

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ В МОДЕЛЯХ РАЗЛОМНО-БЛОКОВЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД

**В.Г. Быков**

*Институт тектоники и геофизики им. Ю.А. Косыгина ДВО РАН,  
680000, Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65, Россия*

Представлен обзор теоретических исследований солитонов и других типов нелинейных волн, возбуждаемых при деформировании разломно-блоковых геологических сред. Дано краткое описание известных моделей, их геофизических и геодинамических приложений. Избраны модели, которые соответствуют классическому и возмущенному уравнению  $\sin$ -Гордона. Динамическими переменными в этих математических моделях служат угол поворота и смещение блоков (фрагментов) среды. Модели воспроизводят кинематические и динамические особенности бегущих фронтов деформации (кинков, солитонов), генерируемых во фрагментированных средах.

Демонстрируется применение уравнения  $\sin$ -Гордона в сейсмологии и геомеханике для описания многих наблюдаемых сейсмологических данных, моделирования деформационных волн, динамики разломов и зон субдукции, включая медленные землетрясения, периодичность медленного скольжения и сейсмического тремора.

*Нелинейная динамика, уравнение  $\sin$ -Гордона, уединенные волны, неустойчивое скольжение, деформационные волны, землетрясение.*

## NONLINEAR WAVES AND SOLITONS IN MODELS OF FAULT BLOCK GEOLOGICAL MEDIA

**V.G. Bykov**

This is an overview of theoretical research on solitons and other nonlinear waves induced by deformation in fault block (fragmented) geological media, including a brief description of available models with their geophysical and geodynamic applications. The cited models correspond to the classical and perturbed sine-Gordon equations and use the rotation angle and displacement of fault blocks as dynamic variables. The models simulate kinematics and dynamics of traveling deformation fronts (kinks and solitons) generated in faulted rocks. The sine-Gordon equation is presented in its seismological and geomechanic applications for description of earthquake data and modeling of strain waves, faulting patterns, and subduction processes, including slow earthquakes and periodic episodic tremor and slow slip (ETS) effects.

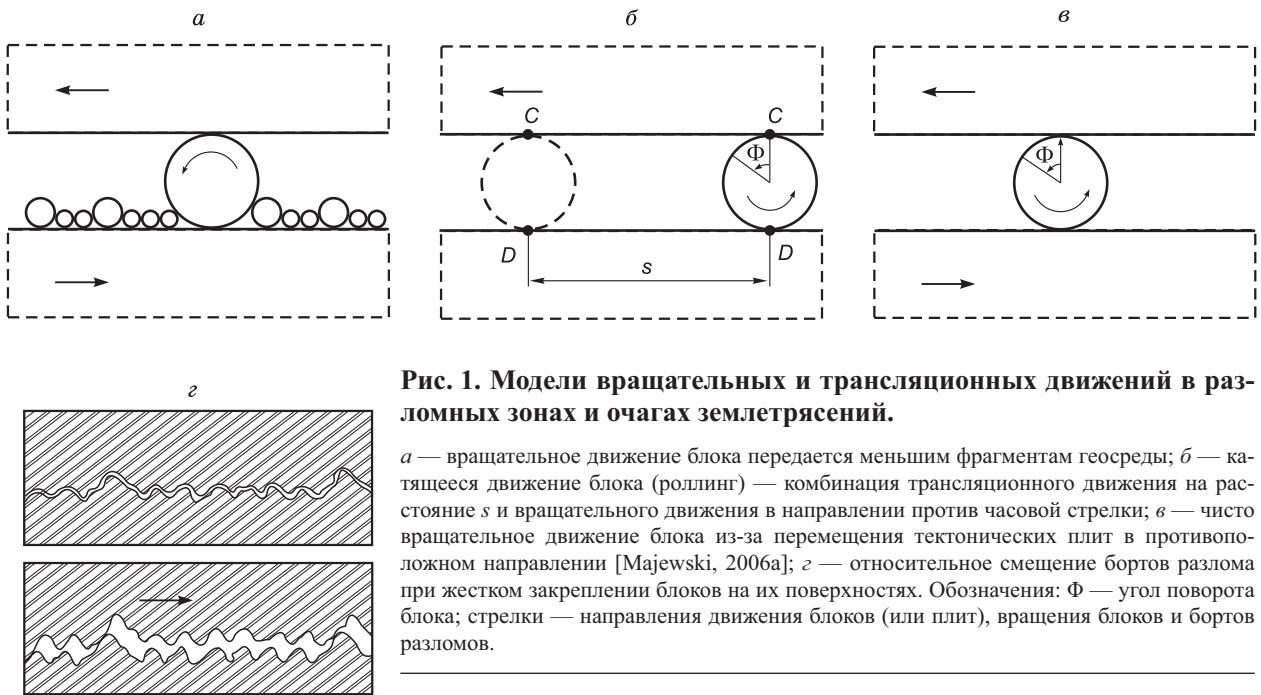
*Nonlinear dynamics, sine-Gordon equation, soliton, stick-slip, strain wave, earthquake*

## ВВЕДЕНИЕ

Распространение и перераспределение основной энергии деформационного процесса в блочных геосредах связано с медленными движениями. Медленная передача напряжений в литосфере происходит в форме деформационных (тектонических) волн, возбуждаемых в разломах земной коры и литосферы при взаимодействии отдельных структурных элементов (блоков и микроплит) [Николаевский, 2008; Горбунова, Шерман, 2012; Шерман и др., 2012].

В последние двадцать лет при математическом моделировании динамики разломов, механизмов поворота и скольжения блоков земной коры, генерирующих деформационные волны, а также интерпретации наблюдаемых при этом сейсмических и деформационных эффектов с успехом применяется уравнение  $\sin$ -Гордона [Николаевский, 1995, 1996; Гарагаш, 1996; Михайлов, Николаевский, 2000; Быков, 2001a; Вуков, 2006, 2008; Majewski, 2006a,b; Викулин, 2008; Gershenzon et al., 2009, 2011]. Классическое уравнение  $\sin$ -Гордона имеет несколько качественно отличающихся аналитических решений в виде кинков, бризеров, уединенных волн (солитонов), быстрых и медленных кноидальных волн и каждому из них соответствует свой ход эволюции системы блоков и разломов [Быков, 2000a]. Это существенно упрощает анализ и способствует получению наиболее достоверных результатов.

Мотивацией для исследований, отдельные результаты которых представлены в данной статье, послужило стремление построить математические модели, которые бы описывали механизмы, порождающие миграцию землетрясений, медленные деформационные волны и наблюдаемые в разломах эффекты



**Рис. 1. Модели вращательных и трансляционных движений в разломных зонах и очагах землетрясений.**

*a* — вращательное движение блока передается меньшим фрагментам геосреды; *b* — катящееся движение блока (роллинг) — комбинация трансляционного движения на расстояние  $s$  и вращательного движения в направлении против часовой стрелки; *в* — чисто вращательное движение блока из-за перемещения тектонических плит в противоположном направлении [Majewski, 2006a]; *z* — относительное смещение бортов разлома при жестком закреплении блоков на их поверхностях. Обозначения:  $\Phi$  — угол поворота блока; стрелки — направления движения блоков (или плит), вращения блоков и бортов разломов.

неустойчивого скольжения. Имеется немало прямых и косвенных свидетельств [Николаевский, 1996], что медленные тектонические деформации распространяются в виде уединенных волн. Отсюда и возникла потребность применить уравнение  $\sin$ -Гордона, имеющее в качестве решения уединенные волны — кинки и солитоны.

Справедливость приложения уравнения  $\sin$ -Гордона к геосредам доказывается тем, что его следствия согласуются с результатами экспериментов и натурных наблюдений. Более того, солитон  $\sin$ -Гордона может останавливаться (без изменения своей топологии) и вновь приходит в движение. Это и дает возможность моделировать динамику разломов. Уравнение  $\sin$ -Гордона применимо для случая больших деформаций и поворотов блоков, связанных с крупными геологическими событиями.

Возникновение медленных волновых движений может быть объяснено помимо вращения и скольжения блоков и другими причинами, например, конечными размерами и большим числом степеней свободы блоков — фрагментов геосреды [Сибиряков, Подбережный, 2006; Сибиряков и др., 2012].

Математические модели динамики разломов, механизмов поворота и скольжения блоков земной коры, соответствующие уравнению  $\sin$ -Гордона, включают в качестве переменных угол поворота фрагментов горных массивов [Николаевский, 1995, 1996; Гарагаш, 1996] или смещение блоков, локализованных вдоль разломов [Быков, 2000a; Gershenzon et al., 2009, 2011].

Эти два типа моделей возникают при описании двух различных физических механизмов генерации деформационных волн. Первый механизм учитывает вращательные и трансляционные движения блоков в разломных зонах или в теле разлома при относительном смещении его бортов во время землетрясения или крипового движения (рис. 1, *a—в*). Второй механизм описывает смещения внутри разлома при жестком закреплении блоков на поверхностях его бортов (см. рис. 1, *z*). Для математического моделирования этих механизмов имелись твердые физические основания и заключаются они в следующем.

Вблизи разломов действительно зафиксированы вращательные движения, возникающие вследствие тектонических процессов или землетрясений. В специальном выпуске Бюллетеня Сейсмологического общества Америки [Rotational seismology..., 2009] об этом приведены многочисленные данные. При конструировании уравнений движения этот факт (вращательные движения блоков) был отражен следующим образом: симметричная часть тензора напряжений (как и в микрополярной теории упругости) принималась пропорциональной деформации (или скорости деформации), асимметричная часть — синусу угла поворота (или угловой скорости) блоков в разломе. Это в итоге дало возможность получить в качестве решения медленные волны со скоростью порядка 10—100 км/год, которая совпадает со скоростями регистрируемых различными методами деформационных (тектонических) волн.

Модели второго типа соответствуют другой реальной ситуации, когда поверхности бортов разлома имеют квазипериодическую структуру. В основе такого представления лежит анализ многочисленных натурных и лабораторных наблюдений [Power, Tullis, 1991], из которого следует, что топография поверхности разрыва представляет собой сумму синусоид с различным соотношением длин волн. По-

этому при построении моделей этого типа предполагалось, что при смещении синусоидально-однородных поверхностей возникает периодическая «восстанавливающая» сила, стремящаяся вернуть разлом после локального смещения в состояние равновесия. Эта сила имеет смысл тангенциальной составляющей силы реакции квазисинусоидальной поверхности одного борта разлома на перемещение другого. Совсем недавно в ходе лабораторных экспериментов установлено [Di Bartolomeo et al., 2012], что действительно, на контакте блоков горных пород возникает тангенциальная сила, которая действует в плоскости скольжения и изменяется по периодическому закону. Этот факт отражен в математических моделях второго типа посредством включения в уравнение движения «восстанавливающей» силы, содержащей периодическую функцию [Вуков, 2006, 2008].

В настоящем обзоре представлены математические модели разломно-блоковых (фрагментированных) сред, соответствующие классическому и возмущенному уравнениям sin-Гордона, и методы, позволяющие конструировать эти уравнения в некоторых конкретных задачах геомеханики и сейсмологии; показано применение математических моделей для объяснения наблюдаемых эффектов, а также определения условий их возникновения в геологических средах.

### КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ SIN-ГОРДОНА И ЕГО РЕШЕНИЯ

Уравнение sin-Гордона, впервые полученное при описании дислокаций в кристаллах [Конторова, Френкель, 1938], успешно использовано затем в теории ферромагнетизма, квантовой оптике, физике элементарных частиц, в биологии [Скотт, 2007; Браун, Кившарь, 2008; Аэро и др., 2009]. Однако в сейсмологии и геомеханике уравнение sin-Гордона применено относительно недавно при моделировании сейсмических и деформационных процессов, обусловленных вращением блоков в фрагментированной геологической среде [Николаевский, 1995; Гарагаш, 1996; Гарагаш, Николаевский, 2009].

Исчерпывающие сведения об уравнении sin-Гордона, его решениях и их свойствах можно найти в замечательных монографиях и статьях [Уизем, 1977; Лэм, 1983; Додд и др., 1988; Kivshar, Malomed 1989; Braun, Kivshar, 1998; Braun, Kivshar, 2008].

Здесь приведены только те решения уравнения sin-Гордона, которые использованы при построении моделей сейсмической активизации разломов и отражают основные черты процесса деформирования разломных зон, и относительную роль различных факторов в волновой динамике очага землетрясения.

Классическое уравнение sin-Гордона имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \sin U, \quad (1)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$  — пространственная и временная координаты;  $U$  — динамическая переменная (угол поворота или смещение блока (фрагмента) среды). Если искать решение в виде бегущей волны ( $\beta$  — скорость волны)

$$U = U(\tau) = U(\xi - \beta\eta),$$

то уравнение (1) переходит в

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} = \frac{\sin U}{1 - \beta^2}. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет следующие общеизвестные решения:

1. Периодические быстрые кноидальные волны ( $0 < k < 1$ ;  $\beta^2 > 1$ )

$$U = 2 \arcsin \left[ k \operatorname{sn} \left[ -\frac{1}{k} \left( \frac{\xi - \beta\eta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \right); k \right] \right], \quad (3)$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{\beta k}{\pi(\beta^2 - 1)^{1/2}} \operatorname{cn} \left[ \left( \frac{\xi - \beta\eta}{(\beta^2 - 1)^{1/2}} \right); k \right]. \quad (4)$$

Решение (3) — бегущая волна, осциллирующая около значения  $U = 0$ . Решение (4) соответствует периодической волне с нулевым средним значением.

2. Периодические медленные кноидальные волны ( $0 < k < 1$ ;  $\beta^2 < 1$ )

$$U = \arcsin \left\{ \pm \operatorname{cn} \left[ -\frac{1}{k} \left( \frac{\xi - \beta\eta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \right); k \right] \right\}, \quad (5)$$

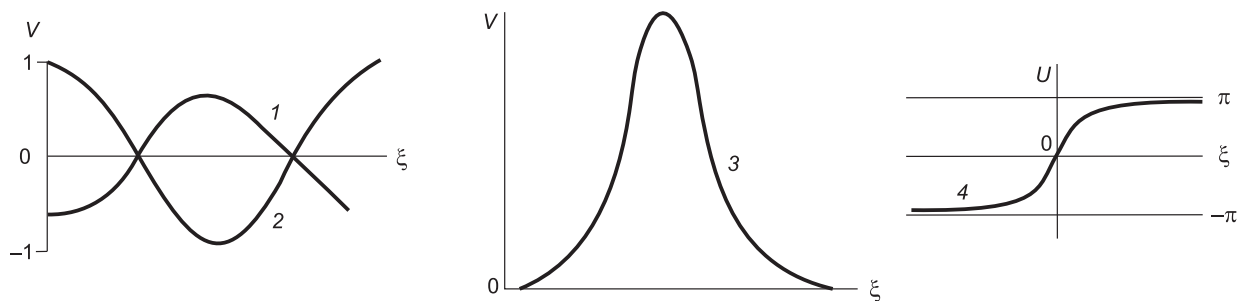


Рис. 2. Профили скоростей  $V$  частиц в «быстрой» (1) и «медленной» (2) кноидальных и уединенной (3) волнах, смещения  $U$  частиц (4) — кинк.

$$V = \frac{\partial U}{\partial \eta} = \pm \frac{\beta}{\pi k(1-\beta^2)^{1/2}} \operatorname{dn} \left[ \frac{1}{k} \left( \frac{\xi - \beta \eta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right); k \right]. \quad (6)$$

Решение (6) представляет собой периодическую последовательность импульсов с пространственным периодом  $2k(1-\beta^2)^{1/2} K(k)$ , где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. В выражениях (3)—(6) использованы обозначения:  $\operatorname{sn}(\xi, k)$ ,  $\operatorname{cn}(\xi, k)$ ,  $\operatorname{dn}(\xi, k)$  — эллиптические функции Якоби;  $k$  — модуль эллиптической функции.

3. Уединенные волны — солитоны ( $k \rightarrow 1$ ;  $\beta^2 < 1$ )

$$U = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \pm \frac{\xi - \beta \eta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right) \right], \quad (7)$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial \eta} = \pm \frac{\beta}{\pi(1-\beta^2)^{1/2}} \operatorname{sech} \left( \frac{\xi - \beta \eta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right). \quad (8)$$

Решения (7) и (8) наиболее часто встречаются в настоящем обзоре и имеют собственные названия: первое — кинк, волна с неизменным профилем в виде перегиба по переменной  $U$ ; второе — солитон, уединенная волна, перемещающаяся со скоростью  $\beta$ . Указанные решения схематически приведены на рис. 2.

### КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ SIN-ГОРДОНА В МОДЕЛЯХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ВОЛН И МИГРАЦИИ СЕЙСМИЧНОСТИ

Поиски аналогий и построение новых (именно нелинейных) математических моделей деформирования разломных и фрагментированных геологических сред были мотивированы невозможностью объяснить наблюдаемые эффекты в рамках линейной теории упругости (вязкоупругости или упругопластичности).

Математическая модель поворотных колебаний блоков в разломах земной коры, генерирующих деформационные волны, впервые предложена В.Н. Николаевским [Николаевский, 1995]. Исследование таких волн имеет принципиальное значение для выявления механизмов миграции как предвестников землетрясений в земной коре [Nikolaevskiy, 1998], так и крупномасштабных тектонических волн [Михайлов, Николаевский, 2000]. Соответствующее данному механизму уравнение sin-Гордона дает решение в виде медленно распространяющейся тектонической волны солитонного типа — кинка.

В статье [Wu, Chen, 1998] на основе одномерной пружинно-блоковой модели Барриджа-Кнопва получено классическое уравнение sin-Гордона и показана возможность применения его решения в виде уединенной волны (кинка) для исследования землетрясений. Из решения следует, что скорость распространения волны всегда меньше скорости сейсмических волн.

Ротационная модель сейсмического процесса, в которой возбуждение волн деформации в цепочке сейсмофокальных блоков связано с вращением Земли вокруг собственной оси, представлена в [Викулин, 2008]. Показано, что уравнение sin-Гордона объясняет некоторые особенности сейсмического процесса.

Совсем недавно решение уравнения sin-Гордона в виде медленных кноидальных волн — последовательности импульсов с некоторым пространственным периодом — применено при математическом моделировании динамики деформационных процессов на границе плит в зонах трансформных разломов

и связанных с этим эффектов [Gershenzon et al., 2009]. Модель количественно описывает основные стадии сейсмического процесса и медленные землетрясения. В статье [Gershenzon et al., 2011] на основе классического уравнения sin-Гордона проведено моделирование особенностей динамики литосферных плит и зон субдукции, и интенсивно изучаемых в настоящее время медленного скольжения и миграции сейсмического тремора.

Рассмотрим основные модели деформационных процессов в земной коре, соответствующие классическому уравнению sin-Гордона.

### МЕДЛЕННЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ РОТАЦИОННОГО ТИПА В ФРАГМЕНТИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Математические модели поворотных колебаний блоков земной коры, генерирующих деформационные волны, предложены В.Н. Николаевским [Николаевский, 1995, 1996] и И.А. Гарагашем [Гарагаш, 1996]. Соответствующее данному механизму уравнение sin-Гордона дает решения в виде уединенных волн, интерпретируемых в модели фрагментированной среды как медленно распространяющиеся деформационные волны солитонного типа [Гарагаш, Николаевский, 2009].

**Ротационные волны в фрагментированном упругом массиве.** Модели вязкоупругости или упругопластичности, обычно применяемые в геодинамике, не могут описать медленное перераспределение напряжений в земной коре. Поэтому В.Н. Николаевским была сконструирована упругая модель, отвечающая микроплитовому строению литосферы (земной коры или катакластически раздробленного массива) с учетом инерции кинематически независимых поворотов ( $\Phi$ ) микроплит. Соответствующая модификация механики Коссера привела к балансу моментов количества движения в виде уравнения sin-Гордона [Николаевский, 1995].

При наиболее простом движении смещения  $u_i$  жестко связаны с углом поворота  $\Phi_k$  векторным правилом  $u_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} b_j \Phi_k$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  — тензор Леви-Чивиты.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = -N(\Phi), \quad (9)$$

$$c_i = \sqrt{\frac{\Lambda_j}{\rho_0 J}} = \frac{d_i}{d} \sqrt{\frac{G_i}{\rho}} = \sqrt{\frac{G_*}{\rho_*}}, \quad N = \frac{M}{\rho_0 J},$$

где  $\Phi$  — угол поворота блока;  $N$  — приведенный объемный момент силы;  $J$  — момент инерции блока на единицу его объема;  $G_*$ ,  $\rho_*$  — эффективные жесткость и плотность фрагментированного массива;  $\rho$  — плотность сплошного геоматериала;  $\rho_0$  — истинная плотность фрагмента;  $c_i$  — волновые скорости (волны поворота блоков и поперечные сейсмические);  $d_i$  — внутренние масштабы длины;  $\Lambda$  — упругие модули поворота.

Если объемный момент  $M$  определяется «восстанавливающей» силой  $f$  и радиусом поворота фрагмента  $R \sim J^{1/2}$ , то

$$M = fR \sin \Phi, \quad N = f \sin \Phi / (\rho_0 \sqrt{J})$$

и уравнение (9) для одномерного случая принимает вид классического уравнения sin-Гордона:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{f}{\rho_0 R} \sin \Phi. \quad (10)$$

Одним из решений уравнения (10) является солитонообразная волна — кинк:

$$u = \Phi \sqrt{J} = 4\sqrt{J} \operatorname{arctg} \left( \exp \frac{(x - Vt) \sqrt{f / \rho_0 R}}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right). \quad (11)$$

Из (11) следует, что в геологической (блочной, фрагментированной) среде или в катакластически раздробленном теле разлома возможно распространение медленных уединенных волн микроповоротов блоков, движущихся со скоростями на много порядков меньшими, чем скорости сейсмических волн.

**Динамические возмущения в пластически деформируемой геосреде.** Представление о дискретности геологической среды, состоящей из жестких упругих блоков, разделенных пластическими прослойками, соответствует модели пластического течения фрагментированной среды. Микроповороты блоков связаны с возникновением моментов на их гранях и приводят к асимметрии макронапряжений. Моделью такой среды может служить находящийся в условиях пластического течения микрополярный

континуум, учитывающий наряду со средним смещением кинематически независимые повороты отдельных блоков.

В модели [Гарагаш, 1996] рассмотрено деформирование фрагментированной среды в предельном равновесном случае. На макроуровне геоматериал находится в состоянии пластического течения и подчиняется условию Кулона—Мора:  $\tau = Y - \alpha\sigma$  ( $\sigma$  и  $\tau$  — первый и второй инварианты тензора напряжений,  $\alpha$  и  $Y$  — параметры сухого трения и сцепления соответственно), но при этом на микроуровне сохраняется упругая связь между изгибающими и крутящими моментами  $m$  и кривизнами граней блоков  $B$ . Постулировано линейное соотношение  $\vartheta = \vartheta^0 - S\phi_3$ , которое характеризует асимметрию поля напряжений,  $\vartheta^0$  — значение параметра  $\vartheta$  к моменту начала пластического течения;  $S$  — постоянный параметр;  $\phi_3$  — кинематически независимые микроповороты отдельных фрагментов в плоском случае. Постоянная  $S$  может принимать отрицательные и положительные значения. Последний случай соответствует разупрочнению фрагментированного массива горных пород вследствие уменьшения коэффициента трения качения между блоками.

Получено уравнение динамического поведения фрагментированной среды:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \frac{B}{J} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{2S}{J} (Y + \alpha p \cos \vartheta) \sin \vartheta = \left( \frac{\partial^2 \vartheta^0}{\partial t^2} - \frac{B}{J} \frac{\partial^2 \vartheta^0}{\partial x^2} \right) - S \left( \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} - \frac{B}{J} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} \right), \quad (12)$$

где  $J$  — момент инерции блока на единицу его объема;  $p$  — среднее давление.

Согласно уравнению (12), при  $\alpha = 0$ ,  $\vartheta^0 = \text{const}$  и постоянном угле поворотов  $\phi_3$  распространение одномерного динамического возмущения описывается уравнением  $\sin$ -Гордона:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \frac{B}{J} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{2S}{J} Y \sin \vartheta. \quad (13)$$

Если происходит упрочнение ( $S < 0$ ), то решением уравнения (13) является кинк — волна с неизменным профилем в виде перегиба по переменной  $\vartheta(\xi) = \vartheta(x - vt)$  (рис. 3), обладающая свойствами солитона:

$$\vartheta = 4 \arctg \left[ \exp \frac{(x - vt) \sqrt{2SY/J}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right].$$

Здесь  $c = \sqrt{B/J}$ ,  $v$  — скорость солитона.

Предельный случай определяется равенством солитонной и волновой скоростей  $v = c = \sqrt{B/J}$  и соответствует переходу от солитона к осцилляциям, распространяющимся со скоростью линейной волны собственных поворотов блоков.

Если наступает разупрочнение ( $S > 0$ ) среды, то справедливо периодическое решение (рис. 4), называемое бризером:

$$\vartheta = 4 \arcsin \left\{ a \sin \left[ b \left( 2 \frac{SY}{J} \right)^{1/2} t \right] / b \operatorname{ch} \left[ a \left( 2 \frac{SY}{B} \right)^{1/2} x_1 \right] \right\}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

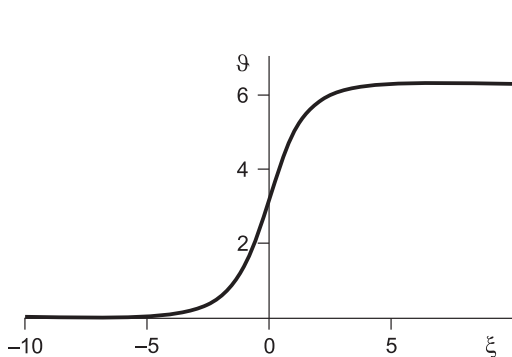


Рис. 3. Волна с неизменным профилем в виде перегиба (кинка)  $\vartheta(\xi)$  [Гарагаш, Николаевский, 2009].

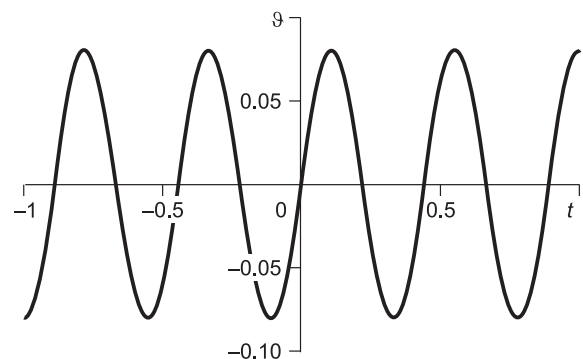


Рис. 4. Периодическая волна (бризер)  $\vartheta(t)$  [Гарагаш, Николаевский, 2009].



Микровращения блоков способствуют локализации деформации, определяют ее структуру и масштаб. При пластическом течении фрагментированной среды распространение динамических возмущений носит солитонный характер.

**Тектонические волны ротационного типа.** В статье [Михайлов, Николаевский, 2000] сформулирована математическая модель распространения медленных поворотных тектонических волн с излучением поперечных сейсмических волн, которая соответствует сейсмологическим и геофизическим наблюдениям. В качестве основы были использованы представления механики Коссера, учитывающей динамику поворотов частиц, слагающих сплошную среду. Материальные константы континуума Коссера в натуральных условиях могут быть измерены фазовым методом по дисперсии низкочастотных поперечных волн [Pasternak, Dyskin, 2010].

В модели [Михайлов, Николаевский, 2000] геологическая среда состоит из отдельных жестких блоков, которые могут совершать микроповороты, независимые от трансляционных смещений. Предполагается, что поворот блоков совершается в плоскости  $X, Y$ , а вектор поворота блоков имеет единственную ненулевую компоненту вдоль оси  $Z$ . Смещения в поперечной волне, распространяющейся вдоль оси  $X$ , имеют только одну, отличную от нуля, компоненту  $Y(u_x = u_z = 0, u_y \neq 0)$ , а массовая скорость определяется как  $v_y = du_y/dt$ .

Учет блочной структуры среды с постоянной плотностью  $\rho$  соответствует уравнению баланса момента количества движения:

$$\rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi_z + \omega_z) = \frac{\partial M_{xz}}{\partial X} + \sigma_{xy}^a, \quad (14)$$

$$\Phi_z = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial X},$$

где  $\rho J$  — удельный момент инерции осредненного блока (значения  $J$  имеют порядок квадрата радиуса блока);  $M_{xz}$  — моментные напряжения;  $\Phi_z$  — вектор среднего макроповорота (связан с вращением некоторого объема, содержащего несколько блоков, как целого);  $\omega_z$  — вектор среднего микроповорота (средний поворот одного блока);  $\sigma_{xy}^a$  — антисимметричная часть тензора напряжений.

Математическая модель замыкается уравнением баланса количества движения

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial X}, \quad (15)$$

где  $\sigma_{xy}$  — тензор напряжений.

Симметричная часть тензора напряжений пропорциональна деформации, а антисимметричная часть — синусу угла поворота [Николаевский, 1996]:

$$\sigma_{xy}^s = G e_{xy}; \quad \sigma_{xy}^a = -N \sin(\omega_z). \quad (16)$$

Тензор моментных напряжений  $M_{xz}$ , которые появляются именно за счет блочной структуры среды, пропорционален градиенту угла поворота:

$$M_{xz} = \Lambda \frac{\partial}{\partial X} (\Phi_z + \omega_z). \quad (17)$$

Подстановка выражений (16) и (17) в уравнения (14), (15) дает

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - C_G^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial X^2} = -\gamma \frac{\partial}{\partial X} \sin(\omega_z), \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi_z + \omega_z) - C_\Lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (\Phi_z + \omega_z) = -\beta \sin(\omega_z), \quad (19)$$

где

$$C_G^2 = \frac{G}{\rho}; \quad C_\Lambda^2 = \frac{\Lambda}{J\rho} = \frac{d_1 G}{d_2 \rho} = \frac{G_*}{\rho_*}; \quad \beta = \frac{N}{J\rho}; \quad \gamma = \frac{N}{\rho}.$$

Здесь  $C_G$  — скорость поперечной сейсмической волны;  $C_\Lambda$  — скорость волны поворотов блоков;  $d_1$  и  $d_2$  — внутренние масштабы;  $G_*$  и  $\rho_*$  — эффективные жесткость и плотность фрагментированного горного массива.

Введение бегущей координаты  $\xi = x - Vt$  и обозначений  $u_y \equiv u$  и  $\omega_z \equiv \omega$  в пренебрежении макроповоротом  $\Phi_z$  приводит систему уравнений (18), (19) к виду

$$(V^2 - C_G^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\gamma \sin(\omega), \quad (20)$$

$$(V^2 - C_\Lambda^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \beta \sin(\omega) = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) является уравнением sin-Гордона и обладает солитонными решениями в виде кинка (рис. 5, а).

$$\text{При } V > C_\Lambda : \omega = \pm \left[ 4 \operatorname{arctg} \left( \exp \left( \frac{\xi}{\sqrt{V^2 - C_\Lambda^2}} \sqrt{\beta} \right) \right) - \pi \right].$$

$$\text{При } V < C_\Lambda : \omega = \pm 4 \operatorname{arctg} \left( \exp \left( \pm \frac{\xi}{\sqrt{C_\Lambda^2 - V^2}} \sqrt{\beta} \right) \right).$$

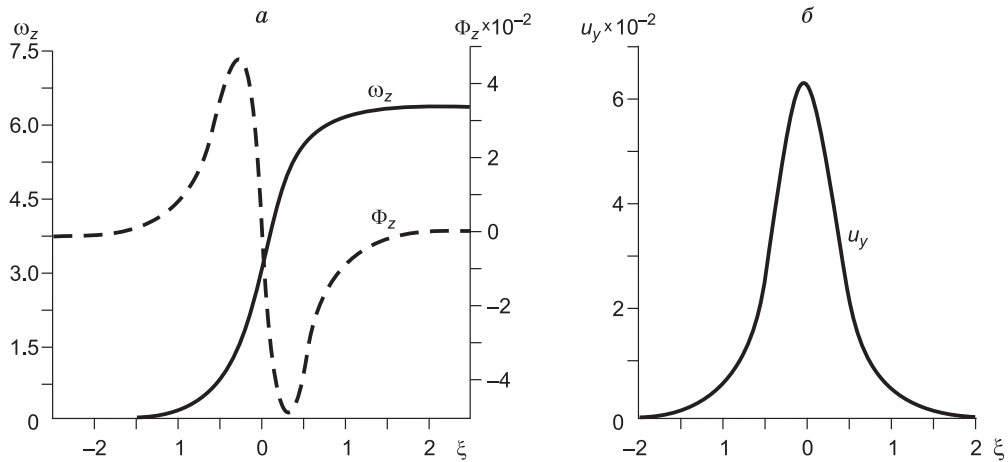
Выражения для смещения  $u$  и скорости микроповорота  $\omega$ , имеют вид

$$u = 2 \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{C_\Lambda^2 - V^2}}{C_G^2 - V^2} \times \operatorname{sech} \left( \frac{\xi}{\sqrt{C_\Lambda^2 - V^2}} \sqrt{\beta} \right). \quad (22)$$

$$\omega = \frac{-2V\sqrt{\beta}}{\sqrt{C_\Lambda^2 - V^2}} \times \operatorname{sech} \left( \frac{\xi}{\sqrt{C_\Lambda^2 - V^2}} \sqrt{\beta} \right). \quad (23)$$

Расчеты при характерных значениях параметров земной коры и размерах блоков  $R = 100$  м дают скорость поворотной волны порядка нескольких километров в год, т.е. причиной возникновения данного типа волн деформации (уединенных тектонических волн) действительно могут быть повороты блоков (фрагментов) земной коры.

Расчеты на основе системы уравнений (18), (19) показали, что движение медленной волны поворотов сопровождается перемещением «связанной» уединенной поперечной волны смещений (22) (см. рис. 5, б) с такой же малой скоростью  $V$ .



**Рис. 5. График солитонного решения уравнения sin-Гордона в виде «ступеньки» («кинка») для микроповоротов  $\omega_z$  (сплошная линия) при  $V < C_\Lambda$  (а) и соответствующее ему решение для поперечного смещения  $u_y$  (б).**

Штриховой линией отмечена производная  $\partial u_y / \partial x$  [Михайлов, Николаевский, 2000].



**ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ  
В ЗОНАХ ТРАНСФОРМНЫХ РАЗЛОМОВ**

В статье [Gershenzon et al., 2009] разработана модель деформационных процессов на границе плит в зонах трансформных разломов. Модель соответствует ситуации, когда при постоянной тектонической нагрузке возбуждаются неупругие волны деформации, возникает периодическое кратковременное медленное скольжение на контакте плит. Предполагается, что перемещение плиты вдоль разлома происходит вследствие движения дислокаций вдоль границы плиты (термин «дислокация» используется здесь в представлении модели Френкеля—Конторовой). Сдвиг дислокации может ослабить деформацию и напряжение. Средняя плотность дислокаций пропорциональна средней деформации на границе плиты, а средняя скорость дислокаций соответствует скорости волны деформации. Модель описывает состояния разлома, соответствующие всем стадиям сейсмического цикла: межсейсмической, предсейсмической, косейсмической и постсейсмической.

Если на плоскости разлома, относительно которой смещается плита, есть неоднородности только малых размеров (шероховатости), то дислокации перемещаются устойчиво, движение плиты квазинепрерывно. Такое состояние соответствует крипу. Наличие крупных шероховатостей («зацеплений») способствует накоплению дислокаций в отдельных сегментах разлома. Если превышена пороговая величина напряжения, то состояние квазиравновесия становится неустойчивым и энергия взаимодействия дислокаций преобразовывается в энергию движения плиты вдоль разлома. Это состояние соответствует землетрясению. Последующее распространение дислокаций (волны деформации) вызывает постсейсмическое скольжение (afterslip) и генерирует афтершоки.

Модель соответствует классическому уравнению sin-Гордона (24), одним из решений которого являются медленные кноидальные волны (25) — последовательность импульсов с пространственным периодом  $2m(1-\beta^2)^{1/2} K(m)$ , где  $K(m)$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $m$  — модуль эллиптической функции Якоби:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \sin \varphi, \quad (24)$$

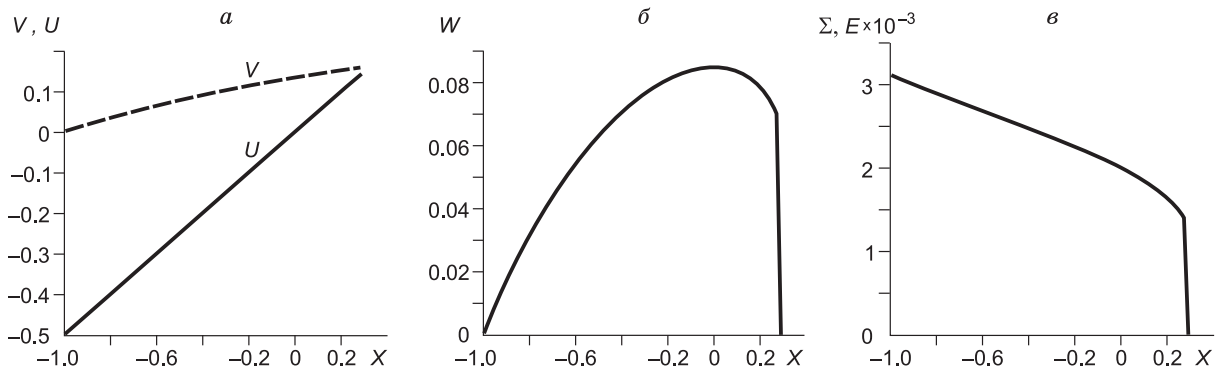
$$\varphi = 2\pi u/b, \quad \tau = tcA/b, \quad \eta = xA/b, \quad \varepsilon = \partial\varphi/\partial\eta, \quad w = \partial\varphi/\partial\tau, \quad k = \frac{\pi\beta}{2K},$$

$$\varphi = \varphi(\theta), \quad \theta = k\xi, \quad \xi = \eta - U\tau,$$

$$\varphi = \arcsin[\pm \operatorname{cn}(-\beta\xi)], \quad \varepsilon \equiv \sigma = 2\beta \cdot \operatorname{dn}(\beta\xi), \quad w = U\sigma, \quad (25)$$

$$\beta = [m(1-U^2)]^{-1/2}, \quad |U| < 1, \quad 0 \leq m \leq 1,$$

$u$  — смещение плиты;  $t$  — время;  $b$  — характерный размер «зацеплений» на плоскости разлома;  $c$  — скорость продольной волны в земной коре;  $\rho$  — плотность геоматериала;  $A$  — безразмерный эмпирический коэффициент;  $\varepsilon, \sigma$  — безразмерные деформация и напряжения ( $xx$  — компонента тензора);  $w$  — безразмерная скорость «зацепления»;  $U$  — безразмерная скорость (в единицах  $c$ );  $k$  — волновое число (в единицах  $A/b$ ).



**Рис. 6.** Зависимость фазовой скорости  $V(x)$  (в единицах  $c$ ), скорости дислокаций  $U(x)$  (в единицах  $c$ ) (а); скорости плиты  $W$  (в единицах  $cA/2\pi$ ) (б); напряжения  $\Sigma(x)$  (в единицах  $\rho c^2 A/2\pi$ ) и деформаций  $E(x)$  (в единицах  $A/2\pi$ ) (в) от расстояния  $X$  (в единицах  $0.5ct$ ) до гипоцентра в течение землетрясения [Gershenzon et al., 2009].

Из решений модели (24) следует, что скорость волн напряжения является почти экспоненциальной функцией плотности дислокаций (или напряжения) (рис. 6, а). Величина скорости волн изменяется от нескольких км/с во время землетрясения до 10 км/сут, 10—100 км/год в течение постсейсмической и межсейсмической стадий сейсмического цикла. На рис. 6 представлены расчетные значения фазовой скорости  $V(x)$ , скорости волны деформации  $U(x)$ , скорости плиты  $W$ , напряжения  $\Sigma(x)$  и деформаций  $E(x)$  на различных расстояниях  $x$  от «эпицентра землетрясения».

Расчеты показывают, что скорость неупругих волн деформации после землетрясения обратно пропорциональна времени. Число афтершоков уменьшается со временем по этой же зависимости (закон Омори). Отсюда следует физическая интерпретация фундаментального эмпирического закона Омори: афтершоки вызываются волнами деформации, генерируемыми землетрясением.

### ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ SIN-ГОРДОНА В МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ РАЗЛОМОВ И ДЕФОРМАЦИОННЫХ ВОЛН

В этом разделе представлены различные варианты возмущенного уравнения sin-Гордона и соответствующие им точные аналитические и численные решения, которые применены для моделирования динамики разломов и деформационных волн. Подробное описание моделей и результатов расчетов можно найти в публикациях [Быков, 2000б, 2001а,б; Вуков, 2006, 2008].

**Уединенные волны в разломе земной коры.** В статье [Быков, 2000б] представлена модель изменения режима скольжения по разлому и генерирования деформационных волн, соответствующая возмущенному уравнению sin-Гордона. Смена режимов скольжения «управляется» параметром трения, зависящим от размеров зерен шероховатости, вязкости и толщины межзернового прослоя. Предположения о периодическом расположении зерен шероховатости по разлому, об отсутствии «зацеплений» (asperity) в разломе и пропорциональности силы трения  $F_r$  квадрату скорости  $\partial U/\partial \eta$  сдвигового течения вещества прослойки позволяют получить точные аналитические решения возмущенного уравнения sin-Гордона в виде медленных кноидальных и уединенных волн. Справедливость соотношения  $F_r \sim (\partial U/\partial \eta)^2$  физически и математически обоснована в [Быков, 1999, 2000б].

При указанных предположениях и введении в качестве источника энергии безразмерной тектонической силы  $\sigma = F_{\text{tect}}/mg$  математическая модель соответствует возмущенному уравнению sin-Гордона (26) [Быков, 2000б]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \sin U + \alpha_0 \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 - \sigma(\eta), \quad (26)$$

$$U = 2\pi \frac{u}{a}, \quad \xi = \frac{\pi x}{ap}, \quad \eta = \frac{\pi \omega_0 t}{p}, \quad p^2 = \frac{a^2 D_t}{4mgh}, \quad \omega_0^2 = \frac{D_t}{m}, \quad \alpha_0 = \frac{9}{8\pi} \frac{a\mu}{d\delta\rho(gh)^{1/2}},$$

где  $u$  — смещение блоков, расположенных по длине разлома;  $a$  — расстояние между центрами блоков;  $D_t$  — тангенциальная контактная жесткость;  $m$  — масса блока;  $h$  — расстояние между соседними слоями блоков;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\mu$  — вязкость прослойки между блоками;  $d$  — диаметр кругового контакта блоков;  $\delta$  — толщина прослойки;  $\rho$  — плотность материала блока;  $\alpha_0$  — параметр трения;  $\sigma(\eta)$  — функция, отражающая внешнее воздействие на контакт бортов разлома.

Уравнение (26) по структуре совпадает с уравнением динамики отдельного флюксона в джозефсоновской линии передачи с диссипацией и источником энергии [Парментье, 1981]. Решениями уравнения (26) в форме бегущей волны  $U = U(\tau) = U(\xi - \beta\eta)$  ( $\beta = (n^2 - 1)^{1/2}/n$  — безразмерная скорость;  $n > 1$  — постоянная разделения) являются функции [Быков, 2000б]:

$$U = \arcsin \sigma_0 + 2 \arcsin \left[ \text{cn} \left( \frac{1}{k} \left( \frac{\sigma_0}{2\alpha_0\beta^2} \right)^{1/2} (\tau - \tau_0); k \right) \right], \quad (27)$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial \eta} = \pm \frac{\beta}{\pi k (1 - \beta^2)^{1/2}} \text{dn} \left[ \frac{1}{k} \left( \frac{\sigma_0}{2\alpha_0\beta^2} \right)^{1/2} (\tau - \tau_0); k \right], \quad (28)$$

$$k = \left( \frac{2\sigma_0}{\sigma + \sigma_0} \right)^{1/2}, \quad \sigma_0 = \frac{2\alpha_0^2}{((1 - \beta^2)^2 + 4\alpha_0^2\beta^2)^{1/2}}.$$

Решение (28) представляет собой медленные кноидальные волны. Отсюда следует, что модель (26) соответствует ситуации, когда независимо от типа источника энергии  $\sigma$  (постоянная тектоническая нагрузка или внешнее воздействие) разломная геосреда формирует последовательность одиночных импульсов с пространственным периодом, определяемым реологическими параметрами разломной зоны. Это может приводить к периодическому скольжению по разлому, вызывающему как обычные, так и «медленные» землетрясения.

При  $\sigma \rightarrow \sigma_0$  модуль эллиптической функции  $k \rightarrow 1$  и возникает предельно нелинейный случай, когда периодические волны (27) превращаются в движущиеся уединенные волны:

$$U = \arcsin \sigma_0 + 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \left( \frac{\sigma_0}{2\alpha_0 \beta^2} \right)^{1/2} (\tau - \tau_0) \right) \right]. \quad (29)$$

Полагая, что произвольная постоянная  $\tau_0 = 0$  и переходя к параметрам исходного уравнения (26), запишем решение (29) и его производную  $v(x, t) = \partial u / \partial t$  в виде

$$u(x, t) = \frac{a}{2\pi} \arcsin \left[ \frac{2\alpha_0 (n^2 - 1)}{(1 + 4\alpha_0^2 n^2 (n^2 - 1))^{1/2}} \right] + \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \frac{x - V_\alpha t}{\Delta} \right) \right], \quad (30)$$

$$v(x, t) = \frac{2n(gh)^{1/2}}{a\omega_0} V_\alpha \operatorname{sech} \left( \frac{x - V_\alpha t}{\Delta} \right), \quad (31)$$

$$V_\alpha = a \left( \frac{D_t}{m} \right)^{1/2} \frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{n(1 + 4\alpha_0^2 n^2 (n^2 - 1))^{1/4}}, \quad (32)$$

$$\Delta = \frac{a^2 \omega_0}{2\pi n (gh)^{1/2}}.$$

При отсутствии трения ( $\alpha_0 = 0$ ) решение уравнения (26) совпадает с решением классического уравнения  $\sin$ -Гордона.

Профиль скорости  $v(x, t)$  колебания частиц на поверхности разлома имеет форму солитона (31), движущегося по разлому со скоростью  $V_\alpha$  (32). Если параметр трения  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , то (32) принимает вид

$$V = \frac{a}{2r} \left( \frac{3D_t}{\pi r \rho_s} \right)^{1/2} \frac{(n^2 - 1)}{n},$$

что совпадает со скоростью уединенной волны, бегущей в плоскости скольжения в зернистой среде без трения [Быков, 1996].

Основные результаты расчетов по (26) сводятся к следующему. Скорость подвижки (31) зависит от параметра трения  $\alpha_0$ , который «управляет» сменой режимов скольжения: при  $\alpha_0 \rightarrow 0$  скорость и амплитуда солитона  $v(x, t)$  резко возрастают. С одной стороны, величина скорости  $v$  зависит от состояния контакта — параметра  $\alpha_0$ , а с другой — рост  $v$  способствует ослаблению самого контакта. Это соответствует нелинейному характеру деформационного процесса.

Из расчетов по (31) при характерных физических параметрах следует, что если значение  $V_\alpha$  мало, то  $v$  — незначительно и фиксируется устойчивое скольжение без заметного ослабления контакта (режим крипа). При относительно больших скоростях  $V_\alpha$  порядка  $10^2$ — $10^3$  м/с получаем  $v \sim 0.1$ — $1$  м/с и резкое увеличение смещения  $u(x, t)$  до  $0.1$ — $1.0$  м, что согласуется с результатами измерений вблизи разломов при землетрясениях. Рассчитанные скорости  $V_\alpha$  уединенных волн при непрерывном скольжении близки к скоростям деформационных волн порядка  $10$ — $100$  км/год.

Уединенные волны ослабляют контакт, что при неизменной нагрузке приводит к смещению бортов разлома — динамической подвижке. По своей природе эти волны аналогичны волнам скольжения различного типа, наблюдаемым на контакте блоков горных пород перед их относительным смещением [Вуков, 2008].

**Волны активизации разломов земной коры.** В работах [Быков, 2000в; Вуков, 2006] показано, что возмущенное уравнение  $\sin$ -Гордона может быть применено для моделирования особенностей динамики разломов. Действительно, внесение возмущения в виде трения и неоднородности в уравнение  $\sin$ -

Гордона дает такие решения типа уединенных волн, которые допустимо интерпретировать как волны активизации разломов. Эти волны представляют локализованную на мезоуровне деформацию, распространяющуюся вдоль разлома в виде уединенной волны со скоростью, определяющей режим скольжения в разломе.

Модель включает три важнейших механизма взаимодействия бортов разлома: трение, геометрическую неоднородность и внешнюю нагрузку. Результирующая модель эквивалентна следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \sin U + \alpha \frac{\partial U}{\partial \eta} + \gamma(\xi) \delta(\xi - L) \sin U + \sigma(\eta), \quad (33)$$

$$U = 2\pi \frac{u}{a}, \quad \xi = \frac{\pi x}{ap}, \quad \eta = \frac{\pi \omega_0 t}{p}, \quad p^2 = \frac{a^2 D_t}{4mgh}, \quad \omega_0^2 = \frac{D_t}{m},$$

$$\alpha \approx \frac{a\mu}{d\Delta\rho_s (gh)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{H}{L}.$$

Здесь  $u$  — смещение блоков, расположенных периодически по длине разлома;  $a$  — расстояние между центрами блоков;  $D_t$  — тангенциальная контактная жесткость;  $m$  — масса блока;  $h$  — расстояние между соседними слоями блоков;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\mu$  — вязкость прослойки между блоками;  $d$  — диаметр кругового контакта блоков;  $\Delta$  — толщина прослойки;  $\rho_s$  — плотность материала блока;  $\alpha, \gamma$  — параметры трения и неоднородности;  $H, L$  — высота шероховатостей и расстояние между ними, нормированные на  $ap/\pi$ ;  $\delta(\xi)$  — дельта-функция Дирака;  $\sigma(\eta)$  — функция, отражающая внешнее воздействие на контакт бортов разлома.

В правой части (33) первое слагаемое соответствует «восстанавливающей» силе, возникающей при сдвиге вдоль синусоидальной поверхности бортов разлома; второе — силе трения, пропорциональной скорости относительного смещения; третье — поправкам на точечные неоднородности, распределенные на расстояниях  $apL/\pi$ .

Параметр трения  $\alpha$  зависит от средних размеров блоков на плоскости скольжения и вязкости прослойки и принимает значения 0.01—1.0. Коэффициент неоднородности  $\gamma$  равен отношению высоты  $H$  шероховатости к длине  $L$  участка синусоидально-однородной поверхности. Изменение коэффициента неоднородности  $\gamma$  возможно в диапазоне от 0 до 1.0. Предельные величины означают полное отсутствие «зацеплений», выделяющихся на синусоидальной поверхности ( $\gamma = 0$ ), либо совпадение высоты шероховатости с амплитудой указанной синусоиды ( $\gamma = 1.0$ ).

Интегрирование уравнения (33) осуществлялось методом Мак-Лафлина—Скотта [Мак-Лафлин, Скотт, 1981; Solerno et al., 1983], а численная реализация проводилась по схеме Рунге—Кутты—Фельберга [Форсайт и др., 1980]. Расчеты выполнены при варьировании параметров трения  $\alpha$  и неоднородности  $\gamma$ , а также величины  $\sigma(\eta)$ , определяющей внешнюю нагрузку.

Основные результаты исследований с применением модели (33) сводятся к следующему. Профиль скорости  $v$  «массовой» частицы (рис. 7) на поверхности бортов разлома имеет форму солитона  $v(x, t) = v_{\max} \operatorname{sech}(x - V_\alpha t)$ , движущегося вдоль разлома со скоростью  $V_\alpha$ . Варьирование параметра трения  $\alpha$  в уравнении  $\sin$ -Гордона существенно проясняет как причины изменения скорости  $V_\alpha$  уединенной волны в разломе, так и связанные с этим последствия. Величина скорости  $v$  зависит от состояния контакта, т.е. значения параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ . Из расчетов следует, что если значение  $V_\alpha$  мало, то  $v$  — незначительно и происходит устойчивое медленное (криповое) скольжение. При скоростях  $V_{\alpha \max}$  порядка 1—10 м/с получаем солитонный профиль скорости смещения бортов разлома  $v \sim 0 < 1 - 1$  м/с и ступенчатый профиль смещения (кинк)  $u(x, t)$  (см. рис. 7). Такое поведение динамических параметров качественно совпадает с аналитическими решениями предыдущей модели (26). Более того,

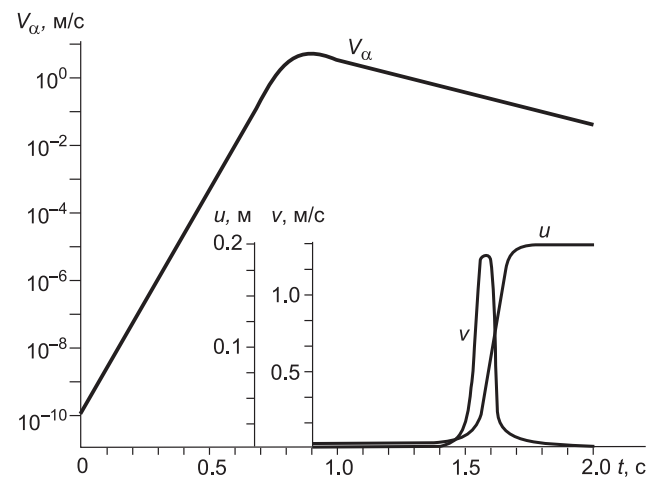
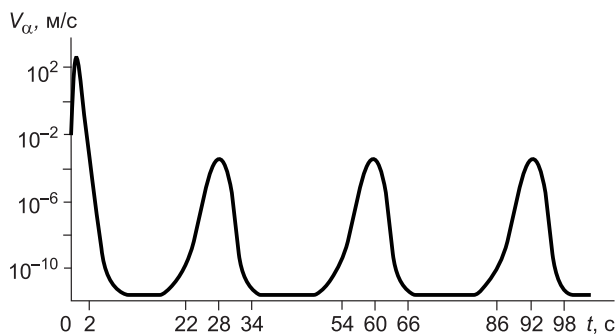


Рис. 7. Эволюция скорости  $V_\alpha$  волны активизации, подвижки  $u$  и скорости подвижки  $v$  в разломе [Быков, 2000в].



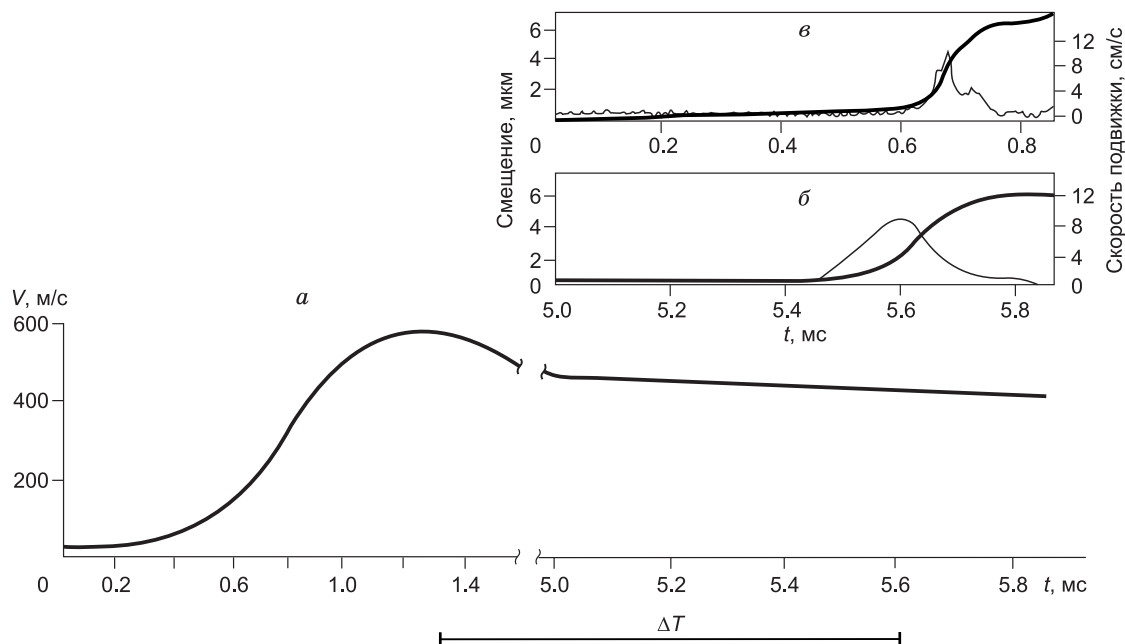
**Рис. 8.** Эволюция скорости  $V_\alpha$  уединенной волны при периодически изменяющемся параметре трения,  $\sigma(\eta) = 0$ ,  $\alpha_0 = 0,02$ ,  $\alpha_1 = 0,01$ ,  $\tau = 10^3$  с,  $\mu = 0,9$  [Быков, 2000в].

Эволюция скорости  $V_\alpha$  волны активизации разлома при дополнении параметра трения  $\alpha$  некоторой периодически изменяющейся составляющей  $\alpha_1$  соответствует режиму циклического внесения возмущения в некоторые сегменты разлома. Тогда параметр  $\alpha$  в уравнении (33) переходит в  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(\eta/\tau)$ , где  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\tau$  — некоторые постоянные. Результаты расчетов представлены на рис. 8. При определенных параметрах трения  $\alpha$  и неоднородности  $\gamma$  уединенная волна «выходит» на стационарный режим со значениями  $V_\alpha \sim 10^{-4} - 10^{-1}$  м/с или от 3 км/год до 10 км/сут, соответствующими деформационным волнам. Эти волны мигрируют по разлому и могут быть триггером сейсмических событий.

Внешнее инициирующее воздействие на разлом можно моделировать включением в уравнение (33) безразмерной функции  $\sigma(\tau) = \sigma_0 \sin(\Omega\tau)$ , где  $\sigma_0$ ,  $\Omega$  — амплитуда и частота внешней нагрузки, при постоянном параметре трения  $\alpha$ . Из расчетов следует, что время задержки инициированной динамической подвижки уменьшается при увеличении амплитуды внешнего воздействия. Количество подвижек пропорционально амплитуде нагрузки. С увеличением частоты синусоидальной нагрузки количество подвижек растет, а интервал времени между последовательными подвижками уменьшается, что соответствует натурным экспериментам [Ружич и др., 1999].

Результаты математического моделирования вибрационного инициирования неустойчивой подвижки по контакту блоков горных пород на основе уравнения (33) [Быков, 2001б] находятся в хорошем согласии с данными выполненных позднее лабораторных экспериментов [Savage et al., 2007; Johnson et al., 2008].

Следует отметить важное обстоятельство. Уравнение sin-Гордона (33) для разломно-блоковой геосреды учитывает все ведущие факторы (трение, шероховатость, «зацепление»), которые в тот или иной



**Рис. 9.** Переход от ускоряющего скольжения к динамической подвижке:

$a$  — скорость уединенной волны скольжения  $V_\alpha$ ;  $b$ ,  $v$  — смещение (жирная линия) и скорость подвижки  $v$  (тонкая линия).  $\Delta T$  — временной интервал между максимумами  $V_\alpha$  и  $v$ .  $a$ ,  $b$  — расчет [Быков, 2001а];  $v$  — данные эксперимента [Shibazaki, Matsu'ura, 1998].



отрезок времени управляют процессом неустойчивого скольжения по разлому. Это уравнение не содержит никаких величин, кроме тех, которые можно измерить на опыте. Уравнение позволяет объяснить и предсказать (вычислить) физически определяемые характеристики неустойчивого скольжения. Каждый член этого уравнения имеет ясный физический смысл. Применение возмущенного уравнения sin-Гордона для воспроизведения наблюдаемых эффектов неустойчивого скольжения на контакте блоков горных пород подтверждает его эффективность (рис. 9) [Быков, 2001a].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель статьи состояла в том, чтобы обеспечить последовательный обзор успехов в теоретических исследованиях уединенных волн деформации, внесших значительный вклад, прежде всего, в решение фундаментальной проблемы переноса напряжений в блочных (фрагментарных) геосредах и деформационных волн Земли.

По физическому механизму распространения деформационные волны Земли подобны обычным сейсмическим волнам, но их принципиальное отличие заключается в сверхмалых скоростях  $V \sim n \cdot 10$  км/год, сверхнизких частотах  $f \sim n \cdot 10^{-7}$  Гц, и большой длине  $\lambda \sim n \cdot 10$  км ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Эти особенности затрудняют прямые инструментальные наблюдения эффектов распространения волн деформации.

Многочисленные результаты наблюдений миграции сейсмичности сложно объяснить какими-либо другими причинами, кроме волнообразных изменений глобальных и локальных полей напряжений [Шерман, 2007; Шерман, Горбунова, 2008] или автоволновыми деформационными процессами в разломных зонах [Кузьмин, 2012].

Поиски причин возбуждения волн деформации привели к построению моделей, соответствующих уравнению sin-Гордона, которые позволили наметить механизмы, порождающие волны миграции землетрясений и получить сверхнизкие скорости волн деформации. Впервые это было выполнено В.Н. Николаевским в 1995 г. на основе уравнения sin-Гордона для блочной среды, сконструированного при использовании элементов механики Коссера (как альтернативы моделей вязкоупругости и упругопластичности). Это дало возможность объяснить медленное перераспределение напряжений в земной коре за счет волн деформации (отдельных скачков или уединенных волн), движущихся со скоростями на много порядков меньшими, чем скорости обычных сейсмических волн [Николаевский, 1995].

Выявлены различные механизмы возбуждения деформационных волн, обусловленные вращением блоков и микроплит, относительным смещением блоков в разломных зонах земной коры, трансформных разломах, зонах коллизии и субдукции литосферных плит, неравномерностью вращения Земли [Быков, 2005]. Проверка этих моделей, по-видимому, должна сводиться к поиску эффектов, которые можно было бы обнаружить в лабораторных экспериментах и геофизических полях.

В частности, приведенные в этом обзоре теоретические достижения могут быть применены в бурно развивающейся новой ветви науки — ротационной сейсмологии [Earthquake Source..., 2006; Teisseyre, 2009] для объяснения фиксируемых эффектов. И наоборот, результаты ротационной сейсмологии (см., например [Rotational seismology..., 2009]) необходимо использовать для анализа адекватности построенных моделей.

Вторая проблема, успешно развиваемая с применением уравнения sin-Гордона, связана с исследованием тектонической активности особого типа — «медленных землетрясений». Медленное скольжение по разлому и сейсмический тремор (episodic tremor and slow slip — ETS), сопровождающие «медленные землетрясения», наблюдались в Тихоокеанских зонах субдукции, в разломе Сан-Андреас [Schwartz, Rokosky, 2007]. ETS возникают с замечательной регулярностью: в различных зонах субдукции интервал повторяемости составляет от 3 до 18 мес. Миграция тремора вдоль разломов происходит со скоростью, изменяющейся от 5 до 16 км/сут, и в среднем равна 10 км/сут [Rogers, Dragert, 2003].

Что контролирует скорость миграции тремора и почему в различных зонах субдукции, удаленных друг от друга на многие тысячи километров, скорости миграции практически одинаковы, а интервал повторяемости существенно различный? Можно ожидать, что ответы на эти вопросы и построение адекватного механизма миграции ETS связаны, прежде всего, с установлением причин периодичности их возникновения и миграции ETS со скоростью порядка 10 км/сут.

Тремор и медленное скольжение, развивающиеся на границе плит в зонах субдукции и трансформных разломов, могут служить новым проявлением и признаком деформационных волн Земли.

Несмотря на большие успехи в теоретических исследованиях, здесь остаются проблемы, требующие дальнейшего развития и анализа. Представленные в обзоре механизмы генерации деформационных волн еще недостаточно разработаны, для точного расчета динамических характеристик этих волн следует определить реальные значения ряда введенных в модели параметров.

Дальнейшее математическое моделирование деформационных волн Земли с применением уравнения sin-Гордона необходимо для определения оптимальных условий их наблюдения, выявления основ-



ных физических механизмов, вызывающих сейсмическую миграцию и генерацию сигналов различного происхождения, сопровождающих волны деформации на различных масштабных уровнях.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 4 (проект ДВО РАН 12-И-П4-07) и гранта РФФИ-JSPS (проект 13-05-92101 ЯФ\_а).

#### ЛИТЕРАТУРА

**Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Павлов Ю.В.** Решения трехмерного уравнения синус-Гордона // Теоретическая и математическая физика, 2009, т. 158, № 3, с. 370—377.

**Браун О.М., Кившарь Ю.С.** Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения. М., Физматлит, 2008, 536 с.

**Быков В.Г.** О возможности формирования уединенных сейсмических волн в зернистых геоматериалах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1996, № 2, с. 31—35.

**Быков В.Г.** Уединенные сдвиговые волны в зернистой среде // Акустический журнал, 1999, т. 45, № 2, с. 169—173.

**Быков В.Г.** Нелинейные волновые процессы в геологических средах. Владивосток, Дальнаука, 2000а, 190 с.

**Быков В.Г.** Уединенные волны в разломе земной коры // Вулканология и сейсмология, 2000б, № 6, с. 49—54.

**Быков В.Г.** Волны активизации разломов земной коры // Тихоокеанская геология, 2000в, т. 19, № 1, с. 104—108.

**Быков В.Г.** Модель неустойчивого скольжения по разрыву в образцах горных пород // Физика Земли, 2001а, № 6, с. 52—57.

**Быков В.Г.** Нелинейная математическая модель вибрационного инициирования неустойчивой подвижки по неровному контакту блоков горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 2001б, № 2, с. 10—15.

**Быков В.Г.** Деформационные волны Земли: концепция, наблюдения и модели // Геология и геофизика, 2005, т. 46 (11), с. 1176—1190.

**Викулин А.В.** Энергия и момент силы упругого ротационного поля геофизической среды // Геология и геофизика, 2008, т. 49 (6), с. 559—570.

**Гарагаш И.А.** Микродеформации предварительно напряженной дискретной геофизической среды // Докл. РАН, 1996, т. 347, № 1, с. 95—98.

**Гарагаш И.А., Николаевский В.Н.** Механика Коссера для наук о Земле // Вычислительная механика сплошных сред, 2009, т. 2, № 4, с. 44—66.

**Горбунова Е.А., Шерман С.И.** Медленные деформационные волны в литосфере: фиксирование, параметры, геодинамический анализ (Центральная Азия) // Тихоокеанская геология, 2012, т. 31, № 1, с. 18—25.

**Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., Мир, 1988, 694 с.

**Конторова Т.А., Френкель Я.И.** К теории пластической деформации и двойникования // ЖЭТФ, 1938, т. 8, вып. 1, с. 89—95.

**Кузьмин Ю.О.** Деформационные автоволны в разломных зонах // Физика Земли, 2012, № 1, с. 3—19.

**Лэм Дж.** Введение в теорию солитонов. М., Мир, 1983, 294 с.

**Мак-Лафлин Д., Скотт Э.** Многосолитонная теория возмущений // Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М., Мир, 1981, с. 210—268.

**Михайлов Д.Н., Николаевский В.Н.** Тектонические волны ротационного типа с излучением сейсмических сигналов // Физика Земли, 2000, № 11, с. 3—10.

**Николаевский В.Н.** Математическое моделирование уединенных деформационных и сейсмических волн // Докл. РАН, 1995, т. 341, № 3, с. 403—405.

**Николаевский В.Н.** Геомеханика и флюидодинамика. М., Недра, 1996, 447 с.

**Николаевский В.Н.** Упруговязкие модели тектонических и сейсмических волн в литосфере // Физика Земли, 2008, № 6, с. 92—96.

**Парментье Р.** Флюксоны в распределенных джозефсоновских контактах // Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М., Мир, 1981, с. 185—209.

**Ружич В.В., Трусков В.А., Черных Е.Н., Смекалин О.П.** Современные движения в зонах разломов Прибайкалья и механизмы их инициирования // Геология и геофизика, 1999, т. 40 (3), с. 360—372.

- Сибиряков Б.П., Подбережный М.Ю.** Неустойчивость структурированных сред и некоторые сценарии развития катастроф // Геология и геофизика, 2006, т. 47 (5), с. 684—694.
- Сибиряков Б.П., Прилоус Б.И., Копейкин А.В.** Природа неустойчивости блочных сред и закон распределения неустойчивых состояний // Физическая мезомеханика, 2012, т. 15, № 3, с. 11—21.
- Скотт Э.** Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. М., Физматлит, 2007, 560 с.
- Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977, 622 с.
- Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М., Мир, 1980, 279 с.
- Шерман С.И.** Новые данные о закономерностях активизации разломов в Байкальской рифтовой системе и на сопредельной территории // Докл. РАН, 2007, т. 415, № 1, с. 110—114.
- Шерман С.И., Горбунова Е.А.** Волновая природа активизации разломов Центральной Азии на базе сейсмического мониторинга // Физическая мезомеханика, 2008, т. 11, № 1, с. 115—122.
- Шерман С.И., Лысак С.В., Горбунова Е.А.** Тектонофизическая модель Байкальской сейсмической зоны, ее тестирование и возможности среднесрочного прогноза землетрясений // Геология и геофизика, 2012, т. 53 (4), с. 508—526.
- Braun O.M., Kivshar Y.S.** Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model // Phys. Rep., 1998, v. 306, p. 1—108.
- Bykov V.G.** Solitary waves in crustal faults and their application to earthquakes // Earthquake source asymmetry, structural media and rotation effects / Eds. R. Teisseyre, M. Takeo, E. Majewski. Springer Verlag, Berlin, 2006, p. 241—253.
- Bykov V.G.** Stick-slip and strain waves in the physics of earthquake rupture: experiments and models // Acta Geophys., 2008, v. 56, p. 270—285.
- Di Bartolomeo M., Massi F., Baillet L., Culla A., Fregolent A., Berthier Y.** Wave and rupture propagation at frictional bimaterial sliding interfaces: From local to global dynamics, from stick-slip to continuous sliding // Tribol. Int., 2012, v. 52, p. 117—131.
- Earthquake source asymmetry, structural media and rotation effects** / Eds. R. Teisseyre, M. Takeo, E. Majewski. Springer Verlag, Berlin, 2006, 582 p.
- Gershenson N.I., Bykov V.G., Bambakidis G.** Strain waves, earthquakes, slow earthquakes, and after-slip in the framework of the Frenkel-Kontorova model // Phys. Rev., 2009, E 79, 056601, p. 1—13.
- Gershenson N.I., Bambakidis G., Hauser E., Ghosh A., Greager K.C.** Episodic tremors and slip in Cascadia in the framework of the Frenkel-Kontorova model // Geophys. Res. Lett., 2011, v. 38, L01309, p. 1—5.
- Johnson P.A., Savage H., Knuth M., Gomberg J., Marone C.** Effects of acoustic waves on stick-slip in granular media and implications for earthquakes // Nature, 2008, v. 451, p. 57—60.
- Kivshar Y.S., Malomed B.A.** Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989, v. 61, p. 763—911.
- Majewski E.** Rotational energy and angular momentum of earthquakes // Earthquake source asymmetry, structural media and rotation effects / Eds. R. Teisseyre, M. Takeo, E. Majewski. Springer Verlag, Berlin, 2006a, p. 216—225.
- Majewski E.** Seismic rotation waves: spin and twist solitons // Earthquake source asymmetry, structural media and rotation effects / Eds. R. Teisseyre, M. Takeo, E. Majewski. Springer Verlag, Berlin, 2006b, p. 255—272.
- Nikolaevskiy V.N.** Tectonic stress migration as nonlinear wave process along earth crust faults // Proc. 4th Int. Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks, Gifu, Japan, 28 Sept.—2 Oct. 1997 / Eds. T. Adachi, F. Oka, A. Yashima. A.A. Balkema, Rotterdam, 1998, p. 137—142.
- Pasternak E., Dyskin A.** Measuring of Cosserat effects and reconstruction of moduli using dispersive waves // Mechanics of generalized continua / Eds. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Advances in mechanics and mathematics. Springer, 2010, v. 21, p. 71—78.
- Power W.L., Tullis T.E.** Euclidean and fractal models for the description of rock surface roughness // J. Geophys. Res., 1991, v. 96, p. 415—424.
- Rogers G., Dragert H.** Episodic tremor and slip on the Cascadia subduction zone: the chatter of silent slip // Science, 2003, v. 300, p. 1942—1943.
- Rotational seismology and engineering applications** / Eds. W.H.K. Lee, M. Celebi, M.I. Todorovska, H. Igel. Bull. Seismol. Soc. Am., Spec. Issue, 2009, v. 99, 1486 p.
- Savage H.M., Marone C.** Effects of shear velocity oscillations on stick-slip behavior in laboratory experiments // J. Geophys. Res., 2007, v. 112, B02301, p. 1—15.

**Schwartz S.Y., Rokosky J.M.** Slow slip events and seismic tremor at Circum-Pacific subduction zones // Rev. Geophys., 2007, v. 45, RG3004, p. 1—32.

**Shibazaki B., Matsu'ura M.** Transition process nucleation to high-speed rupture propagation: scaling from stick-slip experiments to natural earthquakes // Geophys. J. Int., 1998, v. 132, № 1, p. 14—30.

**Solerno M., Soerensen M.P., Skovgaard O., Christiansen P.L.** Perturbation theories for sine-Gordone soliton dynamics // Wave Motion, 1983, v. 5, p. 49—58.

**Teisseyre R.** Tutorial on new developments in the physics of rotational motions // Bull. Seismol. Soc. Amer., 2009, v. 99, p. 1028—1039.

**Wu Z.L., Chen Y.T.** Solitary wave in a Burridge-Knopoff model with slip-dependent friction as a clue to understanding the mechanism of the self-healing slip pulse in an earthquake rupture process // Nonlinear Processes Geophys., 1998, v. 5, p. 121—125.

*Рекомендована к печати 21 октября 2014 г.  
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 5 декабря 2013 г.,  
после доработки — 30 мая 2014 г.*