Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 1

УДК 532.516:536.25

НЕКОТОРЫЕ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ АМПЛИТУДНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ В ДВУХФАЗНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКИХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ВДОЛЬ ЦИЛИНДРА

В. Е. Захватаев

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск

1. Введение. В работах [1–3] для двухфазного ламинарного течения несмешивающихся вязких несжимаемых жидкостей вдоль полой трубы изучалась слабонелинейная устойчивость границы раздела, имеющей первоначально цилиндрическую форму. Одна из фаз (называемая ядром) была отделена от поверхности трубы тонким пленочным слоем второй жидкости. Характер устойчивости данного класса двухфазных течений важен для ряда природных и технологических процессов. Укажем некоторые из возможных областей применения.

1. Вытеснение в капиллярах одной жидкости другой (например, при промывке пластов горных пород с целью вымывания нефти), когда часть жидкой фазы, которая обладает более сильным свойством смачиваемости поверхности капиллярного канала, остается на стенках в виде тонких пленок, окружая другую жидкость, находящуюся в центре в виде разделенных промежутками первой фазы вытянутых областей [3]. В центральной части этих областей движение локально напоминает ламинарное течение жидкого ядра, окруженного тонкой пленкой. Проблему устойчивости такого рода идеализированных течений важно учитывать при анализе процессов вытеснения жидкостей и их двухфазного движения в капиллярах, цилиндрических каналах и щелях пористых сред: неустойчивость и распад пленки могут значительно замедлить течение жидкостей [3].

2. Организация тонкого «смазочного» слоя в трубопроводах с целью уменьшить потери энергии при передаче жидких продуктов.

3. Реализация специальных течений упомянутого выше класса с целью наложения тонкого покрытия на цилиндрические поверхности.

Продуктивным методом исследования слабонелинейной устойчивости пленочных течений является применение длинноволнового приближения теории пограничного слоя. С использованием этого приближения, а также стоксова в [1] было показано, что в случае, когда динамические вязкости жидкостей равны и выполняются некоторые дополнительные условия, динамика возмущений в тонком слое не зависит от эволюции флуктуаций в ядре и поведение межфазной границы описывается уравнением Курамото — Сивашинского:

$$\eta_\tau + N\eta\eta_z + U\eta_{zz} + S\eta_{zzzz} = 0 \qquad (1.1)$$

(η — отклонение границы от равновесного состояния, τ — время, z — пространственная переменная, соответствующие индексы используются для обозначения частных производных).

В [2] исследовано влияние вязкостной стратификации, которая может привести к сопряжению возмущений в ядре и пленке, что порождает появление в амплитудном уравнении (1.1) интегрального слагаемого (в этом случае асимптотическая задача в ядре строится на основе специальной аппроксимации и решается с помощью преобразования Фурье).

В данной работе на основе подходов, используемых в [1, 2], рассматривается вопрос о том, как модифицируются соответствующие амплитудные уравнения, если учитываются термодинамические эффекты.

2. Постановка задачи. Пусть $\hat{r}$, $\hat{z}$ — радиальная и аксиальная цилиндрические координаты. Рассматривается первичное движение двух несмешивающихся жидкостей, текущих в областях $\{\hat{r} < \hat{b}, -\infty < \hat{z} < \infty\}$, $\{\hat{b} < \hat{r} < \hat{a}, -\infty < \hat{z} < \infty\}$ внутри цилиндрической поверхности S, задаваемой уравнением $\hat{r} = \hat{a}$. Обе жидкости считаются вязкими, теплопроводными и несжимаемыми. Движение предполагается вращательно-симметричным. Влияние силы тяжести не учитывается (что, например, может быть оправдано при определенных условиях, если цилиндр S является достаточно узким капилляром [4]). Предполагается, что $(\hat{a} - \hat{b})/\hat{b} \equiv \varepsilon \ll 1$.

Межфазная граница Γ в общем случае задается уравнением $\hat{r} = \hat{L}(\hat{z}, \hat{t})$, а жидкости ядра и пленки занимают соответственно области $\Omega_1 = \{\hat{r} < \hat{L}(\hat{z}, \hat{t})\}$ и $\Omega_2 = \{\hat{L}(\hat{z}, \hat{t}) < \hat{r} < \hat{a}\}$. В дальнейшем область Ω_1 называется ядром, область Ω_2 — тонким слоем или пленкой, а величины, относящиеся к каждой из областей, помечены соответственно индексом 1 и 2.

Пусть $\hat{U}_i$, $\hat{W}_i$ — радиальная и аксиальная компоненты вектора скорости, $\hat{P}_i$ — давление, $\hat{\Theta}_i$ — температура жидкости в области Ω_i (здесь и далее $i = 1,2$).

В задаче фигурируют следующие параметры: σ — коэффициент поверхностного натяжения, его зависимость от температуры предполагается линейной ($\sigma = \sigma_* - æ(\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_*)$, $æ > 0$ — константа), ρ_i — плотности, ν_i — кинематические вязкости, μ_i — динамические вязкости, χ_i — температуропроводности, c_i — удельные теплоемкости, $k_i = \rho_i c_i \chi_i$ — теплопроводности жидкостей.

Основное течение, устойчивость которого исследуем, индуцируется постоянным градиентом давления вдоль цилиндра и имеет вид $\hat{U}_{0i} = 0$, $\hat{W}_{0i} = A_i \hat{r}^2 + B_i$, $\hat{\Theta}_{0i} = K_{1i}\hat{r}^4 + K_{2i} \ln(\hat{r}) + K_{3i}$, $\hat{P}_{0iz} = -\hat{F}$, $\hat{F} = \mathrm{const} > 0$. Стенка S имеет постоянную температуру $\hat{\Theta}_S$.

Для безразмерной задачи в качестве масштабных множителей выбраны следующие: $\hat{b}$ для пространственных переменных, $\hat{W} = \hat{W}_{01}(0) = \hat{F}\hat{b}^2(1 + (\mu_1/\mu_2)(\hat{a}^2\hat{b}^2 - 1))/4\mu_1$ для скорости, $\hat{b}/\hat{W}$ для времени, $\hat{P} = \rho_1 \hat{W}^2$ для давления, $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_S - \hat{\Theta}_{01}(0)$ для температуры. Ниже неизвестные функции и переменные считаются безразмерными (индекс ˆ над ними опускаем). В дальнейшем $\hat{a}/\hat{b} = a$, $\hat{L}/\hat{b} = L$.

Движение в областях описывается уравнениями Навье — Стокса, неразрывности, теплопроводности (индексы для простоты опущены):

$$U_t + UU_r + WU_z = -(\rho_1/\rho)P_r + (1/\mathrm{Re})(\Delta U - (1/r^2)U); \tag{2.1}$$

$$W_t + UW_r + WW_z = -(\rho_1/\rho)P_z + (1/\mathrm{Re})\Delta W; \tag{2.2}$$

$$U_r + (1/r)U + W_z = 0; \tag{2.3}$$

$$\Theta_t + U\Theta_r + W\Theta_z = (1/\mathrm{Pe})\Delta\Theta + 2\mathrm{Dis}\{U_r^2 + (1/r^2)U^2 + W_z^2 + (W_r + U_z)^2/2\}. \tag{2.4}$$

Здесь $\Delta \equiv \partial^2/\partial r^2 + \partial^2/\partial z^2 + (1/r)\partial/\partial r$.

Граничные условия имеют вид [5]

при $r = a$

$$U_2 = 0, \quad W_2 = 0, \quad \Theta_2 = \Theta_S; \tag{2.5}$$

при $r = 0$ все величины ограничены;

при $r = L(z, t)$

$$[U] = [W] = [\Theta] = 0; \tag{2.6}$$

$$-\mathrm{Re}_1[P] + 2(1 + L_z^2)^{-1}([MU_r] - L_z[M(W_r + U_z)] + L_z^2[MW_z]) =$$

$$= (\mathrm{We} + \mathrm{Mn}(\Theta_2 - \Theta_*))(-1 + LL_{zz} - L_z^2)L^{-1}(1 + L_z^2)^{-3/2}; \qquad (2.7)$$

$$(1 + L_z^2)^{-1/2}(2L_z[MU_r] + (1 - L_z^2)[M(W_r + U_z)] - 2L_z[MW_z]) = \mathrm{Mn}(\Theta_r L_z + \Theta_{2z}); \qquad (2.8)$$

$$[Q(\Theta_r - L_z\Theta_z)] = \mathrm{Es}\,\Theta_2(1 + L_z^2)^{-1/2}(U_r - U_zL_z - W_rL_z + W_zL_z^2); \qquad (2.9)$$

$$U_2 = L_t + W_2L_z, \qquad (2.10)$$

где $[(.)] \equiv (.)_1 - (.)_2$; $\mathrm{Re}_i = \hat{W}\hat{b}/\nu_i$; $\mathrm{Pe}_i = \hat{W}\hat{b}/\chi_i$; $\mathrm{Dis}_i = (\nu_i\hat{W})/(c_i\hat{\Theta}\hat{b})$; $\mathrm{We} = \sigma_*/(\mu_1\hat{W})$; $\mathrm{Mn} = -æ\hat{\Theta}/(\mu_1\hat{W})$; $\mathrm{Es} = æ\hat{W}/k_1$; $M_i = \mu_i/\mu_1$; $Q_i = k_i/k_1$; $\Theta_* = \hat{\Theta}_*/\hat{\Theta}$; $\Theta_S = \hat{\Theta}_S/\hat{\Theta}$. В дальнейшем $m = M_2$, $q = Q_2$.

В силу условия непрерывности (2.6) в правых частях условий (2.7)–(2.9) (там, где это возможно), а также в (2.10) поставлен индекс 2. Условия (2.7), (2.8) выражают баланс напряжений на межфазной границе, условие (2.9) означает равновесие между скачком теплового потока на Г и изменением внутренней энергии этой поверхности, связанным с изменением площади границы [5], (2.10) — кинематическое условие.

Отметим, что в правой части (2.8) присутствует величина $\Theta_r(r = L)$. Значение ее является некоторым средним между $\Theta_{1r}(r = L)$ и $\Theta_{2r}(r = L)$ и зависит от конкретной задачи. Подобное замечание относится и к производным $U_r(r = L)$, $W_r(r = L)$ в правой части (2.9).

Первичное течение, устойчивость которого здесь изучается, описывается следующим решением задачи (2.1)–(2.10):

$$\begin{gathered} L = 1, \quad U_{0i} \equiv 0, \quad W_{01} = 1 - mr^2/(a^2 + m - 1), \quad W_{02} = (a^2 - r^2)/(a^2 + m - 1), \\ P_{0iz} = -\hat{F}\hat{b}/\hat{P} = \mathrm{const}, \quad \Theta_{0i} = K_{1i}r^4 + K_{2i}\ln(r) + K_{3i}, \\ K_{11} = qm/D, \quad K_{21} = 0, \quad K_{31} = \Theta_S - 1, \quad K_{12} = 1/D, \quad K_{22} = 4(m-1)/D, \\ K_{32} = \Theta_S - K_{12}a^4 - K_{22}\ln(a) \quad (D = a^4 - 1 + qm + 4(m-1)\ln(a)). \end{gathered} \qquad (2.11)$$

Малую безразмерную ширину пленки обозначим через ε ($\varepsilon \equiv a - 1 \ll 1$).

3. Оценка порядков возмущений. Для возмущенного движения полагаем $U_i = U_{0i} + u_i$, $W_i = W_{0i} + w_i$, $P_i = P_{0i} + p_i$, $\Theta_i = \Theta_{0i} + \theta_i$, $L = 1 + l$.

Наша задача — вывести амплитудное уравнение, описывающее волновые движения на межфазной границе с характерным пространственным масштабом порядка радиуса области ядра. Поэтому в соответствии с длинноволновым приближением теории пограничного слоя введем новую радиальную координату в пленке: $r = 1 + \varepsilon - \varepsilon y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Определимся с порядками некоторых параметров задачи. Пусть

$$\mathrm{We} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \rho_2/\rho_1 = O(1), \quad m = \mu_2/\mu_1 = O(1), \quad q = k_2/k_1 = O(\varepsilon).$$

Рассмотрим процессы развития возмущений на этапе, когда отклонение межфазной границы Г от ее невозмущенного состояния имеет порядок $\delta(l = \delta\eta(z,t))$, причем $\delta \ll \varepsilon$. Уравнение, описывающее слабонелинейную стадию эволюции межфазной границы, выводится на основе кинематического условия (2.10). Это условие — прообраз будущего амплитудного уравнения, окончательная форма которого зависит от выбираемых предположений о физической организации развития флуктуаций. Мы не затрагиваем линейный анализ устойчивости, считая, что конечные возмущения определенным образом появляются в системе на некотором этапе (например, непосредственно привносятся извне).

Произведем редукцию исходной системы (2.1)–(2.9), получив асимптотическую линейную задачу, решение которой выражается через функционалы от функции η. Затем используем полученное решение, заменяя компоненты скорости, фигурирующие в редуцированном кинематическом условии (2.10), их выражениями через η. В системе координат, движущейся вдоль оси z со скоростью $W_{02}(1)$, влияние основного течения ($W_{02}(1 + l)$)

на вид кинематического условия приводит к появлению квадратичной нелинейности при разложении (2.10) на невозмущенной границе.

Рассмотрим следующий вариант развития флуктуаций. Обычно в приближении пограничного слоя при достаточно сильном поверхностном натяжении деформация межфазной границы индуцирует большое по величине возмущение давления в тонком слое, которое затем устанавливает масштабы других гидродинамических переменных, порождая, в частности, полупараболический профиль возмущения продольной скорости. Полагаем

$$p_2 \sim (\mathrm{We}/\mathrm{Re}_1)\delta \quad (\mathrm{Re}_1 p_2 \sim \mathrm{We}(l + l_{zz})); \tag{3.1}$$

$$w_2 \sim \ \mathrm{Re}_2\, \varepsilon^2 p_2 \ \sim \ \mathrm{We}\, \varepsilon^2 \delta \quad (\text{из уравнения Навье — Стокса (2.2)}); \tag{3.2}$$

$$u_2 \sim \varepsilon w_2 \sim \mathrm{We}\, \varepsilon^3 \delta \quad (\text{из уравнения неразрывности (2.3)}). \tag{3.3}$$

В силу вязкостной стратификации $W_{02}(1+\delta\eta) - W_{01}(1+\delta\eta) = 2(1-1/m)\delta\eta + O(\delta\varepsilon) = O(\delta)$, а, поскольку $w_2 < O(\delta)$, из условия непрерывности скорости на межфазной границе получим

$$w_1 = O(\delta). \tag{3.4}$$

Тогда из (2.2), (2.3) вытекает

$$u_1 = O(\delta); \tag{3.5}$$

$$p_1 = O(\delta/\mathrm{Re}_1). \tag{3.6}$$

Согласно (3.2)–(3.5), имеем следующие оценки для радиальных производных, фигурирующих в правой части (2.9):

$$w_r(L) = O(\delta); \tag{3.7}$$

$$O(\mathrm{We}\, \varepsilon^2\, \delta) < u_r(L) < O(\delta), \tag{3.8}$$

согласно (2.11),

$$W_{0r}(L) = O(1). \tag{3.9}$$

Рассмотрим ситуацию, когда в процессе переноса энергии (уравнение (2.9)) малые вариации внутренней энергии границы Г, связанные с изменением площади этой межфазной поверхности, сопряжены с возмущением температуры в пленке.

Отметим предварительно, что, согласно (2.11), $\Theta_{02}(1) = T + O(\varepsilon)$, где $T = \Theta_{S2} - \{(a+1)(a^2+1) + 4(m-1)\}/\{(a+1)(a^2+1) + qm + 4(m-1)\}$, и предположим, что $T = O(1)$. Тогда с учетом оценок (3.7)–(3.9) полагаем

$$\theta_2 \sim \mathrm{Es}\, T W_{0r}(1)\varepsilon\delta/q \sim \mathrm{Es}\,\delta. \tag{3.10}$$

Чтобы величина θ_2 была связана с гидродинамическими возмущениями (в данном случае через условие (2.8)) и тем самым динамика возмущений температуры могла отразиться на эволюции границы Г, рассмотрим случай $\mathrm{Mn} \sim \mathrm{We}\, \varepsilon/\mathrm{Es}$.

Поскольку $q = O(\varepsilon)$, то в силу (2.11) $\Theta_{01r} = O(1)$, $\Theta_{02r} = O(\varepsilon^{-1})$, поэтому $\Theta_{01}(1+\delta\eta) - \Theta_{02}(1+\delta\eta) = O(\delta/\varepsilon)$. Если порядки параметров таковы, что $\theta_2 > O(\delta/\varepsilon)$ (для этого можно потребовать $\mathrm{Es} > O(\varepsilon^{-1})$), то вследствие непрерывности температуры на границе должна иметь место оценка

$$\theta_1 \sim \theta_2. \tag{3.11}$$

При этом возмущения температуры в пленке и ядре будут присутствовать в главном порядке в условии (2.9), что означает связь термодинамики в обеих областях и дает возможность возникновения нелокальных членов в амплитудном уравнении.

Для радиальных производных, присутствующих в правой части (2.8) имеем

$$O(\mathrm{Es}\ \delta) < \theta_r(L) < O(\mathrm{Es}\ \delta\varepsilon^{-1}); \tag{3.12}$$

$$O(1) < \Theta_{0r}(L) < O(\varepsilon^{-1}). \tag{3.13}$$

Как и в [2], можно рассмотреть ситуацию, когда в (2.8) в главном порядке присутствуют гидродинамические возмущения ядра и тонкого слоя. Доминирующий вклад пленки и ядра — соответственно слагаемые $(m/\varepsilon)w_{2y}$ и w_{1r}. Вследствие условия $\mathrm{We} = O(\varepsilon^{-1})$ эти величины имеют одинаковый порядок.

Обратимся к кинематическому условию. В системе координат, движущейся вдоль оси z со скоростью $W_{02}(1)$, (2.10) примет вид (опускаем слагаемые более высокого порядка) $l_t-(2/m)\,l\,l_z = u_2(y=1)$. Отсюда устанавливаются временной масштаб развития возмущений и связь между параметрами δ и ε, необходимая для того, чтобы эволюция межфазной границы была сопряжена с процессами внутри рассматриваемой физической системы:

$$\delta \sim \mathrm{We}\ \varepsilon^3, \tag{3.14}$$

и временная зависимость процессов эволюции возмущений в новой системе координат выражается через $\tau = \delta t$.

4. Вывод интегродифференциального амплитудного уравнения. Пусть

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}_\imath = O(\varepsilon), \quad \mathrm{Pe}_1 = O(\varepsilon^{-1}), \quad \mathrm{Pe}_2 = O(1), \quad \mathrm{We} = O(\varepsilon^{-1}),\\ \mathrm{Es} = O(\varepsilon^{-3/2}), \quad \mathrm{Mn} = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \mathrm{Dis}_\imath \leqslant O(\varepsilon^{-2}).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Из (3.1)–(3.6), (3.10), (3.11), (3.14) вытекает, что асимптотическое представление для величин принимает вид

$$U_2 = \varepsilon^4 u + O(\varepsilon^5), \quad W_2 = W_{02} + \varepsilon^3 w + O(\varepsilon^4), \quad P_2 = P_{02} + p + O(\varepsilon),$$

$$\Theta_2 = \Theta_{02} + \varepsilon^{1/2}\theta + O(\varepsilon^{3/2}) \quad \text{в пленке;}$$

$$U_1 = \varepsilon^2 u_c + \ldots, \quad W_1 = W_{01} + \varepsilon^2 w_c + \ldots, \quad P_1 = P_{01} + \varepsilon p_c + \ldots,$$

$$\Theta_1 = \Theta_{01} + \varepsilon^{1/2}\theta_c + \ldots \quad \text{в ядре.} \tag{4.2}$$

При подстановке (4.2) в (2.1)–(2.10), учитывая (3.7)–(3.9), (3.12), (3.13), в главном порядке получим следующую задачу:
— в тонком слое

$$p_y = 0; \tag{4.3}$$

$$-p_z + (m/\overline{\mathrm{Re}}_1)w_{yy} = 0; \tag{4.4}$$

$$-u_y + w_z = 0; \tag{4.5}$$

$$\theta_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < 1; \tag{4.6}$$

$$u = w = \theta = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \tag{4.7}$$

условия на межфазной границе для $r = 1$, $y = 1$ имеют вид

$$p = (\overline{\mathrm{We}}/\overline{\mathrm{Re}}_1)(\eta + \eta_{zz}); \tag{4.8}$$

$$u_{cz}(1) + w_{cr}(1) + mw_y(1) = \overline{\mathrm{Mn}}\,\theta_z(1); \tag{4.9}$$

$$\theta_{cr}(1) + \bar{q}\theta_y(1) = -\mathrm{E}\eta_z, \tag{4.10}$$

где $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{Es}}\, TW_{0r}(1)$ (значение T пояснено при выводе (3.10));

$$u_c(1) = 0, \quad w_c(1) = 2(1 - 1/m)\eta; \tag{4.11}$$

$$\theta_c(1) = \theta(1) \tag{4.12}$$

$$\eta_\tau - (2/m)\eta\eta_z = u(1); \tag{4.13}$$

— в ядре

$$\Delta u_c - (1/r^2)u_c = \overline{\mathrm{Re}}_1 p_{cr}; \tag{4.14}$$

$$\Delta w_c = \overline{\mathrm{Re}}_1 p_{cz}; \tag{4.15}$$

$$u_{cr} + (1/r)u_c + w_{cz} = 0; \tag{4.16}$$

$$\Delta\theta_c = 0 \quad \text{при} \quad 0 < r < 1; \tag{4.17}$$

$$u_c,\ w_c,\ \theta_c \quad \text{ограничены при}\ r = 0. \tag{4.18}$$

Через $\overline{\mathrm{Es}}$, $\overline{\mathrm{Mn}}$, $\overline{\mathrm{We}}$, $\overline{\mathrm{Re}}_1$, $\bar{q}$ обозначены соответствующие параметры, деленные каждый на свой порядок.

Задача (4.3)–(4.7) имеет решение

$$\begin{gathered} p = p(z,\tau), \quad w = (\overline{\mathrm{Re}}_1/m)(p_z y^2/2 + A(z,\tau)y), \\ u = (\overline{\mathrm{Re}}_1/m)(p_{zz}y^3/6 + A_z y^2/2), \quad \theta = B(z,\tau)y. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Здесь $A(z,\tau)$, $B(z,\tau)$, $p(z,\tau)$ — неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий.

Отсюда получим $u(y=1) = (w_{yz}(y=1))/2 - p_{zz}\overline{\mathrm{Re}}_1/(3m)$ и, выражая $w_y(y=1)$ из (4.9), имеем

$$u(y=1) = (\overline{\mathrm{Mn}}B_{zz} - u_{czz}(r=1) - w_{crz}(r=1))/(2m) - p_{zz}\overline{\mathrm{Re}}_1/(3m). \tag{4.20}$$

Из (4.17) с помощью преобразования Фурье $F(\theta_c) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta_c(r,z,\tau)\exp(-i\alpha z)\,dz$ находим, учитывая (4.18), что в фурье-пространстве $F(\theta_c) = C(\alpha)I_0(\alpha r)$, здесь и далее I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

Определим неизвестные функции $B(z,\tau)$ и $C(\alpha)$ из условий (4.10), (4.12), которые можно записать как $C(\alpha)\alpha I_1(\alpha) + \bar{q}F(B) = -\mathrm{E}F(\eta_z)$, $C(\alpha)I_0(\alpha) = F(B)$. Тогда

$$B(z,\tau) = -\mathrm{E}F^{-1}\{F(\eta_z)I_0(\alpha)/(\alpha I_1(\alpha) + \bar{q}I_0(\alpha))\}. \tag{4.21}$$

Решение гидродинамической части задачи в ядре производится аналогично, но сложнее (см. [2]). Если ввести функцию тока, найти ее фурье-образ с точностью до неизвестных функций, определить последние из граничных условий и вернуться с помощью обратного преобразования Фурье в конфигурационное пространство, то можно найти $\{w_{crz}(r=1) + u_{czz}(r=1)\}$ в (4.20).

Подставив найденное вышеупомянутое выражение (см. формулы (26), (27) в [2]), а также $p(z,\tau)$ из (4.8) и $B(z,\tau)$ из (4.21) в (4.20), из (4.13) получим, что искомое амплитудное уравнение имеет вид

$$\begin{gathered} \eta_\tau + M_1\eta\eta_z + M_2(\eta_{zz} + \eta_{zzzz}) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_\zeta(\zeta,\tau)\exp\left(i\alpha(z-\zeta)\right)d\zeta\, d\alpha + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} iG(\alpha) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(\zeta,\tau)\, \exp\left(i\alpha(z-\zeta)\right)d\zeta\, d\alpha = 0, \end{gathered} \tag{4.22}$$

где

$$M_1 = -2/m, \quad M_2 = \bar{\mathrm{We}}/3m, \quad T(\alpha) = -\bar{\mathrm{Mn}}\ \mathrm{E}\ \frac{1}{4\pi m}\ \frac{\alpha^2 I_0(\alpha)}{\alpha I_1(\alpha) + \bar{q} I_0(\alpha)},$$

$$G(\alpha) = \frac{1}{\pi m}\Big(1 - \frac{1}{m}\Big)\frac{\alpha^2 I_1{}^2(\alpha)}{\alpha I_1{}^2(\alpha) - \alpha I_0^2(\alpha) + 2 I_0(\alpha) I_1(\alpha)}. \tag{4.23}$$

Замечание 1. Аналогично рассматривается случай $\mathrm{Re}_t = O(1)$. В задаче (4.3)–(4.18) изменяются только уравнения (4.14), (4.15). Амплитудное уравнение в этом случае имеет вид (4.22), (4.23), только ядро $G(\alpha)$ определяется другой формулой, приведенной в [2].

Замечание 2. При $O(\varepsilon^{-1}) < \mathrm{We} < O(\varepsilon^{-2})$ редуцированная задача (4.3)–(4.18) сохраняет свой вид, только в (4.9) слагаемые u_{cz}, w_{cr} опускаются, второе интегральное слагаемое с ядром $iG(\alpha)$ в (4.22) исчезает, а в остальном амплитудное уравнение не изменяется.

5. Вывод амплитудного уравнения в случае отсутствия влияния возмущений ядра на эволюцию межфазной границы. Пусть

$$\rho_2/\rho_1 = O(1), \quad q = O(1), \quad \mathrm{Re}_t = O(\varepsilon) \quad \text{или} \quad \mathrm{Re}_t = O(1),$$

$$\mathrm{Pe}_t = O(1), \quad O(\varepsilon^{-2}) < \mathrm{We} < O(\varepsilon^{-1}), \quad \mathrm{Mn} = O(1).$$

Можно почти дословно повторить рассуждения п. **3** с некоторыми исключениями. Теперь оценка (3.10) имеет вид $\theta_2 \sim \mathrm{Es}\ \delta\varepsilon$. Температурные и гидродинамические возмущения связаны через условие (2.8) при $\mathrm{Es}\ \sim \mathrm{We}$.

В рассматриваемом случае $\Theta_{01}(1+\delta\eta) - \Theta_{02}(1+\delta\eta) = O(\delta)$ и $\theta_2 > O(\delta)$, поэтому полагаем $\theta_1 \sim \theta_2$.

Вместо (3.7), (3.8), (3.14), (3.15) получим

$$O(\delta) < w_r(L) < O(\mathrm{We}\ \delta\varepsilon), \quad O(\mathrm{We}\ \delta\varepsilon^2) < u_r(L) < O(\delta),$$

$$O(\mathrm{Es}\ \delta\varepsilon) < \theta_r(L) < O(\mathrm{Es}\ \delta), \quad \Theta_{0r}(L) = O(1).$$

Тогда исходную систему (2.1)–(2.10) можно упростить до следующей редуцированной задачи. В тонком слое удовлетворяются (4.3)–(4.7). На границе при $y = 1$ выполняются условия

$$p = (\overline{\mathrm{We}}/\overline{\mathrm{Re}}_1)(\eta + \eta_{zz}), \quad m w_y(1) = \mathrm{Mn}\ \theta_z(1), \quad q\theta_y(1) = -\mathrm{E}\ \eta_z,$$
$$u_c(1) = 0, \quad w_c(1) = 2(1 - 1/m)\eta, \quad \theta_c(1) = \theta(1), \quad \eta_\tau - (2/m)\eta\eta_z = u(1). \tag{5.1}$$

Для нахождения функции $u(y = 1)$ необходимо знать динамику только в пленке, и задачу в ядре не выписываем. Определяя неизвестные функции $A(z,\tau)$, $B(z,\tau)$, $p(z,\tau)$ в (4.19) из граничных условий (5.1) и подставляя величину $u(y = 1)$, выраженную как функционал от $\eta(z,\tau)$, в редуцированное кинематическое условие, получим, что в данном приближении поведение межфазной границы описывается уравнением

$$\eta_\tau + M_1\eta\eta_z + M_2(\eta_{zz} + \eta_{zzzz}) + M_3\eta_{zzz} = 0 \tag{5.2}$$

$$(M_1 = -2/m, \quad M_2 = \overline{\mathrm{We}}/3m, \quad M_3 = \mathrm{Mn}\,\mathrm{E}/2mq).$$

Замечание 3. Метод редукции применим, очевидно, и для аналогичного по конфигурации течения в цилиндрической трубе кольцевого сечения.

6. О возможных последствиях влияния рассмотренных термодинамических эффектов. Линейное дисперсионное соотношение уравнения (4.22) для гармоники $\eta = \exp\{i\alpha z + \lambda\tau\}$ примет вид $\lambda = M_2(\alpha^2 - \alpha^4) - iG(\alpha) - i\alpha T(\alpha)$, а для уравнения (5.2) $\lambda = M_2(\alpha^2 - \alpha^4) + iM_3\alpha^3$. Таким образом, влияние температурных возмущений в обоих случаях имеет дисперсионный характер.

Известно, что дисперсионные эффекты могут обладать регуляризующим влиянием на турбулентное поведение динамических систем. Так, в [6] показано численными расчетами, что хаотический характер решения уравнения Курамото — Сивашинского (1.1) резко меняется при добавлении в (1.1) слагаемого вида $M_3\eta_{zzz}$ с подходящим значением коэффициента M_3. Решения становятся похожими на цепочку импульсов равной амплитуды, движущихся как единое целое, или на последовательность уединенных волн.

Согласно численным расчетам, проведенным в [2], влияние нелокального члена с ядром $iG(\alpha)$, имеющего дисперсионный характер, также упорядочивает хаотический характер решений уравнения Курамото — Сивашинского. Могут, например, возникнуть движения с двумя характерными пространственными масштабами: профиль на периоде представляет собой длинный высокий гребень с расположенным на нем небольшим холмиком. Ядра $iG(\alpha)$ и $T(\alpha)$ похожи по своей структуре, и, по-видимому, к аналогичным результатам приведет и наличие в амплитудном уравнении (4.22) нелокального интегрального члена с ядром $T(\alpha)$, обусловленного влиянием тех термодинамических эффектов, которые работают в рамках рассмотренного механизма развития возмущений.

Уравнения (4.22) и (5.2) отличаются от уравнения Курамото — Сивашинского (1.1) только наличием членов дисперсионного характера. Вещественная часть дисперсионных соотношений у перечисленных уравнений одинакова и означает, что энергия неустойчивых длинных волн переносится квадратично-нелинейным слагаемым в затухающие коротковолновые возмущения. Подобная организованность обеспечивает ограниченность решений уравнения Курамото — Сивашинского [7, 8]. Весьма вероятно, что этот механизм приводит к аналогичному свойству ограниченности и для решений уравнений (4.22), (5.2), поскольку появляющиеся в них новые по сравнению с (1.1) эффекты носят для малых возмущений чисто дисперсионный характер.

Эти аргументы совместно с результатами численных расчетов для уравнения (5.2) [6] и уравнения (4.22) с единственным интегральным членом с ядром $iG(\alpha)$ [2], свидетельствующих об ограниченности найденных решений в пространстве и во времени, вместе с исходным предположением $\delta \ll \varepsilon$ позволяют ожидать, что в рассмотренных случаях тонкий слой стабилизируется задолго до того, как амплитуда возмущений межфазной границы станет сравнимой с его толщиной, и, значит, пленка не будет разрушаться.

Исследование конкретного характера возможных вторичных режимов, описываемых полученными амплитудными уравнениями, требует дальнейшего изучения.

Некоторые результаты этой работы были представлены на 10-й Зимней школе по механике сплошных сред, проходившей в г. Перми в 1995 г.

Автор выражает признательность В. К. Андрееву за консультации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00340а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Frenkel A. L., Babchin A. J., Levich B. J., et al.** Annular flows can keep unstable films from breakup: nonlinear saturation of capillary instability // J. Colloid and Interface Science. 1987. V. 115, N 1. P. 225–233.
2. **Papageorgiou D. T., Maldarelli C., Rumschitzki D. S.** Nonlinear interfacial stability of core-annular film flows // Phys. Fluids A. 1990. V. 2, N 3. P. 340–352.
3. **Georgiou E., Maldarelli C., Papageorgiou D. T., Rumschitzki D. S.** An asymptotic theory for the linear stability of a core-annular flow in the thin annular limit // J. Fluid Mech. 1992. V. 243. P. 653–677.

4. **Hammond P. S.** Nonlinear adjustment of a thin annular film of viscous fluid surrounding a thread of another within a circular cylindrical pipe // J. Fluid Mech. 1983. V. 137. P. 363–384.
5. **Пухначев В. В.** Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирск: НГУ, 1989.
6. **Kawahara T.** Formation of saturated solutions in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51, N 5. P. 381–383.
7. **Sivashinsky G. I., Michelson D. M.** On irregular wavy flow of a liquid film down a vertical plane // Prog. Theor. Phys. 1980. V. 63. P. 2112–2114.
8. **Michelson D. M., Sivashinsky G. I.** Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. 2. Numerical experiments // Acta Astronautica. 1977. V. 4. P. 1207–1221.

Поступила в редакцию 5/IX 1995 г.