

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНЫХ ЗАТОРОВ

В. И. Одинокоев, А. Н. Прокудин

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре  
E-mail: mail@imim.ru

С использованием теории малых упругих деформаций, уравнений гидродинамики и апробированного численного метода решается осесимметричная задача по определению напряженно-деформированного состояния в сложной многокомпонентной системе при динамическом воздействии на ледяную пластину конечной толщины.

Ключевые слова: разрушение ледяного покрова, напряжения, деформации, динамическое воздействие.

**Введение.** Как известно, в период вскрытия рек, особенно в Сибири, образуются заторы, вызывающие подъемы уровня воды и затопления местности. В настоящее время ликвидация заторов осуществляется путем бомбометания, в процессе которого подо льдом создается динамическая взрывная нагрузка, приводящая к его разрушению. Этот способ оказывает негативное воздействие на водную фауну и требует больших энергетических затрат.

В данной работе строится математическая модель способа разрушения заторов, при котором под лед или его нагромождение заводится устройство, состоящее из двух цилиндров, вложенных один в другой (рис. 1). Дно верхнего цилиндра с большим внутренним диаметром обращено в сторону нижней поверхности льда. В нижнем цилиндре, дно которого обращено в сторону дна водоема, имеются каналы, в которых проходит гибкая система, включающая газовый шланг и электропровод. Плавучесть и маневренность конструкции обеспечивается двигателями и камерой, которая может заполняться водой либо воздухом.

Процесс осуществляется следующим образом.

Под образовавшийся ледяной затор заводится устройство с установленными на нем видеокамерами и двигательными средствами, управляемыми с передвижной станции, находящейся на берегу, с использованием гибкой системы. После установки устройства под ледяной затор в зазор между стаканами со станции по гибкой системе поступает воздушно-газовая смесь (природный газ) определенного объема. Затем по той же системе в свечи подается искровой разряд. Происходит взрыв воздушно-газовой смеси, в результате которого нижний стакан устремляется вниз, а верхний — вверх, разрушая локальную область ледяного затора. Движению нижнего стакана вниз препятствует вода, а, возможно, и дно водоема. Для того чтобы один стакан не выпадал из другого, на их скользящих относительно друг друга поверхностях имеется система ограничений движения по вертикали. После взрыва газ выходит через многочисленные отверстия в стенках стакана, устройство возвращается в исходное положение и перемещается подо льдом в другую область под затором.

**Постановка задачи.** Расчетная схема процесса деформирования представлена на рис. 2. Область I — лед, на который воздействуют давления  $p_1$ ,  $p_2$ , изменяющиеся как по величине, так и по координате  $x_2$ :  $p_1 \geq p_{\text{атм}}$ ,  $p_2 \geq p_{\text{атм}}$  ( $p_{\text{атм}}$  — атмосферное давление).

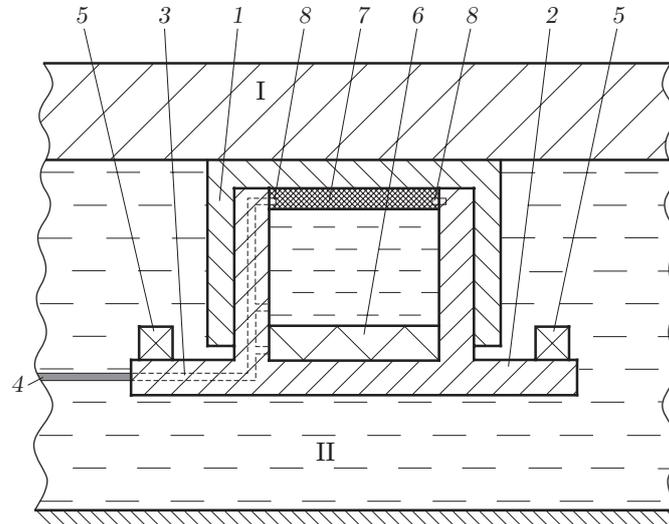


Рис. 1. Схема устройства для разрушения льда:

I — лед; II — вода; 1 — верхний цилиндр; 2 — нижний цилиндр; 3 — каналы; 4 — гибкая система, включающая газовый шланг и электропровод; 5 — двигатели; 6 — камера; 7 — воздушно-газовая смесь; 8 — свечи

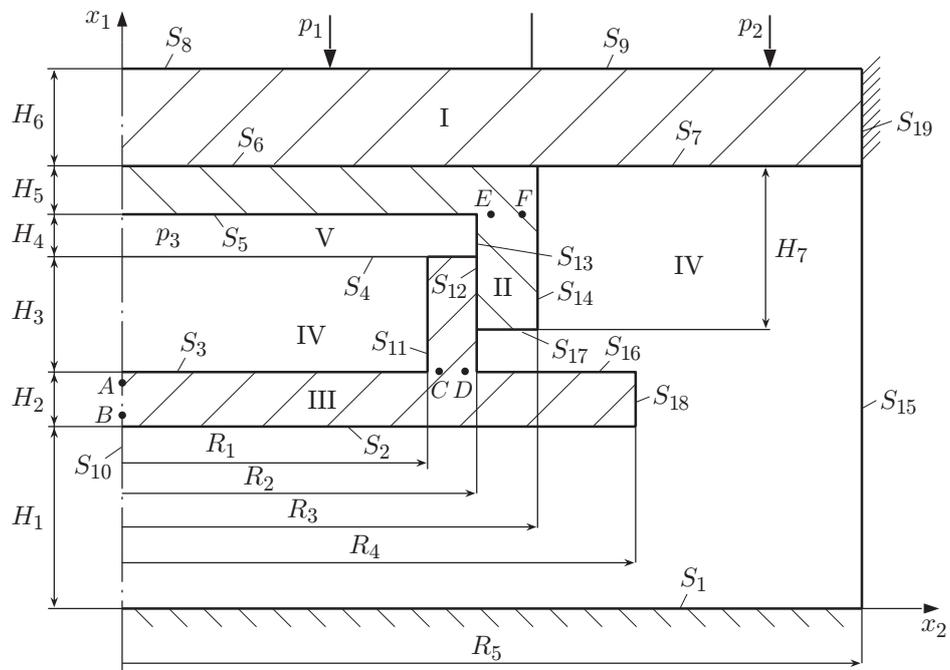


Рис. 2. Расчетная схема процесса деформации:

I — лед; II — верхний стакан; III — нижний стакан; IV — вода; V — газ; A, B, C, D, E, F — точки экстремальных напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$

Использовать только одну функцию внешней нагрузки, например  $p_1 = p_1(x_2)$ , нельзя, так как при  $x_2 = R_3$  функция  $p_1(x_2)$  может претерпевать разрыв. Удобнее ввести еще одну функцию внешнего давления  $p_2|_{x_2 > R_3} = p_2(x_2)$ . Области II, III — верхний и нижний стаканы, область IV — вода, область V — газ, занимающий пространство между двумя стаканами. Периферийная область  $x_2 \geq R_5$  находится на значительном расстоянии от областей II, III:  $R_5 \gg R_4$ . Таким образом, имеем пятикомпонентную систему. Среды, которым соответствуют области I–IV, будем считать изотропными и несжимаемыми, а деформации в областях I–III — малыми. В области V начальное давление  $p_3$  зависит от состава газа, скорости его горения и толщины газовой подушки  $H_4$ .

С учетом сформулированных допущений запишем систему дифференциальных уравнений в декартовой системе координат для соответствующих областей.

Для упругой несжимаемой среды (области I–III) используются следующие уравнения теории упругости при малых деформациях:

— уравнения движения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i^t &= I_i^t, & I_i^t &= \rho_t \frac{dv_i}{d\tau}, \\ \frac{dv_i}{d\tau} &= \dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, & i, j, k &= 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (1)$$

— уравнения состояния (закон Гука)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= 2G_t \varepsilon_{ij}, & \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \\ i &= 1, 2, 3, & \varepsilon_{ij} &= 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}); \end{aligned} \quad (2)$$

— уравнение несжимаемости

$$v_{i,i} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) по повторяющимся индексам проводится суммирование;  $[\sigma_{ij}]$  — тензор напряжений;  $[\varepsilon_{ij}]$  — тензор деформаций;  $\sigma = \sigma_{ii}/3$  — гидростатическое напряжение;  $v_i$  — проекция скоростей перемещений на координатные оси  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $\rho_t$  — плотность материала;  $F_i^t$  — проекция удельной объемной силы на координатные оси  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в соответствующей области  $t = I, II, III$ ;  $\dot{v}_i = \partial v_i / \partial \tau$ ; точка над символом обозначает производную по времени;  $\tau$  — монотонный параметр процесса деформирования;  $G_t$  — модуль сдвига в области  $t$ ;  $I_i^t$  — проекция инерционной силы, отнесенной к единице объема, на координатные оси  $x_i$ ; индекс  $t$  принимает значения I, II, III.

Для малых деформаций справедливы соотношения

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau} = \xi_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \int_{\tau} \xi_{ij} d\tau, \quad \xi_{ij} = 0,5(v_{i,j} + v_{j,i}),$$

где  $\xi_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации  $[\xi_{ij}]$ ;  $v_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j$ .

При дискретном по времени  $\tau$  процессе деформации ( $\tau = \sum \tau_m$ ) имеем выражение для деформации в разностном виде

$$(\varepsilon_{ij})_m \simeq \sum_m (\xi_{ij})_m \Delta\tau_m = (\varepsilon_{ij})_{m-1} + (\xi_{ij})_m \Delta\tau_m,$$

где  $\Delta\tau_m$  — шаги по параметру  $\tau$ ;  $(\xi_{ij})_m$  — компоненты тензора скорости деформации на шаге  $\Delta\tau_m$ ;  $(\varepsilon_{ij})_m$  — компоненты тензора деформации на временном шаге  $m$ ;  $(\varepsilon_{ij})_{m-1}$  — компоненты тензора деформации на временном шаге  $m - 1$ .

Для несжимаемой жидкости:  $\rho = \text{const}$  (области IV) имеет место следующая система уравнений гидродинамики:

— закон количества движения

$$F_i^t - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i = I_i^t, \quad I_i^t = \rho_t \frac{dv_i}{d\tau}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (4)$$

— уравнение несжимаемости

$$v_{i,i} = 0. \quad (5)$$

В (4), (5)  $p = -\sigma$  — давление в данной точке;  $\mu$  — вязкость жидкости,  $\text{г} \cdot \text{с} / \text{см}^2$ ;  $\nabla^2$  — оператор Лапласа:

$$\nabla^2 v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}.$$

Для газа (область V) задается давление  $p_3$ , возникающее в результате горения воздушно-газовой смеси в замкнутом объеме и зависящее от состава газа и скорости его горения. При горении газа происходит химическая реакция с выделением продуктов горения при высокой температуре. Температура горения может составлять более  $2000^\circ\text{C}$  [1], вследствие чего происходит увеличение давления газа в замкнутом объеме. При задании давления  $p_3$  и скорости горения  $v_\Gamma$  используются экспериментальные данные [1]. Время горения определяется толщиной газовой подушки  $H_4$ :  $\tau_\Gamma = H_4/v_\Gamma$ . Процесс является кратковременным (порядка 0,1 с), поэтому можно принять, что после сгорания воздушно-газовой смеси давление зависит только от изменения объема, т. е.  $p_3 V = \text{const}$ .

С учетом осевой симметрии ( $v_3 = 0$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ ) граничные условия (обозначения границ см. на рис. 2) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_i} &= -p_3 \quad (i = 4, 5), & \sigma_{11}|_{S_8} &= -p_1, & \sigma_{11}|_{S_9} &= -p_2, \\ \sigma_{12}|_{S_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 9, 16, 17), & \sigma_{21}|_{S_i} &= 0 \quad (i = 10, \dots, 15, 19), \\ \sigma_{22}|_{S_{13}} &= -p_3, & v_1|_{S_1} &= 0, & v_2|_{S_i} &= 0 \quad (i = 10, 15, 19). \end{aligned} \quad (6)$$

Сцепление ледяной массы (область I на рис. 2) с основой (поверхность  $S_{19}$ ) описывается законом трения в виде

$$\sigma_{21}|_{S_{19}} = -\psi \tau_s v_{\text{ск}} / |v_u|,$$

где  $v_{\text{ск}} = v_1|_{S_{19}} - v_1^*$  — скорость скольжения области I (льда) относительно основы;  $v_1^* = 0$  — скорость основы;  $|v_u|$  — нормирующая скорость;  $\tau_s$  — условный предел текучести льда; коэффициент трения  $\psi$  принимался равным 1000.

Система уравнений для области IV отличается от системы уравнений для областей I–III (за исключением уравнений (3), (5)). Для областей  $t = \text{I}, \dots, \text{IV}$  систему уравнений запишем в виде

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t + k_t \mu \nabla^2 v_i = I_i^t, \quad I_i^t = \rho_t \frac{dv_i}{dt}, \quad k_t = \begin{cases} 0, & t = \text{I}, \text{II}, \text{III}, \\ 1, & t = \text{IV}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G_t \varepsilon_{ij}, \quad G_t = 0 \quad \text{при} \quad t = \text{IV}, \quad \varepsilon_{ij} = \int_\tau \xi_{ij} d\tau, \quad (8)$$

$$\xi_{ij} = 0,5(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_{i,i} = 0.$$

В (7)  $F_1^t = \gamma_1^t$ ;  $F_2^t = 0$ ;  $F_3^t = 0$ ;  $\gamma_1^t$  — удельный вес материала среды в области  $t$ .

Таким образом, при  $k_t = 0$  система (7), (8) совпадает с системой (1)–(3), а при  $k_t = 1$ ,  $G_t = 0$ ,  $t = IV$  — с системой (4), (5). Действительно, если  $G_t = 0$ , то  $\sigma_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ),  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma$ . Поскольку  $\sigma = -p$ , уравнения (7) будут совпадать с уравнениями (4).

Для решения системы дифференциальных уравнений (7), (8) с учетом граничных условий (6) используем численный метод [2, 3], в соответствии с которым область деформирования разбивается на прямые параллелепипеды конечных размеров; для каждого элемента система (7), (8) записывается в разностном виде и решается по разработанному алгоритму с учетом граничных условий (6). В результате получаем поля напряжений  $\sigma_{ij}$  и скоростей перемещений  $v_i$  по граням каждого элемента.

Запись оператора Лапласа для произвольного элемента в ортогональной системе координат получена в работах [2, 3] при выводе уравнения теплопроводности.

В уравнении (7) инерционный член в разностном виде с учетом осевой симметрии имеет вид

$$I_i^t = \rho_t \left( \frac{(v_i)_m - (v_i)_{m-1}}{\Delta\tau_m} + \bar{v}_1 \frac{(\Delta v_i)_1}{\Delta x_1} + \bar{v}_2 \frac{(\Delta v_i)_2}{\Delta x_2} \right), \quad (9)$$

где  $(\Delta v_i)_k$  ( $k = 1, 2$ ) — изменение скорости  $v_i$  вдоль координаты  $\alpha_k$ ;  $\bar{v}_i$  — средние скорости  $v_i$  по элементу, “замороженные” на  $n$ -й итерации:  $(\bar{v}_i)_n = (v_i)_{n-1}$ ;  $(v_i)_m$ ,  $(v_i)_{m-1}$  — средние скорости перемещения по элементу на временных шагах  $\Delta\tau_m$ ,  $\Delta\tau_{m-1}$ .

**Алгоритм решения задачи.** При построении алгоритма решения задачи используется методика, описанная в работах [4, 5].

1. Весь процесс деформации разбивается на  $m$  шагов по времени  $\tau$ .
2. Задаются начальные условия при  $\tau = 0$ , матрица  $G_t$  ( $t = I, \dots, IV$ ) и величины  $v_i|_{m=0} = 0$ ,  $\varepsilon_{ij}|_{m=0}$ .
3. Задается шаг по времени  $\tau = \Delta\tau$ .
4. Исследуемая область деформации разбивается на ортогональные элементы. Рассчитывается матрица длин дуг элементов. Проводится идентификация области по параметру  $k_t$  ( $t = I, \dots, IV$ ).
5. Задаются граничные условия.
6. В формуле (9) задаются значения  $(v_i)_m$  и  $\bar{v}_i$  для каждого элемента. Тогда система уравнений (7), (8), записанная в разностном виде в соответствии с работами [2, 3], будет линейной.
7. Вычисляется матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы по методике, описанной в работе [5].
8. Решается система линейных уравнений по стандартной программе.
9. По каждому элементу и его граням вычисляются величины  $\sigma_{ij}$ ,  $v_i$ ,  $(\varepsilon_{ij})_m$ .
10. Уточняются значения  $(\bar{v}_i)_n = (v_i)_{n-1}$ .
11. Проводится сравнение величин  $(\bar{v}_i)_n$  и  $(\bar{v}_i)_{n-1}$  ( $n$  — номер итерации). Если заданная точность соответствия  $(\bar{v}_i)_n$  и  $(\bar{v}_i)_{n-1}$  достигается, то выполняется операция 12, в противном случае — операция 7.

12. Вычисляются новые параметры зазора  $H_4$  вследствие расхождения стаканов. Корректируется ортогональная сетка. Осуществляется присвоение:  $(\varepsilon_{ij})_m = (\varepsilon_{ij})_{m-1}$ ,  $(v_i)_m = (v_i)_{m-1}$ .

13. Вычисляются новые параметры давления в области V с использованием принятого закона  $pV = \text{const}$  (изотермический процесс), где  $p$ ,  $V$  — давление и объем газа в области IV соответственно.

14. Проводятся вычисления на шаге по времени  $\Delta\tau_m$ .

15. Если  $\tau < \sum_m \Delta\tau_m$ , то выполняется операция 5, в противном случае — операция 16.

16. Окончание расчета.

**Результаты решения задачи.** Для природного газа (доля метана 9,9 %) скорость горения  $v_r \simeq 0,67$  м/с, при этом давление в замкнутом объеме достигает  $6 \div 7$  атм [1].

Будем полагать, что за время горения  $\tau_r = H_4/v_r$  давление между цилиндрами возрастает по линейному закону. При этом цилиндры будут расходиться, а следовательно, давление между ними будет уменьшаться.

Приняты следующие начальные геометрические параметры (см. рис. 2):  $H_1 = 2$  м,  $H_2 = 0,1$  м,  $H_3 = 1$  м,  $H_4 = 0,03$  м,  $H_5 = 0,1$  м,  $H_6 = 1$  м,  $R_1 = 3$  м,  $R_2 = 3,1$  м,  $R_3 = 3,2$  м,  $R_4 = 4,2$  м,  $R_5 = 30$  м. При этом  $p_1 = 1$  атм,  $p_2 = 1,5$  атм. Задача решалась по шагам времени  $\Delta\tau_m$  ( $\tau = \sum_m \Delta\tau_m$ ). Давление  $p_3$  принималось равным 4,74 атм. Время горения  $\tau_r = 0,045$  с.

В соответствии со справочными данными [6, 7] принимались следующие значения модулей упругости для льда и стали:  $G_1 = 29,2 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>,  $G_3 = G_4 = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. Вязкость воды равна  $\mu = 0,01789$  г/(см<sup>2</sup> · с) при температуре, равной 0 °С. Удельный вес:  $\gamma_1 = 920$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma_3 = \gamma_4 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

В соответствии с данными [6] примем, что в случае растяжения разрушение льда происходит при  $\sigma_p = 1,5$  МПа, а в случае сжатия — при  $\sigma_c = 2,5$  МПа. Результаты расчетов показывают, что в радиусе, приблизительно равном 5 м, ледяной покров полностью разрушается и выбрасывается вверх со скоростью 1,35 м/с, причем разрушение льда происходит как в тангенциальном, так и в радиальном направлении.

Значительные упругие деформации происходят и в металлической конструкции, при этом растягивающие напряжения достигают 125 МПа. Предел текучести мягкой стали Ст. 3 равен  $\tau_s = 30$  кг/мм<sup>2</sup> = 300 МПа, т. е. напряжения в конструкции хотя и существуют, но критического значения не достигают. На рис. 2 показаны точки, в которых напряжения достигают максимального значения: точки A и B в центре нижнего стакана ( $\sigma_{22} = -88, 102$  МПа соответственно), точки C и D на переходной площадке нижнего стакана ( $\sigma_{11} = 125, -118$  МПа соответственно), а также точки E и F на верхнем стакане ( $\sigma_{11} = 102, -75$  МПа соответственно).

Напряжения в воде (область IV) равны гидростатическому напряжению:  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma$ . При этом, если давление воды внутри стаканов равно 4,75 атм, то за стаканами оно составляет 1,57 атм и практически не изменяется при изменении  $p_3$ . В областях I, II, III напряжения  $\sigma_{33}$  достигают максимальных значений в тех же точках A и B, что и напряжения  $\sigma_{22}$ , но  $|\sigma_{33}| < |\sigma_{22}|$  ( $\sigma_{33} = -87$  МПа,  $\sigma_{22} = 100$  МПа). В момент времени  $\tau = \tau_r$  скорость верхнего цилиндра  $v_1 = 1,35$  м/с, скорость нижнего цилиндра  $v_1 = -9,8$  м/с, скорость выброса льда вверх  $v_1 = 1,35$  м/с. В периферийной относительно цилиндров зоне скорости и направления движения воды соответствуют кинематике движения цилиндров.

**Выводы.** Результаты проведенных численных расчетов показали, что при использовании данной технологии происходит полное разрушение ледяного покрова (затора). Лед дробится в мелкую крошку вследствие возникающих напряжений и выбрасывается вверх дном верхнего стакана.

Конструкция из металлических стаканов испытывает значительные напряжения, которые не превышают предела упругости.

Под действием давления  $p_3$  нижний стакан устремляется вниз со скоростью, большей, чем скорость подъема верхнего стакана. Это явление необходимо учитывать, так как скорости перемещения значительны, что может привести к обрыву системы ограничений, препятствующей выпадению нижнего стакана из верхнего. Кроме того, при движении нижнего стакана вниз, а верхнего вверх резко увеличивается объем газовой камеры  $V$  (см. рис. 1), что приводит к уменьшению давления  $p_3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Равич М. Б.** Беспламенное поверхностное горение. 3-е изд. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
2. **Одинокое В. И.** Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток: Дальнаука, 1995.
3. **Одинокое В. И.** Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинокое, Б. Г. Каплунов, А. В. Песков, А. А. Баков. М.: Наука, 2008.
4. **Одинокое В. И., Сергеева А. М.** Математическое моделирование одного нового процесса разрушения ледяного покрова // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 139–146.
5. **Одинокое В. И., Сергеева А. М., Захарова Е. А.** Построение математической модели для анализа процесса разрушения ледяного покрова // Мат. моделирование. 2008. Т. 20, № 12. С. 15–26.
6. **Богородский В. В.** Физические свойства. Современные методы гляциологии / В. В. Богородский, В. П. Гаврило. Л.: Гидрометеиздат, 1980.
7. **Кроха В. А.** Упрочнение металлов при холодной пластической деформации: Справ. М.: Машиностроение, 1980.

*Поступила в редакцию 18/II 2009 г.*

---