотик [5—7], что позволяет не только численно исследовать данную задачу, но и применять различные приближения, упрощающие решение.

В настоящей работе рассматривается задача обтекания неровного дна потоком стратифицированной жидкости с произвольным распределением частоты Брента — Вяйсяля $N(z)$, высота подводного препятствия предполагается малой по сравнению с толщиной слоя жидкости. Свободная поверхность $z = 0$ заменяется твердой крышкой, декартова система координат выбирается так, чтобы плоскость x, y была расположена на горизонтальной плоскости дна. При $x \to -\infty$ поток асимптотически одномерный и течет с постоянной скоростью V вдоль оси x. Поток предполагается слабостратифицированным, т. е. внутреннее число Фруда $\mathrm{Fr} = V/N_* h_*$ (N_* — характерная частота Брента — Вяйсяля, h_* — высота препятствия) больше единицы. Физически это означает, что частицы жидкости в невозмущенном потоке обладают достаточной кинетической энергией, чтобы подняться на высоту препятствия, т. е. картина траекторий, лежащих на дне, качественно должна иметь такой же вид, как и в случае однородной жидкости [3].

Вертикальная компонента w скорости ВВ удовлетворяет следующему уравнению ВВ, которое получается из линеаризованной системы уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска [5]:

$$L_* w = 0,$$

$$L_* = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

На дне, форма поверхности которого описывается функцией $Z(x, y) = -h^0 + h(x, y)$, выполняется условие непротекания $\mathbf{u}\,\mathrm{grad}\,Z = 0$ ($\mathbf{u} = (V + u_1, u_2, w)$ — вектор скоростей ВВ, (u_1, u_2) — горизонтальные компоненты скорости ВВ). После линеаризации в предположении $h(x, y) \ll h^0$ граничное условие сносится на дно $z = -h^0$ и имеет вид [2] $w = -V\partial h/\partial x \equiv f(x, y)$, $z = -h^0$.

В [5] рассматривалась функция $G_*(x, y, z, z_0, t)$, которая является решением задачи

$$L_* G_* = Q\theta(t)\,\delta''_{tt}(x - Vt)\,\delta(y)\,\delta'(z - z_0),$$

$$G_* = 0, \quad z = 0, -h^0.$$

Здесь $\theta(t) = 0$ при $t < 0$; $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$; z_0 — глубина погружения включенного в момент $t = 0$ точечного источника массы; Q — его интенсивность. В этом случае функция G_* описывает поле вертикальных скоростей ВВ. Предел G_* при $t \to \infty$ и фиксированном $\xi = x - VT$ запишем в форме

$$G(\xi, y, z, z_0) = \lim_{t\to\infty} G_*(x, y, z, z_0, t),$$

где $G = \sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n$; $G_n = -I_n^0(\xi < 0)$; $G_n = I_n^0 + I_n + I_n^+(\xi > 0)$;

$$I_n^{\pm} = \frac{Q}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(\mp i\mu_n(\nu)\,\xi - i\nu y)\,A_n(\nu, z, z_0)\,d\nu;$$

$$I_n^0 = \frac{Q}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda_n(\nu)\,|\xi| - i\nu y)\,B_n(\nu, z, z_0)\,d\nu;$$

$$A_n(\nu, z, z_0) = \frac{\mu_n^3(\nu)\,V^2}{\mu_n^2(\nu) + \nu^2}\left(\frac{\mu_n(\nu)\,\mu_n'(\nu)}{\nu} + 1\right)\varphi_n(z, \nu)\frac{\partial\varphi_n(z_0, \nu)}{\partial z_0};$$

$$B_n(\nu, z, z_0) = \frac{\lambda_n^3(\nu)\,V^2}{\lambda_n^2(\nu) - \nu^2}\left(\frac{\lambda_n(\nu)\,\lambda_n'(\nu)}{\nu} - 1\right)\psi_n(z, \nu)\frac{\partial\psi_n(z_0, \nu)}{\partial z_0}.$$

Здесь $\mu_n(\nu)$, $\lambda_n(\nu)$, $\varphi_n(z, \nu)$, $\psi_n(z, \nu)$ — собственные числа и собственные функции соответствующих задач

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^2} + [\mu_n^2(\nu) + \nu^2]\left[\frac{N^2(z)}{V^2\mu_n^2(\nu)} - 1\right]\varphi_n = 0,$$

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2} + [\lambda_n^2(\nu) - \nu^2]\left[\frac{N^2(z)}{V^2\lambda_n^2(\nu)} + 1\right]\psi_n = 0,$$

$$\varphi_n = \psi_n = 0, \; z = 0, -h^0.$$

Функция $G(\xi, y, z, z_0)$, описывающая поле вертикальной скорости установившихся внутренних волн от источника в потоке стратифицированной жидкости, удовлетворяет уравнению

$$LG = V^2\delta''(\xi)\delta(y)\delta'(z - z_0),$$

$$L = V^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Так как нас интересует установившееся течение стратифицированной жидкости над неровным дном, то вертикальная компонента w скорости

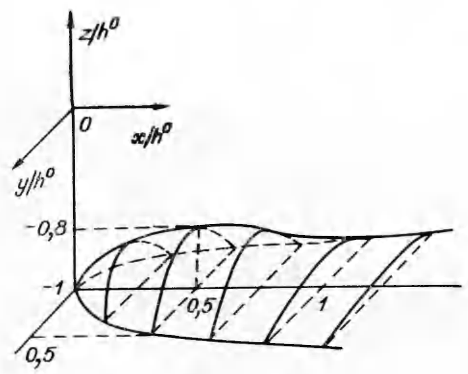

Рис. 1

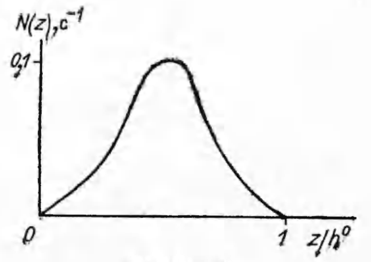

Рис. 2

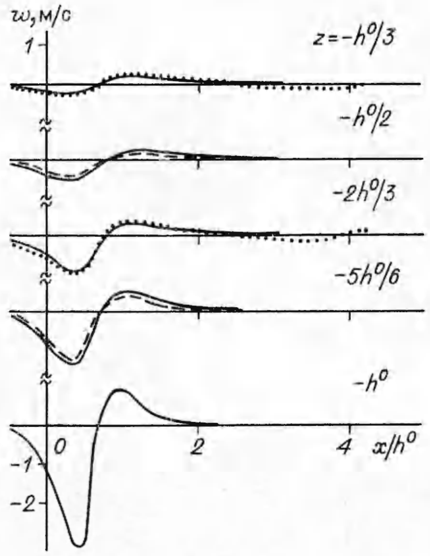

Рис. 3

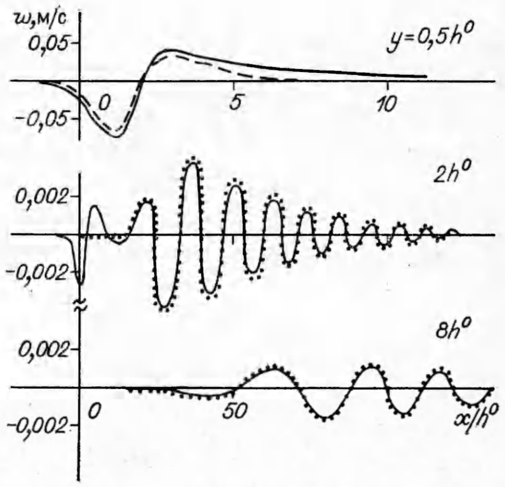

Рис. 4

ВВ должна удовлетворять уравнениям

(1) $$Lw = 0;$$

(2) $$w = 0,\ z = 0;$$

(3) $$w = f(\xi,\ y),\ z = -h^0.$$

Обозначим далее ξ через x, тогда функцию w, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям (2), (3), можно представить в виде

(4) $$w = \frac{1}{Q}\iint\limits_{\Omega} G(x - x',\, y - y',\, z,\, -h^0)\, f(x', y')\, dx'\, dy',$$

где Ω — область; $f(x, y) \neq 0$. Полученное таким образом решение задачи представляет собой сумму трехкратных квадратур, что затрудняет как численный расчет функции w, так и ее качественный анализ, поэтому в дальнейшем воспользуемся асимптотиками функции $G(x, y, z, z_0)$, построенными в [6, 7]. Для определенности будем рассматривать форму препятствия, взятую из [2], тогда вертикальный срез функции $h(x, y)$, перпендикулярный оси x, представляет собой полуэллипс, и, следуя обозначениям [2], функцию $h(x, y)$ можно представить в виде $h(x, y) = H(x) \times W^{-1}(x)(W^2(x) - y^2)^{1/2}$ при $y \leqslant W(x)$ и $h(x, y) = 0$ при $y > W(x)$, где $H(x) = \frac{3}{2} D x_*^2 \left(1 + x_*^4\right)^{-1}$, $W(x) = H(x)$ при $x \leqslant X$, $W(x) = \frac{3}{4} D x_*^{0,4}$ при $x > X$, $x_* = x/X$, $X = 25$ м, $D = 13$ м. Значение $h^0 = 50$ м, максимальная высота препятствия $0{,}2h^0$ (рис. 1). В этом случае можно провести интегрирование по переменной y' и выражение для функции w записать в виде

(5)
$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad w_n = w_n^- + w_n^+,$$

$$w_n^- = -\frac{V}{Q} \int_0^x dx' \int_0^\infty A_n(\nu, z, -h^0) \sin[\mu_n(\nu)(x - x')] \cos(\nu y) P(\nu, x') \, d\nu,$$

$$w_n^+ = -\frac{V \operatorname{sign}(x - x')}{2Q} \int_0^\infty dx' \int_0^\infty B_n(\nu, z, -h^0) \times$$
$$\times \exp(-\lambda_n(\nu) |x - x'|) \cos(\nu y) P(\nu, x') \, d\nu,$$

$$P(\nu, x) = \frac{J_1(\tau)}{\tau} [W(x) H'(x) - H(x) W'(x)] + H(x) W(x) J_0(\tau), \quad \tau = \nu W(x)$$

($J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка). Результаты численных расчетов функции w (сплошная линия) для распределения $N(z)$, взятого из [2] (рис. 2), приведены на рис. 3, 4, остальные параметры имеют следующие значения: $Q = 1$ м³/с, $V = 5$ м/с. Для рис. 3 $y = 0$, для рис. 4 $z = -0{,}5h^0$. Пунктирная линия на рис. 3 — расчеты вертикальной скорости при $y = 0$, взятые из [2]. Отметим, что все особенности полученных нами численных результатов совпадают с указанными в [2]: вертикальная скорость w_0 быстро убывает по мере уменьшения глубины z и при $z = -0{,}5h^0$ составляет около 15 % от значения w на дне ($z = -h^0$), совпадающего с функцией $f(x, y)$. Небольшие различия в пространственных структурах двух решений возникают вследствие того, что при численном решении задачи в [2] не использовалось приближение Буссинеска и поверхность жидкости при $z = 0$ считалась свободной.

Рассмотрим теперь функцию w в области, примыкающей к неровному дну. Асимптотика ближнего поля функции $G(x, y, z, z_0)$ имеет вид [7]

(6)
$$G(x, y, z, z_0) \approx \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{z_-}{(\rho^2 + z_-^2)^{3/2}} + \frac{z_+}{(\rho^2 + z_+^2)^{3/2}} - \right.$$
$$- \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2mh^0 - z_-}{(\rho^2 + (2mh^0 - z_-)^2)^{3/2}} - \frac{2mh^0 + z_-}{(\rho^2 + (2mh^0 + z_-)^2)^{3/2}} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{2mh^0 - z_+}{(\rho^2 + (2mh^0 - z_+)^2)^{3/2}} - \frac{2mh^0 + z_+}{(\rho^2 + (2mh^0 + z_+)^2)^{3/2}} \right] \right\} \equiv b(x, y, z, z_0)$$
$$(\rho^2 = x^2 + y^2, \; z_- = z - z_0, \; z_+ = z + z_0).$$

Функция $b(x, y, z, z_0)$ — сумма слагаемых, каждое из которых есть производная по z от фундаментального решения уравнения Лапласа и представляет собой поле, создаваемое источником, находящимся на глубине $z_m = \pm z_0 + 2mh^0$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) в однородной жидкости. Ряд (6) быстро сходится при больших m, так как m-е слагаемое убывает как m^{-3}, и для достижения точности порядка процента требуется суммировать не более чем десять членов ряда. Заменив в (4) функцию $G(x, y, z, z_0)$ на $b(x, y, z, z_0)$, получим выражение для w в области, примыкающей к неровному дну:

(7)
$$w \approx \frac{1}{Q} \iint_{\Omega} b(x - x', y - y', z, -h^0) f(x', y') \, dx' \, dy' \equiv S(x, y, z).$$

Функция S удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям (2), (3), т. е. описывает обтекание неровного дна потоком однородной жидкости. На рис. 3, 4 представлены результаты расчетов функции S (штриховая линия). Как показывают численные расчеты, на расстоя-

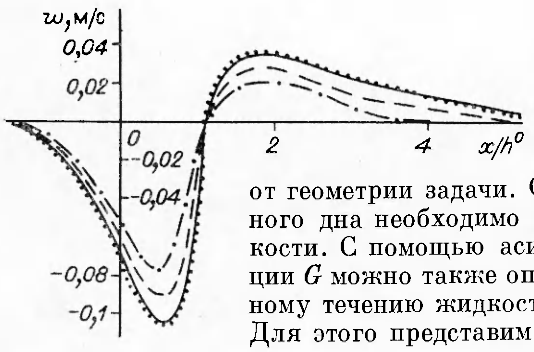

Рис. 5

ниях порядка h^0 от неровного дна течение жидкости почти потенциальное и зависит только от геометрии задачи. Однако при удалении от неровного дна необходимо учитывать стратификацию жидкости. С помощью асимптотики ближнего поля функции G можно также определить поправки к потенциальному течению жидкости, учитывающие стратификацию. Для этого представим $b(x, y, z, z_0)$ в виде [8]

$$b(x, y, z, z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, y, z, z_0),$$

$$K_n(x, y, z, z_0) = \frac{nQ}{(h^0)^2} K_0\left(\frac{\pi n\rho}{h^0}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{h^0}\right) \cos\left(\frac{\pi nz_0}{h^0}\right)$$

($K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка). В [7] показано, что K_n — асимптотика ближнего поля отдельной моды G_n, причем с увеличением номера моды n функция K_n все более точно приближает G_n. Представим далее w в виде

$$w = S + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \tag{8}$$

$$\Delta_n = w_n - \frac{1}{Q} \iint\limits_{\Omega} K_n(x - x', y - y', z, -h^0) f(x', y')\, dx'\, dy'.$$

Тогда процедура вычисления поправок к потенциальному течению жидкости в некоторой точке x, y, z, с помощью которой можно учитывать наличие стратификации, такова: 1) по формуле (7) вычисляется функция S, 2) затем определяется слагаемое Δ_1, если $\Delta_1 \ll S$, то следующие слагаемые в (8) можно не находить, 3) если Δ_1 сравнимо с S, то вычисляется слагаемое Δ_2, 4) если $\Delta_2 \ll S + \Delta_1$, то суммирование в (8) прекращается, и т. д. Описанная процедура позволяет не только точно рассчитывать ближнее поле ВВ, но и оценивать погрешность асимптотических формул. Результаты расчетов S (штрихпунктирная линия), $S + \Delta_1$ (штриховая), $S + \Delta_1 + \Delta_2$ (пунктирная) и w (сплошная) при $z = -0{,}5h^0$, $y = 0{,}5h^0$ представлены на рис. 5. Как показывают численные расчеты, на расстояниях порядка толщины слоя жидкости от неровного дна учет двух поправок дает практически точное значение поля, тем самым отпадает необходимость вычисления всей суммы (5).

На больших расстояниях от неровного дна происходит разделение поля ВВ на отдельные моды, кроме того, на больших расстояниях в случае слабой стратификации можно не учитывать точную форму обтекаемого препятствия, а заменить ее соответствующей системой источников (широко используемый метод при исследовании обтекания различных тел стратифицированной жидкостью [1, 9]). В данном случае неровность дна имеет форму одного выпуклого препятствия, поэтому точное граничное условие на дне можно заменить на

$$w = T(x, y),\ z = -h^0,\ T(x, y) = \Gamma\delta(y)[\delta(x_+) - \delta(x_-)],$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |f(x, y)|\, dx\, dy,$$

где $x_\pm$ — координаты источника и стока, определяемые геометрией задачи, и так как функция $H(x)$ имеет один максимум, то значения $x_\pm$ находятся из уравнения $H''(x) = 0$: $x_+ \approx h^0/4$, $x_- \approx h^0$. Кроме того, на больших расстояниях от источника можно заменить каждую моду G_n ее асимптотикой, имеющей вид [6]

$$G_n(x, y, z, z_0) \approx \frac{Q}{2\pi} \frac{A_n(\nu_*, z, z_0)}{\sqrt{2\mu_n''(\nu_*)\, x}} \sigma^{1/4} \mathrm{Ai}'(\sigma) \equiv$$

$$\equiv R(x, y, z, z_0), \quad \sigma = \left[\frac{3}{2}(\mu_n(\nu_*)\, x - \nu_* y)\right]^{2/3}.$$

Здесь $\mathrm{Ai}'(x)$ — производная функции Эйри; ν_* — корень уравнения $\mu_n'(\nu) = y/x$. В результате поле отдельно взятой моды на больших расстояниях от неровного дна можно представить как

$$w_n \approx \frac{\Gamma}{Q} [R(x_+, y, z, -h^0) - R(x_-, y, z, -h^0)]. \tag{9}$$

Результаты расчетов по (9) приведены на рис. 4 пунктирной линией. Численные расчеты показывают, что на расстояниях больше $10h^0$ применение асимптотики функции G и замена обтекаемого препятствия соответствующей системой источников позволяют рассчитывать поле ВВ, не прибегая к громоздким расчетам по (5).

Таким образом, использование функции Грина уравнения внутренних волн позволяет не только точно решить задачу об установившемся течении стратифицированной жидкости над неровным дном, но и на основе асимптотических представлений функции Грина эффективно исследовать поля внутренних волн.

В заключение автор выражает благодарность В. А. Боровикову и Ю. В. Владимирову за плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанянц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В.** Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. МЖГ.— 1987.— Т. 21.
2. **Kallen E.** Surface effects of vertically propagating gravity waves in a stratified fluid // J. Fluid Mech.— 1987.— V. 182.— P. 111.
3. **Бежанов К. А., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М.** Исследование дальнего и ближнего полей в задаче обтекания неровного дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 5.
4. **Janowitz G. S.** Lee waves in three-dimensional stratified flow // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 148.— P. 97.
5. **Боровиков В. А., Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Левченко Е. С.** О расчете поля внутренних волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // ПМТФ.— 1989.— № 4.
6. **Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я.** Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1984.— Т. 20, № 6.
7. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Ближнее поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником в потоке стратифицированной жидкости // ПМТФ.— 1991.— № 1.
8. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.
9. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.

г. Москва *Поступила 26/II 1990 г., в окончательном варианте — 20/IV 1990 г.*