УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ДЕФОРМАЦИЯХ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: bond@hydro.nsc.ru

С учетом геометрической и физической нелинейности и потенциальных сил исследована плоская деформация несжимаемого тела. В актуальных переменных получена нелинейная система уравнений для деформаций, в терминах упругого потенциала указаны условия ее эллиптичности. По заданным нагрузкам установлены краевые условия для деформаций. В случае одинаковых удлинений найдены аналитические решения краевой задачи в деформациях и соответствующие им поля напряжений.

Ключевые слова: напряжения, деформации, удлинения, потенциальные силы, несжимаемость, нелинейность, эллиптичность.

Многие актуальные проблемы упругости не могут быть решены с достаточной точностью в рамках линейной теории. Для их исследования необходимо отказаться от упрощающих предположений и использовать нелинейную модель упругости, более полно учитывающую свойства материалов и особенности их деформирования. Однако учет нелинейности существенно усложняет исследование, поэтому получили распространение решения некоторых классов нелинейных задач, допускающие определенные упрощения и реализующиеся в важных с практической точки зрения случаях. К числу таких задач относится и задача о плоском деформировании.

В данной работе плоская задача рассматривается в актуальных переменных применительно к несжимаемому однородному цилиндрическому телу, находящемуся в равновесии при действии поверхностных и потенциальных объемных сил.

Исследование проводится на основе нелинейной модели упругости, которая включает уравнения равновесия, условие несжимаемости, представление упругого потенциала через инварианты деформации и выражение инвариантов через ее компоненты, закон Мурнагана связи напряжений Коши с деформациями Альманси и выражение деформаций через перемещения [1, 2]. В актуальных декартовых переменных x_1, x_2, x_3 уравнения равновесия и краевые условия в усилиях имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} - \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \qquad E_1 - 2E_2 + 4E_3 = 0, \qquad U = U(E_1, E_2, E_3), \\
E_1 = E_{nn}, \qquad 2E_2 = E_{mm}E_{nn} - E_{mn}E_{nm}, \qquad E_3 = |E_{kl}|, \\
P_{kl} = -q_0\delta_{kl} + (\delta_{kn} - 2E_{kn})\,\frac{\partial U}{\partial E_{ln}}, \qquad 2E_{kl} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_n}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_n}{\partial x_l}, \\
P_{kl}n_l\big|_{S_*} = p_k.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь U, V — упругий и силовой потенциалы; q_0 — лагранжев множитель; u_k, p_k, n_k — компоненты перемещения, нагрузки и нормали к поверхности тела; P_{kl}, E_{kl} — компоненты симметричных тензоров напряжений и деформаций; δ_{kl} — символ Кронекера; E_1, E_2, E_3 —

базисные инварианты деформации; S_* — поверхность деформированного тела; индексы принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование. В соотношениях (1) силовой и упругий потенциалы, нагрузка и поверхность тела полагаются заданными, остальные величины подлежат определению.

Будем полагать, что цилиндрическое тело с сечением S, имеющим контур L, подвергается плоской деформации. Перемещение и потенциальные объемные силы параллельны плоскости деформации, на боковой поверхности тела задана плотность нагрузки, а на торцах — продольная составляющая результирующей нагрузки, причем перемещение, силы и нагрузка не меняются вдоль образующей цилиндра. В системе координат x_1, x_2, x_3 ($x_1 = x$, $x_2 = y$ — поперечные координаты; $x_3 = z$ — продольная координата) эти условия имеют вид

$$\begin{gathered} u_1 = u(x,y), \qquad u_2 = v(x,y), \qquad u_3 = 0, \qquad V = V(x,y), \\ p_k\big|_L = p_k(x,y), \qquad P_3 = \int\limits_S p_3\,dS. \end{gathered} \tag{2}$$

При плоской деформации в соотношениях (1) только три компоненты деформации отличны от нуля (матрица компонент деформации двумерна). Эти компоненты нелинейно зависят от градиентов перемещений (геометрическая нелинейность) и являются функциями поперечных координат:

$$\begin{gathered} 1 - 2E_{11} = \Big(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2, \qquad 1 - 2E_{22} = \Big(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2, \qquad E_{33} = 0, \\ 2E_{12} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial v}{\partial x}\Big(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\Big), \qquad E_{23} = E_{31} = 0, \qquad E_{kl} = E_{kl}(x,y). \end{gathered} \tag{3}$$

Инварианты деформации не меняются вдоль образующей, а условие несжимаемости устанавливает между ними зависимость в виде

$$\begin{gathered} E = E_1 = E_{11} + E_{22}, \qquad E_2 = E_{11}E_{22} - E_{12}^2, \\ E_3 = 0, \qquad E_k = E_k(x,y), \qquad E_1 - 2E_2 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Из соотношений (4) следует, что инварианты деформации, а также упругий потенциал являются функциями первого инварианта

$$E_1 = E, \qquad 2E_2 = E, \qquad E_3 = 0, \qquad U(E_1, E_2, E_3) = U(E).$$

Первый инвариант деформации, выраженный в перемещениях и преобразованный с учетом записанного в перемещениях условия несжимаемости

$$\Big(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) - \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

допускает представление

$$2E = -\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2,$$

из которого следует, что при плоском деформировании этот инвариант является отрицательной величиной.

В рассматриваемом случае градиент упругого потенциала по тензору деформации является шаровым тензором:

$$E = E_{ln}\delta_{nl}, \qquad \frac{\partial E}{\partial E_{ln}} = \delta_{nl}, \qquad \frac{\partial U}{\partial E_{ln}} = U'\delta_{nl} \qquad \Big(U' = \frac{dU}{dE}\Big),$$

в силу чего закон Мурнагана сводится к квазилинейной зависимости напряжений от деформаций (физическая нелинейность) и от давления q:

$$P_{kl} = -q\delta_{kl} - 2U'E_{kl}, \qquad q = q_0 - U', \qquad U' = U'(E), \qquad E = E_{11} + E_{22}.$$

Этот закон можно представить в развернутом виде

$$\begin{gathered} P_{11} = -q - 2U'E_{11}, \qquad P_{22} = -q - 2U'E_{22}, \qquad P_{33} = -q, \\ P_{12} = -2U'E_{12}, \qquad P_{23} = 0, \qquad P_{31} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Отсюда следует, что в отличие от деформаций матрица компонент напряжений трехмерна.

С учетом соотношений (5) уравнения равновесия в (1) принимают вид

$$\frac{\partial(P_{11} - V)}{\partial x} + \frac{\partial P_{12}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(P_{22} - V)}{\partial y} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial P_{33}}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Последнее уравнение в (6) означает, что давление, как и деформации, не меняется вдоль образующей. Следовательно, напряжения (5) являются функциями поперечных координат: $P_{kl} = P_{kl}(x, y)$.

На боковой поверхности цилиндра нормаль ортогональна образующей: $(n_k) = (n_1, n_2, 0)$. Отсюда и из соотношений для напряжений (5) следует, что боковая нагрузка полностью определяется ее значением на контуре сечения и принадлежит плоскости сечения:

$$P_{11}n_1 + P_{12}n_2\big|_L = p_1, \qquad P_{12}n_1 + P_{22}n_2\big|_L = p_2, \qquad 0 = p_3. \tag{7}$$

На торцах цилиндра $S_\pm$ (знаки “плюс” и “минус” соответствуют верхнему и нижнему торцам) нормаль параллельна образующей: $(n_k) = (0, 0, \pm1)$, а продольная составляющая результирующей торцевой нагрузки (2) равна

$$p_1^\pm = p_2^\pm = 0, \qquad p_3^\pm = \pm P_{33}, \qquad P_3 = \pm\int\limits_S P_{33}\,dS. \tag{8}$$

Соотношения (3)–(8) определяют плоскую задачу нелинейной упругости и позволяют получить краевую задачу для деформаций. В отличие от краевой задачи для напряжений в этом случае необходимость обращения нелинейного закона Мурнагана отсутствует.

Условие несжимаемости (4) определяет конечную зависимость между компонентами деформации:

$$(1 - 2E_{11})(1 - 2E_{22}) - (2E_{12})^2 = 1. \tag{9}$$

Подставляя напряжения (5) в уравнения равновесия (6), получаем дифференциальные уравнения для деформаций и давления:

$$\begin{gathered} \frac{\partial(q + V)}{\partial x} = -\frac{\partial(2U'E_{11})}{\partial x} - \frac{\partial(2U'E_{12})}{\partial y}, \\ \frac{\partial(q + V)}{\partial y} = -\frac{\partial(2U'E_{22})}{\partial y} - \frac{\partial(2U'E_{12})}{\partial x}, \\ \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \qquad U' = U'(E_{11} + E_{22}), \end{gathered} \tag{10}$$

а подстановка (5) в граничные равенства (6) дает краевые условия для этих величин:

$$-qn_1 - 2U'(E_{11}n_1 + E_{12}n_2)\big|_L = p_1, \qquad -qn_2 - 2U'(E_{21}n_1 + E_{22}n_2)\big|_L = p_2. \tag{11}$$

Исключая давление из первого и второго уравнений в (10) (для этого первое из них продифференцируем по y, второе — по x и вычтем результаты), получаем уравнение только для деформаций:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\,(2U'E_{11})}{\partial x}+\frac{\partial\,(2U'E_{12})}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\,(2U'E_{22})}{\partial y}+\frac{\partial\,(2U'E_{12})}{\partial x}\Big). \qquad (12)$$

После интегрирования третье уравнение в (10) определяет давление как некоторую функцию поперечных координат $q=q(x,y)$. Согласно первому и второму уравнениям эта функция устанавливается по известным деформациям и упругому потенциалу квадратурой

$$\begin{gathered} q+V=\int\Big(\frac{\partial\,(q+V)}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\,(q+V)}{\partial y}\,dy\Big)=-W(x,y)+B, \qquad B=\text{const},\\ W=\int\Big(\frac{\partial\,(2U'E_{11})}{\partial x}+\frac{\partial\,(2U'E_{12})}{\partial y}\Big)\,dx+\Big(\frac{\partial\,(2U'E_{22})}{\partial y}+\frac{\partial\,(2U'E_{12})}{\partial x}\Big)\,dy. \end{gathered} \qquad (13)$$

В силу уравнения (12) интеграл в формулах (13) не зависит от пути интегрирования, а постоянную интегрирования можно вычислить по интегральному условию в (8) и соотношениям (5), (13) в виде

$$B=\frac{1}{S}\Big(\int\limits_S (V+W)\,dS-P_3\Big). \qquad (14)$$

В частности, при $P_3=0$ эта постоянная является средним по сечению тела значением суммы функций $V+W$.

Замкнутую систему уравнений для деформаций можно получить, если к соотношениям (8), (12) добавить уравнение совместности деформаций, которое следует из зависимостей (3) деформаций от перемещений после исключения перемещений. Для этого вычислим первые и вторые производные по координатам от деформаций. Тогда первые производные

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial x},\quad \frac{\partial E_{11}}{\partial y},\quad \frac{\partial E_{22}}{\partial x},\quad \frac{\partial E_{22}}{\partial y},\quad \frac{\partial E_{12}}{\partial x},\quad \frac{\partial E_{12}}{\partial y} \qquad (15)$$

являются функциями первых и вторых производных от перемещений, вторые производные

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x\,\partial y} \qquad (16)$$

зависят от производных перемещений первого — третьего порядков. Из выражений для величин (16) третьи производные можно исключить, используя следующую их комбинацию:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\Big)^2-\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\Big)^2. \qquad (17)$$

Определяя из выражений для величин (15) вторые производные от перемещений через деформации и внося их в равенство (17), получаем соотношение, содержащее только деформации и первые производные перемещений. Установлено, что последние величины входят в него в виде комбинаций, представленных в (3), и, следовательно, с помощью этих формул могут быть исключены. В результате получаем нелинейное уравнение совместности деформаций, содержащее деформации и их первые и вторые производные по координатам:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x\,\partial y}=(1-2E_{11})\Big[\frac{\partial E_{22}}{\partial y}\Big(2\,\frac{\partial E_{12}}{\partial x}-\frac{\partial E_{11}}{\partial y}\Big)-\Big(\frac{\partial E_{22}}{\partial x}\Big)^2\Big]+$$
$$+(1-2E_{22})\Big[\frac{\partial E_{11}}{\partial x}\Big(2\,\frac{\partial E_{12}}{\partial y}-\frac{\partial E_{22}}{\partial x}\Big)-\Big(\frac{\partial E_{11}}{\partial y}\Big)^2\Big]+$$
$$+2E_{12}\Big[\frac{\partial E_{11}}{\partial x}\,\frac{\partial E_{22}}{\partial y}+\Big(2\,\frac{\partial E_{12}}{\partial x}-\frac{\partial E_{11}}{\partial y}\Big)\Big(2\,\frac{\partial E_{12}}{\partial y}-\frac{\partial E_{22}}{\partial x}\Big)-2\,\frac{\partial E_{11}}{\partial y}\,\frac{\partial E_{22}}{\partial x}\Big]. \qquad (18)$$

Система уравнений (9), (12), (18) и преобразованные с учетом (13) граничные условия (11)

$$\begin{aligned}(V+W-B)n_1-2U'(E_{11}n_1+E_{12}n_2)\big|_L&=p_1,\\ (V+W-B)n_2-2U'(E_{12}n_1+E_{22}n_2)\big|_L&=p_2\end{aligned} \qquad (19)$$

(W, B определены в (13)) составляют нелинейную краевую задачу для деформаций. По найденным деформациям давление определяется формулой (13), а напряжения — равенствами (5).

Для определения типа системы уравнений (9), (12), (18) перейдем от деформаций к величинам f, g, h:

$$f=1-2E_{11},\qquad g=2E_{12},\qquad h=1-2E_{22}. \qquad (20)$$

Из формул (3) следует, что величины f, h положительны:

$$f>0,\qquad h>0. \qquad (21)$$

Тогда уравнения для деформаций можно представить в виде

$$fh-g^2=1,\qquad \frac{\partial^2 U'(h-f)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 U'g}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 U'g}{\partial x^2}=0,\qquad U'=U'(E),$$
$$2\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}\Big)=g\Big[2\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial h}{\partial y}-\Big(2\,\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big(2\,\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\Big)\Big]+ \qquad (22)$$
$$+f\Big[\frac{\partial h}{\partial y}\Big(2\,\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big)+\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\Big)^2\Big]+h\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big(2\,\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\Big)+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2\Big],\qquad E=1-\frac{f+h}{2},$$

краевые условия (19) принимают вид

$$\begin{gathered}p_1=(V-N-B)n_1+U'(fn_1-gn_2)\big|_L,\\ p_2=(V-N-B)n_2+U'(hn_2-gn_1)\big|_L,\\ W=U'-N,\qquad B=\frac{1}{S}\Big(\int(V+U'-N)\,dS-P_3\Big),\\ N=\int\Big(\frac{\partial U'f}{\partial x}-\frac{\partial U'g}{\partial y}\Big)\,dx+\Big(\frac{\partial U'h}{\partial y}-\frac{\partial U'g}{\partial x}\Big)\,dy,\end{gathered} \qquad (23)$$

а для давления и напряжений получаем выражения

$$q=B+N-V-U'; \qquad (24)$$

$$\begin{gathered}P_{11}=V-N-B+U'f,\qquad P_{22}=V-N-B+U'h,\\ P_{33}=V+U'-N-B,\qquad P_{12}=-U'g,\qquad P_{23}=0,\qquad P_{31}=0.\end{gathered} \qquad (25)$$

Используя первое уравнение системы (22), получаем

$$g=\sqrt{fh-1}. \qquad (26)$$

Подставляя (26) во второе и третье уравнения (22), запишем их в развернутом виде

$$G_1 = [2U' - U''(h-f)]\,\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} - [2U' + U''(h-f)]\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \\ + \Big(U'\frac{f}{g} - U''g\Big)\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big) + \Big(U'\frac{h}{g} - U''g\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big) + R = 0, \qquad (27)$$

$$G_2 = g\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big) + h\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + f\,\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + T = 0.$$

Здесь функция g определяется через величины f, h по формуле (26), а через R, T обозначены члены, не содержащие старших (вторых) производных от искомых функций.

Системе (27) соответствует характеристическая матрица второго порядка [3]

$$(A_{kl}) = \Big(\sum_{m+n=2}\Big\{\partial G_k\Big/\partial\Big(\frac{\partial^2 g_l}{\partial x_m\,\partial x_n}\Big)\Big\}s^m t^n\Big), \qquad (g_l) = (f, h)$$

с элементами

$$A_{11} = ((h/g)U' - gU'')(t^2 - s^2) - [2U' + (h-f)U'']st, \qquad A_{22} = gs^2 + fst,$$

$$A_{12} = ((f/g)U' - gU'')(t^2 - s^2) + [2U' - (h-f)U'']st, \qquad A_{21} = hst + gt^2.$$

Характеристический определитель $A = |A_{kl}|$ системы (27) представляет собой полином четвертой степени переменных s, t:

$$A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = -U'(s^2 + t^2)(hs^2 + 2gst + ft^2) + U''[g(s^2 - t^2) + (f-h)st]^2. \qquad (28)$$

Из неравенств (21) и условия несжимаемости (23) следует, что величины f, h, g подчиняются условиям

$$f > 0, \qquad h > 0, \qquad fh - g^2 > 0,$$

в силу которых представленная в (28) квадратичная форма согласно критерию Сильвестра является положительно определенной:

$$hs^2 + 2gst + ft^2 > 0. \qquad (29)$$

Из соотношений (28), (29) следует, что если вторая производная упругого потенциала имеет знак, противоположный знаку первой производной, или равна нулю, то характеристический определитель отличен от нуля:

$$A > 0 \quad \text{при} \quad U' < 0, \quad U'' \geqslant 0, \qquad A < 0 \quad \text{при} \quad U' > 0, \quad U'' \leqslant 0. \qquad (30)$$

При условиях на упругий потенциал (30) характеристическое уравнение $A = 0$ не имеет вещественных корней, следовательно, нелинейная система (27) является системой эллиптического типа. Таким образом, тип системы уравнений в деформациях определяется видом упругого потенциала.

Условия эллиптичности выполняются, в частности, для квадратичного потенциала Ривлина — Сондерса [4], обобщающего линейный потенциал Муни и моделирующего большие упругие деформации несжимаемых резиноподобных материалов:

$$U = aE^2 - bE + c \qquad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad E < 0)$$

(a, b, c — постоянные упругости материала).

Условие несжимаемости $fh - g^2 = 1$ позволяет сделать некоторые общие заключения о характере деформирования, определяемого нелинейными удлинениями E_{11}, E_{22} и сдвигом E_{12}. В частности, из этого условия следует, что плоское деформирование несжимаемого тела только со сдвигами или только с удлинениями невозможно. Действительно, в отсутствие удлинений ($E_{11} = E_{22} = 0$) имеем $f = h = 1$, и условие несжимаемости сводится к отсутствию сдвигов: $g = 0$, $E_{12} = 0$, т. е. деформации должны отсутствовать. В случае отсутствия сдвигов ($E_{12} = 0$, $g = 0$) условие несжимаемости принимает вид $fh = 1$, что противоречит свойствам (21) функций f, h: каждая из этих функций, являясь положительной, может быть меньше единицы. Следовательно, такое деформирование также невозможно. Деформирование же со сдвигами и одинаковыми удлинениями ($E_{12} \neq 0$, $E_{11} = E_{22}$) условием несжимаемости допускается. Установим для этого случая вид деформаций и соответствующей им нагрузки. В терминах величин (20) указанные условия запишем в виде

$$f = h, \qquad h^2 - g^2 = 1. \tag{31}$$

Соотношения (31) позволяют выразить искомые величины через одну из них, например g. Независимый инвариант деформации и упругий потенциал также определяются через эту величину:

$$f = h = \sqrt{1+g^2}\,, \qquad E = 1 - h = 1 - \sqrt{1+g^2}\,, \qquad U'(E) = U'(g). \tag{32}$$

При выполнении условий (32) справедливы соотношения

$$\frac{\partial^2 U'(h-f)}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\begin{gathered} g\Big[2\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial h}{\partial y} - \Big(2\,\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big(2\,\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\Big)\Big] + \\ + f\Big[\frac{\partial h}{\partial y}\Big(2\,\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big) + \Big(\frac{\partial h}{\partial x}\Big)^2\Big] + h\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\,\Big(2\,\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\Big) + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2\Big] = \\ = \Big(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\Big)\,\frac{\partial\,(h^2-g^2)}{\partial x} + \Big(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\Big)\,\frac{\partial\,(h^2-g^2)}{\partial y} = 0, \end{gathered}$$

в силу которых дифференциальные равенства в (22) упрощаются и с учетом (32) превращаются в уравнения для величины $g(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 gU'(g)}{\partial y^2} - \frac{\partial\, gU'(g)}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \sqrt{1+g^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sqrt{1+g^2}}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{33}$$

В этом случае имеем

$$N = U'\sqrt{1+g^2} - H(x,y), \qquad H = \int \frac{\partial\, gU'}{\partial y}\,dx + \frac{\partial\, gU'}{\partial x}\,dy. \tag{34}$$

Выражение для давления (24) принимает вид

$$\begin{gathered} q = B + (\sqrt{1+g^2} - 1)U' - H - V, \\ B = \frac{1}{S}\Big(\int \big(H + V - (\sqrt{1+g^2} - 1)U'\big)\,dS - P_3\Big), \end{gathered} \tag{35}$$

контурная нагрузка (23) равна

$$p_1 = (H + V - B)n_1 - gU'n_2\big|_L, \qquad p_2 = (H + V - B)n_2 - gU'n_1\big|_L, \tag{36}$$

а поле напряжений (25) определяется выражениями

$$
\begin{gathered}
P_{11} = P_{22} = H + V - B, \qquad P_{33} = H + V - \bigl(\sqrt{1+g^2} - 1\bigr)U' - B, \\
P_{12} = -gU', \qquad P_{23} = 0, \qquad P_{31} = 0.
\end{gathered}
\tag{37}
$$

Решение нелинейной системы (33) будем искать в виде функции одного аргумента $g = g(s)$, $s = x+y$. Тогда дифференцирование по координатам сводится к дифференцированию по этому аргументу:

$$
\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{d}{ds}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{d}{ds}.
$$

В этом случае первое уравнение в (33) тождественно удовлетворяется при любом виде упругого потенциала:

$$
\frac{\partial^2 gU'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 gU'}{\partial x^2} = \frac{d^2 gU'}{ds^2} - \frac{d^2 gU'}{ds^2} = 0,
$$

а второе определяет вид искомой функции. Действительно, это уравнение допускает представление

$$
\frac{d^2}{ds^2}\bigl(\sqrt{1+g^2} + g\bigr) = 0
$$

и после интегрирования дает соотношение

$$
\sqrt{1+g^2} + g = ms + n, \qquad m = \mathrm{const}, \qquad n = \mathrm{const}\,.
$$

Отсюда следует, что искомая функция и величины из выражений (32) содержат два свободных параметра:

$$
g = \frac{1}{2}\Bigl(ms + n - \frac{1}{ms+n}\Bigr), \qquad f = h = \frac{1}{2}\Bigl(ms + n + \frac{1}{ms+n}\Bigr). \tag{38}
$$

Согласно (34), (35) функция H и постоянная B имеют значения

$$
H = \int \frac{d\,gU'}{ds}\,d(x+y) = gU', \qquad B = \frac{1}{S}\Bigl(\int (V - (h-g-1)U')\,dS - P_3\Bigr).
$$

С учетом (38) выражения для давления (35) и напряжений (37) принимают вид

$$
\begin{gathered}
q = B - V + (h-g-1)U', \\
P_{11} = P_{22} = gU' + V - B, \qquad P_{33} = V - (h-g-1)U' - B, \\
P_{12} = -gU', \qquad P_{23} = 0, \qquad P_{31} = 0,
\end{gathered}
\tag{39}
$$

а соответствующая им контурная нагрузка (36) определяется соотношениями

$$
p_1 = (V-B)n_1 + gU'(n_1 - n_2)\big|_L, \qquad p_2 = (V-B)n_2 - gU'(n_1 - n_2)\big|_L. \tag{40}
$$

Другое решение системы (33) определим в виде функции $g = g(t)$, $t = x - y$. Тогда производные по координатам будут различаться только знаком:

$$
\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d}{dt}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{d}{dt}.
$$

В системе (33) первое уравнение тождественно удовлетворено при произвольном упругом потенциале:

$$
\frac{\partial^2 gU'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 gU'}{\partial x^2} = \frac{d^2 gU'}{dt^2} - \frac{d^2 gU'}{dt^2} = 0,
$$

а второе уравнение принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{1+g^2}-g\right)=0$$

и определяет решение с двумя произвольными постоянными

$$\sqrt{1+g^2}-g=kt+l, \qquad k=\mathrm{const}, \qquad l=\mathrm{const}\,.$$

Отсюда и из равенств (32) для искомых величин находим

$$g=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{kt+l}-kt-l\Big), \qquad f=h=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{kt+l}+kt+l\Big). \tag{41}$$

С учетом соотношений

$$H=-gU', \qquad B=\frac{1}{S}\Big(\int(V-(h+g-1)U')\,dS-P_3\Big)$$

величинам (41) соответствуют давление

$$q=B-V+U'(h+g-1), \tag{42}$$

напряжения

$$\begin{gathered} P_{11}=P_{22}=V-gU'-B, \qquad P_{33}=V-(h+g-1)U'-B, \\ P_{12}=-gU', \qquad P_{23}=0, \qquad P_{31}=0 \end{gathered} \tag{43}$$

и контурная нагрузка

$$p_1=(V-B)n_1-gU'(n_1+n_2)\big|_L, \qquad p_2=(V-B)n_2-gU'(n_1+n_2)\big|_L. \tag{44}$$

Для того чтобы конкретизировать выражения для силовых величин (39), (40), (42)–(44), достаточно взять определенные силовой и упругий потенциалы, продольную торцевую силу и форму сечения цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Снеддон И. Н.** Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Murnaghan F. D.** Finite deformations of an elastic solid // Amer. J. Math. 1937. V. 59, N 2. P. 235–260.
3. **Петровский Н. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
4. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 7/VII 2008 г.