УДК 517.9; 532.592

ИНВАРИАНТНЫЕ И ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРИНА — НАГДИ

Ю. Ю. Багдерина, А. П. Чупахин*

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, 450077 Уфа
* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru

Найдены все инвариантные и частично инвариантные решения уравнений Грина — Нагди, описывающих второе приближение теории длинных волн. Доказано, что все нетривиальные инвариантные решения сводятся к одному из следующих типов: галилеево-инвариантные, стационарные, автомодельные. Галилеево-инвариантные решения описываются решениями второго уравнения Пенлеве, стационарные — эллиптическими функциями, автомодельные — решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Показано, что все частично инвариантные решения редуцируются к инвариантным.

Ключевые слова: уравнения Грина — Нагди, инвариантные и частично инвариантные решения, уравнение Пенлеве.

1. Основные результаты. Одной из распространенных моделей второго приближения теории длинных волн (“мелкой воды”) является система уравнений Грина — Нагди [1, 2]

$$h_t + (uh)_x = 0, \qquad u_t + uu_x + gh_x = (h^3(u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2))_x/(3h). \tag{1.1}$$

В (1.1) через $h(t,x)$, $u(t,x)$ обозначены высота свободной поверхности жидкости над горизонтальным дном и средняя скорость движения жидкости в горизонтальном направлении; $g = \text{const}$ — ускорение свободного падения.

Базис алгебры Ли, допускаемой уравнениями (1.1), образуют операторы

$$Y_1 = \partial_t, \qquad Y_2 = \partial_x, \qquad Y_3 = t\partial_x + \partial_u, \qquad Y_4 = t\,\partial_t + 2x\,\partial_x + u\,\partial_u + 2h\,\partial_h. \tag{1.2}$$

В данной работе показано, что все инвариантные решения уравнений (1.1) относятся к одному из следующих типов:

а) галилеево-инвариантные решения, порождаемые подалгеброй $\langle Y_1 + \beta Y_3\rangle$ с вещественным параметром $\beta \ne 0$, имеющие представление

$$u = \beta t + U(y), \qquad h = H(y), \qquad UH = c_1, \tag{1.3}$$

где $y = x - \beta t^2/2$; $c_1 = \text{const}$. Пусть

$$w = (\beta c_1/\sqrt{3})^{1/3}/U, \qquad y = (c_1^2/(3\beta))^{1/3}\xi - c_2,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00550, 05-01-97910) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-440.2003.1).

$\alpha = -\sqrt{3}g/(4\beta)$, c_2 — постоянные. Тогда фактор-уравнение, описывающее данные решения, имеет вид

$$w\,\frac{d^2w}{d\xi^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{dw}{d\xi}\Big)^2 - \frac{1}{2} - \xi w^2 + 4\alpha w^3; \tag{1.4}$$

— галилеево-инвариантные решения, порождаемые подалгеброй $\langle Y_3\rangle$, задаваемые формулами

$$u = (x + u_0)/t, \qquad h = h_0/t, \tag{1.5}$$

где u_0, h_0 — произвольные постоянные;

— галилеево-инвариантные автомодельные решения, порождаемые подалгеброй $\langle Y_1 + \beta Y_3, Y_4\rangle$, задаваемые формулами

$$u = \beta t, \qquad h = (\beta^2/(2g))(t^2 - 2x/\beta), \quad \beta \neq 0; \tag{1.6}$$

б) стационарные решения, порождаемые подалгеброй $\langle Y_1\rangle$, имеющие представление

$$u = U(x), \qquad h = H(x), \qquad UH = c_1. \tag{1.7}$$

Фактор-уравнение, описывающее такие решения, приводится к эллиптическому интегралу

$$\int\limits_{h_0}^{H} (-3gc_1^{-2}H^3 + c_2H^2 + c_3H + 3)^{-1/2}\,dH = c_4 \pm x, \tag{1.8}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — постоянные. Положив в (1.8) $c_1 = j\sqrt{g}$, $c_2 = 3 + 6/j^2$, $c_3 = -6 - 3/j^2$, $c_4 = 0$, $h_0 = j^2$, $|j| > 1$, получим найденное в [1] односолитонное решение уравнений Грина — Нагди

$$u = j\sqrt{g}(j^2 + (1 - j^2)\,\mathrm{th}^2\,\xi)^{-1}, \qquad h = j^2 + (1 - j^2)\,\mathrm{th}^2\,\xi, \qquad \xi = (\sqrt{3(j^2 - 1)}/(2j))x;$$

в) автомодельные решения, порождаемые подалгеброй $\langle Y_4\rangle$, имеющие представление

$$u = tU(z), \qquad h = t^2H(z), \qquad z = xt^{-2}. \tag{1.9}$$

Фактор-система для функций U и H имеет вид

$$\begin{gathered}(UH)' - 2zH' + 2H = 0,\\ 3H(g + (U - 2z)U' + U) + (H^3(U' + U'^2 + (2z - U)U''))' = 0.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Известно ее однопараметрическое частное решение $U = c_1$, $H = (c_1/g)(c_1/2 - z)$. Кроме решений (1.3)–(1.10) имеются тривиальные, для которых $u = u_0 = \mathrm{const}$, $h = h_0 = \mathrm{const}$, при этом возможно $u_0 = 0$ или $h_0 = 0$.

Все частично инвариантные решения уравнений (1.1) редуцируются к инвариантным и, следовательно, либо являются тривиальными, либо принадлежат к одному из указанных выше типов.

Уравнение (1.4) входит в список Пенлеве из 50 уравнений, решение которых не имеет подвижных особых точек, отличных от полюсов [3]. Его решение w выражается через решение v второго уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = 2v^3 + \xi v - 2\alpha - \frac{1}{2}$$

с помощью преобразования Миуры

$$2\alpha w = \frac{dv}{d\xi} + v^2 + \frac{\xi}{2}.$$

Система уравнений Грина — Нагди (1.1) допускает алгебру Ли (1.2), изоморфную алгебре симметрии уравнения Кортевега — де Фриза. Инвариантные решения (1.3)–(1.10) имеют соответствующие аналоги для этого уравнения. Вопрос о существовании многосолитонных решений для уравнений Грина — Нагди (1.1) является на сегодняшний день открытым.

В последующих разделах работы доказывается, что решения (1.3)–(1.10) исчерпывают все множество инвариантных и частично инвариантных решений уравнений (1.1). По оптимальной системе подалгебр алгебры симметрии L_4 (1.2) строятся возможные представления инвариантных и частично инвариантных решений, а затем анализируются получающиеся при этом фактор-системы.

2. Оптимальная система подалгебр алгебры симметрии [4, 5]. Оптимальная система (ОС) подалгебр алгебры L_4 наряду с ОС для всех типов трех- и четырехмерных алгебр Ли построена в [6] и имеет следующий вид:

— ОС трехмерных подалгебр $\Theta_3 L_4$

$$\langle 1, 2, 3\rangle, \quad \langle 2, \alpha 1 + \beta 3, 4\rangle; \tag{2.1}$$

— ОС двумерных подалгебр $\Theta_2 L_4$

$$\langle 2, \alpha 1 + \beta 3\rangle, \quad \langle 2, 4\rangle, \quad \langle \alpha 1 + \beta 3, 4\rangle; \tag{2.2}$$

— ОС одномерных подалгебр $\Theta_1 L_4$

$$\langle 2\rangle, \quad \langle \alpha 1 + \beta 3\rangle, \quad \langle 4\rangle, \tag{2.3}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. В формулах (2.1)–(2.3) для краткости операторы (1.2) представлены своими номерами. При вычислении инвариантов подалгебр, содержащих оператор $\alpha 1 + \beta 3$, удобнее отдельно рассматривать случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$. Поэтому в работе используется ОС подалгебр алгебры L_4 (1.2), отличающаяся от (2.1)–(2.3) и представленная в табл. 1. В ней подалгебры занумерованы парами чисел $(r.i)$, где r обозначает размерность подалгебры, а i — ее порядковый номер среди подалгебр данной размерности. Инвариантное решение, построенное по подалгебре $L_{r.i}$, обозначается далее через ИР $(L_{r.i})$, частично инвариантное — через ЧИР $(L_{r.i})$.

3. Инвариантные решения. Инвариантное решение (ИР) можно рассматривать как частично инвариантное (ЧИР), дефект которого равен нулю. Тип ЧИР определяется парой чисел (ρ, δ), где ρ — ранг решения (число независимых переменных, от которых зависят инвариантные функции); δ — дефект решения (число "лишних" функций, не имеющих инвариантного представления). Пусть n — число независимых, m — число зависимых переменных исходного уравнения. Подалгебра $L_{r.i}$ порождает ЧИР типа (ρ, δ), где ρ и δ удовлетворяют условиям [4]

$$\max\{r_* - n, m - q, 0\} \leqslant \delta \leqslant \min\{r_*, m - 1\}, \qquad \rho = l - m + \delta. \tag{3.1}$$

Здесь r_* — общий ранг матрицы, составленной из координат операторов, образующих базис подалгебры $L_{r.i}$; $l = n + m - r_*$ — число функционально независимых инвариантов; q — степень полноты этого набора инвариантов относительно зависимых переменных.

В табл. 2 для подалгебр из оптимальной системы подалгебр алгебры L_4 приведен полный набор функционально независимых инвариантов. Анализируя для них условия (3.1), заключаем, что подалгебры $L_{3.i}$ порождают ЧИР типа (0,1), подалгебра $L_{2.1}$ — ЧИР типа (1,1), подалгебры $L_{2.i}$ $(i = 2, \ldots, 5)$ — ЧИР типа (1,1) и ИР ранга 0, подалгебры $L_{1.i}$ —

Таблица 1

Номер подалгебры	Базис подалгебры	Нормализатор подалгебры
4.1	1, 2, 3, 4	= 4.1
3.1	1, 2, 3	4.1
3.2	$1+\beta 3$, 2, 4	= 3.2
3.3	2, 3, 4	= 3.3
2.1	2, 3	4.1
2.2	2, $1+\beta 3$	4.1
2.3	2, 4	= 2.3
2.4	$1+\beta 3$, 4	= 2.4
2.5	3, 4	= 2.5
1.1	2	4.1
1.2	$1+\beta 3$	3.2
1.3	3	3.3
1.4	4	= 1.4

Примечание. Знаком “=” помечены самонормализованные подалгебры.

Таблица 2

Номер подалгебры	Базис инвариантов	Представление ИР	Представление ЧИР
3.1	h	—	$h=h_0$, $u=u(t,x)$
3.2	$(u-\beta t)h^{-1/2}$	—	$h=h(t,x)$, $u=\beta t+u_0 h^{1/2}$
3.3	$t^{-2}h$	—	$h=h_0 t^2$, $u=u(t,x)$
2.1	t, h	—	$h=H(t)$, $u=u(t,x)$
2.2	$u-\beta t$, h	$u=\beta t+u_0$, $h=h_0$	$h=h(t,x)$, $u=\beta t+U(h)$
2.3	$t^{-1}u$, $t^{-2}h$	$u=u_0 t$, $h=h_0 t^2$	$h=t^2 H(t,x)$, $u=tU(H)$
2.4	$y^{-1/2}(u-\beta t)$, $y^{-1}h$	$u=\beta t+u_0 y^{1/2}$, $h=h_0 y$	$h=yH(t,x)$, $u=\beta t+y^{1/2}U(H)$
2.5	$t^{-1}u-t^{-2}x$, $t^{-2}h$	$u=u_0 t+x/t$, $h=h_0 t^2$	$h=t^2 H(t,x)$, $u=tU(H)+x/t$
1.1	t, u, h	$u=U(t)$, $h=H(t)$	—
1.2	y, $u-\beta t$, h	$u=\beta t+U(y)$, $h=H(y)$	—
1.3	t, $u-x/t$, h	$u=U(t)+x/t$, $h=H(t)$	—
1.4	z, $t^{-1}u$, $t^{-2}h$	$u=tU(z)$, $h=t^2 H(z)$	—

Примечание. Прочерк означает отсутствие решения данного типа.

ИР ранга 1. В третьей графе табл. 2 дается представление инвариантного решения. Здесь и далее u_0, h_0, a, $c_j = \mathrm{const}$; $y = x-\beta t^2/2$; $z = x/t^2$.

Запишем все инвариантные решения уравнений Грина — Нагди (1.1).

ИР ($L_{2.2}$). Фактор-система содержит тождество и равенство $\beta = 0$, решение $u = u_0$, $h = h_0$ существует только при $\beta = 0$.

ИР ($L_{2.3}$). Редуцированные уравнения (1.1) имеют вид $2h_0 t = 0$, $u_0 = 0$, получаем решение $u = 0$, $h = 0$.

ИР ($L_{2.4}$). Фактор-система состоит из уравнений $3u_0 h_0 y^{1/2}/2 = 0$, $\beta + u_0^2/2 + gh_0 + u_0^2 h_0^2/3 = 0$, решением которых является $u_0 = 0$, $h_0 = -\beta/g$, и инвариантное решение имеет вид (1.6). Кроме того, при $\beta < 0$ имеется решение $u = \beta t + \sqrt{-2\beta}\,(x-\beta t^2/2)^{1/2}$, $h = 0$.

ИР ($L_{2.5}$). Редуцированные уравнения (1.1) имеют вид $3h_0 t = 0$, $2u_0 = 0$, получаем решение $u = x/t$, $h = 0$.

ИР ($L_{1.1}$). Подстановка представления решения в уравнения (1.1) приводит к $H' = 0$, $U' = 0$, что дает постоянное инвариантное решение $u = u_0$, $h = h_0$.

ИР ($L_{1.2}$). Подстановка представления решения в уравнения (1.1) приводит к фактор-системе

$$(HU)' = 0, \qquad \beta + UU' + gH' = (H^3(UU'' - U'^2))'/(3H),$$

которая дважды интегрируется:

$$U = c_1/H, \qquad HH'' = H'^2/2 - 3/2 - 3(gH^3 + \beta(y + c_2)H^2)/c_1^2. \tag{3.2}$$

При $\beta \neq 0$ преобразование $y = (c_1^2/3\beta)^{1/3}\xi - c_2$, $H = (\sqrt{3}c_1^2/\beta)^{1/3}w$ переводит уравнение (3.2) относительно функции $H(y)$ в уравнение (1.4) относительно функции $w(\xi)$.

В случае $\beta = 0$ получаем стационарное решение (1.7) уравнений (1.1).

ИР ($L_{1.3}$). Редуцированные уравнения (1.1) $H' + H/t = 0$, $U' + U/t = 0$ интегрируются в виде $U = u_0/t$, $H = h_0/t$. Получаем инвариантное решение (1.5).

ИР ($L_{1.4}$). Подстановка представления решения в уравнения (1.1) приводит к фактор-системе (1.10).

Перепишем фактор-систему данного инвариантного решения в других эквивалентных формах, поскольку они понадобятся для исследования частично инвариантных решений.

Преобразование годографа $U = U(H)$, $z = v(H)$ переводит (1.10) в систему уравнений

$$2Hv' - 2v + HU' + U = 0,$$

$$Uv' + (U - 2v)U' + g + \frac{1}{3H}\Big(H^3\Big(\frac{U'}{v'} + \frac{U'^2}{v'^2} + (2v - U)\Big(\frac{U''}{v'^2} - \frac{U'v''}{v'^3}\Big)\Big)\Big)' = 0$$

относительно функций $U(H)$, $v(H)$. Из первого уравнения можно выразить $v(H) = -\dfrac{U}{2} - H\displaystyle\int \frac{U}{H^2}\,dH$, тогда второе уравнение принимает вид

$$U - 2HU' + \frac{1}{\Delta}(g - HU'^2) + \frac{1}{\Delta^2}\Big(\frac{2}{3}H^3U''' + 3H^2U'' + HU'\Big) + {}$$
$$+ \frac{1}{\Delta^3}\Big(\frac{2}{3}H^3U'U''' + H^3U''^2 + \frac{11}{2}H^2U'U'' + \frac{10}{3}HU'^2\Big) + {}$$
$$+ \frac{U'}{\Delta^4}\Big(\frac{H^3}{6}U'U''' + H^3U''^2 + 4H^2U'U'' + 3HU'^2\Big) + \frac{HU'^2}{\Delta^5}\Big(\frac{H}{2}U'' + U'\Big)^2 = 0, \tag{3.3}$$

где $\Delta = v'(H) = -\dfrac{U'}{2} - \dfrac{U}{H} - \displaystyle\int \frac{U}{H^2}\,dH$.

Подстановка в уравнения (1.1) представления решения в виде $u = \beta t + (x - \beta t^2/2)^{1/2}U(\bar z)$, $h = (x - \beta t^2/2)H(\bar z)$, $\bar z = t(x - \beta t^2/2)^{-1/2}$ приводит к уравнениям

$$3HU + 2H' - \bar z(HU)' = 0,$$

$$\beta + \frac{U^2}{2} + \Big(1 - \frac{\bar z}{2}U\Big)U' + g\Big(h - \frac{\bar z}{2}H'\Big) =$$
$$= \frac{\bar z^5}{12H}\Big(H^3\Big(\frac{U''}{\bar z^3} + \frac{U^2}{\bar z^4} - \frac{3U}{2\bar z^3}U' + \frac{1}{2\bar z^2}(U'^2 - UU'')\Big)\Big)'.$$

Преобразование $U = U(H)$, $\bar z = v(H)$ переводит их в систему

$$3HUv' - (HU' + U)v + 2 = 0,$$

$$\Big(\beta+\frac{U^2}{2}\Big)v'+\Big(1-\frac{vU}{2}\Big)U'+g\Big(hv'-\frac{v}{2}\Big)+$$
$$+\frac{v^5}{12H}\Big(H^3\Big(\frac{U'v''}{v^3v'^3}-\frac{U''}{v^3v'^2}-\frac{U^2}{v^4}+\frac{3}{2}\,\frac{UU'}{v^3v'}-\frac{UU'v''}{2v^2v'^3}+\frac{1}{2v^2v'^2}\,(UU''-U'^2)\Big)\Big)'=0.$$

Выразив из первого уравнения $v(H)=-\dfrac{2}{3}\,(HU)^{1/3}\displaystyle\int(HU)^{-4/3}\,dH$ и подставив во второе, относительно функции $U(H)$ получим уравнение

$$\beta-U^2+\frac{H^2U^2}{3}+gH-\frac{3g}{2\Delta}\,HUv+\frac{3}{\Delta}\,HUU'+\frac{3U^2}{2\Delta}\,(Uv-2)+$$
$$+\frac{H^2U^2}{8\Delta}\,(18-23Uv)+\frac{H^2U^2}{4\Delta^2}\,(94-149Uv+52U^2v^2)+$$
$$+\frac{H^2U^2}{\Delta^3}\Big(80-\frac{389}{2}\,Uv+135U^2v^2-\frac{327}{8}\,U^3v^3\Big)+\frac{21}{2}\,\frac{H^2}{\Delta^4}\,U^2(Uv-2)^3(3Uv-1)+$$
$$+\frac{2}{\Delta^3}\,H^3UU'(\Delta-1)+\frac{9}{8}\,\frac{H^5}{\Delta^4}\,U^3v^2U'''(Uv-2)^2-\frac{27}{8}\,\frac{H^6}{\Delta^5}\,U^3v^3U''^2(Uv-2)^2+$$
$$+\frac{H^4}{\Delta^3}\,U^2vU''\Big((Uv-2)\Big(\frac{39}{8}\,Uv-3\Big)-\frac{1}{\Delta}\,(Uv-2)^2\Big(\frac{99}{8}\,Uv-\frac{21}{4}\Big)+\frac{27}{2\Delta^2}\,Uv(Uv-2)^3\Big)-$$
$$-\frac{27}{2}\,\frac{H^2}{\Delta^5}\,U^3v(Uv-2)^4=0,\qquad \Delta=(HU)'v-2. \tag{3.4}$$

Наконец, подставив в уравнения (1.1) решение в виде $u=x/t+tU(z)$, $h=t^2H(z)$, получим редуцированные уравнения

$$3H-zH'+(HU)'=0,$$
$$2U+(U-z)U'+gH'+(H^3(2+3U'+U'^2+(z-U)U''))'/(3H)=0.$$

Под действием преобразования $U=U(H)$, $z=v(H)$ они принимают вид

$$3Hv'-v+HU'+U=0,$$
$$2Uv'+(U-v)U'+g+\frac{1}{3H}\Big(H^3\Big(2+3\,\frac{U'}{v'}+\frac{U'^2}{v'^2}+(v-U)\Big(\frac{U''}{v'^2}-\frac{U'v''}{v'^3}\Big)\Big)\Big)'=0.$$

Выразив из первого уравнения $v(H)=-\dfrac{U}{3}-\dfrac{4}{9}\,H^{1/3}\displaystyle\int H^{-4/3}U\,dH$ и подставив во второе, относительно функции $U(H)$ получаем уравнение

$$2U-3HU'+\frac{1}{\Delta}\,(g+2H-HU'^2)+\frac{1}{\Delta^2}\Big(H^3U'''+\frac{19}{3}\,H^2U''+\frac{55}{9}\,HU'\Big)+$$
$$+\frac{1}{\Delta^3}\Big(\frac{2}{3}\,H^3U'U'''+H^3U''^2+\frac{65}{9}\,H^2U'U''+\frac{173}{27}\,HU'^2\Big)+$$
$$+\frac{U'}{\Delta^4}\Big(\frac{H^3}{9}\,U'U'''+\frac{2}{3}\,H^3U''^2+\frac{82}{27}\,H^2U'U''+\frac{74}{27}\,HU'^2\Big)+\frac{HU'^2}{9\Delta^5}\,(HU''+2U')^2=0, \tag{3.5}$$

где $\Delta=v'(H)=-\dfrac{U'}{3}-\dfrac{4}{9}\,\dfrac{U}{H}-\dfrac{4}{27}\,H^{-2/3}\displaystyle\int H^{-4/3}U\,dH$.

4. Частично инвариантные решения. Для двумерных и трехмерных подалгебр алгебры Ли L_4 (1.2) в четвертой графе табл. 2 приводится представление частично инвариантного решения. Заметим, что ЧИР, которые строятся по подалгебрам $L_{2.i}$, $i=2,\ldots,5$, являются нерегулярными. Все ЧИР уравнений Грина — Нагди оказываются редуцируемыми к инвариантным решениям этих уравнений.

При исследовании частично инвариантных решений уравнений Грина — Нагди в некоторых случаях, если в качестве "лишней" функции выбрать u, фактор-система имеет частное решение, соответствующее решению уравнений (1.1):

$$h = 0, \qquad x = tu + \Phi(u).$$

Далее при интегрировании фактор-системы это единственное нередуцируемое решение будет опускаться, так как оно не имеет физического смысла.

ЧИР $(L_{3.1})$. При $h_0 \neq 0$ из фактор-системы

$$h_0 u_x = 0, \quad u_t + u u_x = h_0^2 (u_{xt} + u u_{xx} - u_x^2)_x / 3$$

следует $u_t = 0$, $u_x = 0$. Получаем постоянное решение уравнений (1.1) $u = u_0$, $h = h_0$, т. е. ИР $(L_{2.2})$ с $\beta = 0$.

ЧИР $(L_{3.2})$. Подстановка представления решения в уравнения (1.1) приводит к системе

$$h_t + (\beta t + 3u_0 h^{1/2}/2) h_x = 0,$$

$$\beta + (g + u_0^2/2) h_x + u_0 h^{-1/2} (h_t + \beta t h_x)/2 =$$
$$= u_0 (h^{3/2} (h h_{xt} - h_t h_x/2) + \beta t h^{3/2} (h h_{xx} - h_x^2/2) + u_0 h^2 (h h_{xx} - h_x^2))_x / (6h).$$

При $h \neq 0$, заменив во втором уравнении производные h_t, h_{xt} в силу первого уравнения, получим

$$\beta + (g - u_0^2/4) h_x + u_0^2 (h^3 h_{xx} + 2h^2 h_x^2)_x / (12h) = 0.$$

В дальнейшем второе уравнение фактор-системы будем сразу приводить в таком виде, содержащем только производные по x от искомой функции.

Первое уравнение фактор-системы интегрируется. Подстановка его решения $x - \beta t^2/2 - 3u_0 t h^{1/2}/2 = \Phi(h)$ во второе уравнение приводит к многочлену пятой степени относительно t

$$\beta(\Phi' + 3u_0 t h^{-1/2}/4)^5 + (g - u_0^2/4)(\Phi' + 3u_0 t h^{-1/2}/4)^4 + u_0^2 P_2(t)/12 = 0. \qquad (4.1)$$

Здесь и далее $P_n(t)$ обозначает некоторый многочлен степени n по t. В уравнении (4.1) возможно расщепление по степеням переменной t. При $\beta \neq 0$, приравнивая коэффициенты при степенях t, получим уравнения $u_0 = 0$, $\Phi'^4(\beta\Phi' + g) = 0$. Из условия $\Phi' = 0$, т. е. $\Phi(h) = \text{const}$, следует противоречивое равенство $x - \beta t^2/2 = \text{const}$. Поэтому $\Phi(h) = -gh/\beta - a$, что дает решение уравнений (1.1) $u = \beta t$, $h = (\beta/g)(\beta t^2/2 - x - a)$, инвариантное относительно подалгебры с базисом операторов $\langle Y_1 + \beta Y_3, Y_4 + 2aY_2 \rangle$. Она подобна подалгебре $L_{2.2}$.

При $\beta = 0$, приравнивая в (4.1) коэффициенты при степенях t, получим $u_0 = 0$, $\Phi' = 0$, откуда следует противоречивое равенство $x = \text{const}$. Однако в случае $\beta = 0$ фактор-система имеет постоянное решение. Таким образом, получаем решение $u = u_0 h_0^{1/2}$, $h = h_0$, редуцируемое к ИР $(L_{2.2})$ с $\beta = 0$.

ЧИР $(L_{3.3})$. При $h_0 \neq 0$ первое уравнение фактор-системы

$$h_0(2 + t u_x) = 0, \qquad u_t + u u_x = h_0^2 (u_{xt} + u u_{xx} - u_x^2)_x / 3$$

интегрируется в виде $u = f(t) - 2x/t$. Тогда второе уравнение превращается в противоречивое равенство $f'(t) - 2f(t)/t + 6x/t^2 = 0$. Таким образом, в этом случае решения не существует.

ЧИР $(L_{2.1})$. Фактор-система состоит из уравнений

$$H'(t) + H(t) u_x = 0, \qquad u_t + u u_x = H^2(t)(u_{xt} + u u_{xx} - u_x^2)_x / 3,$$

решением которых является $u = (x + u_0)/(t + a)$, $H = h_0/(t + a)$, что дает решение уравнений (1.1), инвариантное относительно подалгебры $\langle Y_3 + aY_2\rangle$, подобной $L_{1.3}$.

ЧИР ($L_{2.2}$). Фактор-система состоит из уравнений

$$h_t + (\beta t + U + hU')h_x = 0,$$
$$\beta + (g - hU'^2)h_x + (h^4U'^2h_{xx} + (2hU'U'' + 3U'^2)h^3h_x^2)_x/(3h) = 0.$$

Подстановка решения $x - \beta t^2/2 - t(hU)' = \Phi(h)$ первого уравнения во второе приводит к многочлену пятой степени по t

$$\beta(\Phi' + t(hU)'')^5 + (g - HU'^2)(\Phi' + t(hU)'')^4 - h^3U'^2(\Phi'''/3 + t(hU)^{IV})(\Phi' + t(hU)'')/3 +$$
$$+ h^3U'^2(\Phi'' + t(hU)''')^2 - h^2U'(6hU'' + 10U')(\Phi'' + t(hU)''')(\Phi' + t(hU)'')/3 +$$
$$+ (2h^3U'U''' + 2h^3U''^2 + 14h^2U'U'' + 9hU'^2)(\Phi' + t(hU)'')^2/3 = 0. \quad (4.2)$$

Коэффициент при t^5 равен нулю, когда $(hU)'' = 0$. В случае $\beta = 0$ коэффициент при t^4 может быть равен нулю также при $g - HU'^2 = 0$. Однако подстановка в (4.2) $U(h) = c_1 \pm 2\sqrt{gh}$ дает противоречивое равенство $9g^2t^2/(8h) + P_1(t) = 0$. Поэтому подставим в (4.2) решение $U(h) = c_1/h - a$ уравнения $hU'' + 2U' = 0$. В результате получим уравнение относительно функции $\Phi(h)$, не содержащее t. Теперь решение $x + at - \beta t^2/2 = \Phi(h)$ первого уравнения фактор-системы можно подставить во второе уравнение в разрешенном относительно h виде $h = H(\bar{y})$, $\bar{y} = x + at - \beta t^2/2$. Функция $H(\bar{y})$ удовлетворяет уравнению

$$\beta + (g - c_1^2/H^3)H' + c_1^2(H'''/H - 2H'H''/H^2 + H'^3/h^3)/3 = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим, что решение системы (1.1) при $\beta \neq 0$ определяется равенствами

$$u = \beta t + c_1/h - a, \qquad h = H(\bar{y}), \qquad HH'' = H'^2/2 - 3/2 - 3(gH^3 + \beta(\bar{y} + c_2)H^2)/c_1^2.$$

При $\beta = 0$ решение уравнений (1.1) типа простой волны определяется равенствами

$$u = \frac{c_1}{h} - a, \qquad \int\limits_{h_0}^{h} (3 + c_2h + c_3h^3 - 3gc_1^{-2}h^3)^{-1/2}\, dh = c_4 \pm (x + at).$$

Полученное решение является инвариантным относительно подалгебры $\langle Y_1 + \beta Y_3 - aY_2\rangle$, подобной $L_{1.2}$.

ЧИР ($L_{2.3}$). Фактор-система состоит из уравнений

$$H_t + t(U + HU')H_x + (2/t)H = 0,$$
$$U - 2HU' + t^2(g - HU'^2)H_x +$$
$$+ t^4((U' + 2HU'')H^3H_x + t^2H^4U'^2H_{xx} + t^2(2HU'U'' + 3U'^2)H^3H_x^2)_x/(3H) = 0.$$

Подстановка решения $\dfrac{x}{t^2} + \dfrac{U}{2} + H\displaystyle\int \dfrac{U}{H^2}\,dH = \dfrac{1}{t^2}\,\Phi(\xi)$, $\xi = t^2H$ первого уравнения во второе приводит к уравнению с “разделяющимися” переменными относительно функций $\Phi(\xi)$, $U(H)$:

$$U - 2HU' + (g - HU'^2)/\Delta + (2H^3U'''/3 + 3H^2U'' + HU')/\Delta^2 +$$
$$+ H(2H^2U'U''' + 2H^2U''^2 + 14HU'U'' + 9U'^2 - (U' + 2HU'')(\xi\Phi'' + HV''))/(3\Delta^3) -$$
$$- H(U'^2(\xi^2\Phi''' + H^2V''') + (6HU'U'' + 10U'^2)(\xi\Phi'' + HV''))/(3\Delta^4) +$$
$$+ HU'^2(\xi\Phi'' + HV'')^2/\Delta^5 = 0,$$

$$V(H) = -\frac{U}{2} - H\int \frac{U}{H^2}\,dH, \qquad \Delta = \Phi' + V'.$$

Положив $\Phi'(\xi) = c_1$, относительно функции $U(H)$ получим уравнение (3.3), в котором $\Delta = c_1 - \dfrac{U'}{2} - \dfrac{U}{H} - \displaystyle\int \frac{U}{H^2}\,dH$. Постоянную c_1 можно включить в слагаемое $\displaystyle\int \frac{U}{H^2}\,dH$, тогда $\Phi'(\xi) = 0$, $\Phi(\xi) = -a$. После интегрирования уравнения (3.3) функция H определяется из соотношения $\dfrac{x+a}{t^2} = -\dfrac{U}{2} - H\displaystyle\int \frac{U}{H^2}\,dH$, что дает решение уравнений (1.1), инвариантное относительно подалгебры $\langle Y_4 + 2aY_2\rangle$, подобной $L_{1.4}$.

ЧИР ($L_{2.4}$). Фактор-система состоит из уравнений

$$H_t + (\beta t + y^{1/2}(U + HU'))H_x + (3/2)y^{-1/2}HU = 0,$$

$$\beta + U^2/2 - 3HUU'/2 + gH + y(g - HU'^2)H_x + (y^4(2HU'U'' + 3U'^2)H^3H_x^2 +$$
$$+ y^4H^4U'^2H_{xx} + y^3(3HUU'' + 5HU'^2 + 5UU')H^3H_x/2 + y^2H^3U^2/2)_x/(3yH) = 0.$$

Из решения первого уравнения $ty^{-1/2} + \dfrac{2}{3}(HU)^{1/3}\displaystyle\int (HU)^{-4/3}\,dH = y^{-1/2}\Phi(\xi)$, $\xi = y^{1/2}(HU)^{1/3}$ определяются величины

$$H_x = -\frac{3HUV}{2y\Delta}, \qquad H_{xx} = \frac{3}{y^2}\,HU\Big(\frac{5V}{4\Delta} + \frac{V}{\Delta^2} - \frac{3HU}{4\Delta^3}\,(HU)''V^3 - \frac{(HU)^{1/3}}{\Delta^3}\,\xi\Phi''\Big),$$

$$V = (HU)^{1/3}\Big(\Phi' - \frac{2}{3}\int (HU)^{-4/3}\,dH\Big), \qquad \Delta = (HU)'V - 2.$$

Их подстановка во второе уравнение фактор-системы приводит к уравнению относительно функций $\Phi(\xi)$, $U(H)$, которое из-за его громоздкости здесь не приводится. Положив в нем $\Phi'(\xi) = c_1$, относительно функции $U(H)$ получим уравнение (3.4), в котором $v = (HU)^{1/3}\Big(c_1 - \dfrac{2}{3}\displaystyle\int (HU)^{-4/3}\,dH\Big)$. Постоянную c_1 можно включить в слагаемое $\displaystyle\int (HU)^{-4/3}\,dH$, тогда $\Phi'(\xi) = 0$, $\Phi(\xi) = -a$. После интегрирования уравнения (3.4) функция H определяется из соотношения $(t+a)y^{-1/2} = -\dfrac{2}{3}(HU)^{1/3}\displaystyle\int (HU)^{-4/3}\,dH$, что дает решение уравнений (1.1), инвариантное относительно подалгебры $\langle Y_4 + a(Y_1 + \beta Y_3)\rangle$, подобной $L_{1.4}$.

ЧИР ($L_{2.5}$). Фактор-система состоит из уравнений

$$H_t + (x/t + t(U + HU'))H_x + 3H/t = 0,$$

$$2U - 3HU' + t^2(g - HU'^2)H_x + t^2(t^4H^4U'^2H_{xx} +$$
$$+ t^4(2HU'U'' + 3U'^2)H^3H_x^2 + t^2(5U' + 3HU'')H^3H_x + 2H^3)_x/(3H) = 0.$$

Подстановка решения $\dfrac{x}{t^2} + \dfrac{U}{3} + \dfrac{4}{9}H^{1/3}\displaystyle\int H^{-4/3}U\,dH = \dfrac{1}{t}\,\Phi(\xi)$, $\xi = tH^{1/3}$ первого уравнения во второе приводит к уравнению относительно функций $\Phi(\xi)$, $U(H)$:

$$2U - 3HU' + (g + 2H - HU'^2)/\Delta + (H^3U''' + (17/3)H^2U'' + 5HU')/\Delta^2 +$$
$$+ H^3U'^2(V'' + H^{-5/3}(\xi\Phi'' - 2\Phi')/9)^2/\Delta^5 + H(2H^2U'U''' + 2H^2U''^2 + 14HU'U'' +$$
$$+ 9U'^2 - (3H^2U'' + 5HU')(V'' + H^{-5/3}(\xi\Phi'' - 2\Phi')/9))/(3\Delta^3) -$$

$$
\begin{gathered}
-H^2(HU'^2(V''' + H^{-8/3}(\xi^2\Phi''' - 6\xi\Phi'' + 10\Phi')/27)/(3\Delta^4) + \\
+ (6HU'U'' + 10U'^2)(V'' + H^{-5/3}(\xi\Phi'' - 2\Phi')/9)) = 0, \\
V(H) = -\frac{U}{3} - \frac{4}{9}\,H^{1/3}\int H^{-4/3}U\,dH, \qquad \Delta = V' + \frac{1}{3}\,H^{-2/3}\Phi'.
\end{gathered}
$$

Положив $\Phi'(\xi) = c_1$, относительно функции $U(H)$ получим уравнение (3.5), в котором $\Delta = \frac{1}{3}\,H^{-2/3}\Big(c_1 - \int H^{-4/3}U\,dH\Big) - \frac{U'}{3} - \frac{4}{9}\,\frac{U}{H}$. Постоянную c_1 можно включить в слагаемое $\int H^{-4/3}U\,dH$, тогда $\Phi'(\xi) = 0$, $\Phi(\xi) = -a$. После интегрирования уравнения (3.5) функция H определяется из соотношения $\frac{x+at}{t^2} = -\frac{U}{3} - \frac{4}{9}\,H^{1/3}\int H^{-4/3}U\,dH$, что дает решение уравнений (1.1), инвариантное относительно подалгебры $\langle Y_4 + aY_3\rangle$, подобной $L_{1.4}$.

Авторы выражают благодарность Н. И. Макаренко, привлекшему их внимание к данной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Su C. H., Gardner C. S.** Korteweg de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg de Vries equation and Burgers equation // J. Math. Phys. 1969. V. 10, N 3. P. 536–539.
2. **Green A. E., Laws N., Naghdi P. M.** On the theory of water waves // Proc. Roy. Soc. London A. 1974. V. 338, N 1612. P. 43–55.
3. **Айнс Э. Л.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Госнаучтехиздат, 1939.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
6. **Patera J., Winternitz P.** Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. 1977. V. 18, N 7. P. 1449–1455.

Поступила в редакцию 27/I 2005 г.