УДК 539.3

КИНЕМАТИКА УПРУГО-НЕУПРУГОГО ПРОЦЕССА ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. А. Роговой

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mail: rogovoy@icmm.ru

Для слабовозмущенных кинематических тензоров упругих, неупругих и температурных деформаций построены соответствующие им тензоры полярных разложений. При условии, что неупругий и температурный градиенты места есть чистые деформации без вращений, установлена связь между неупругими малыми деформациями и малыми вращениями, а также между температурными малыми деформациями и малыми вращениями, которые переводят промежуточную конфигурацию в близкую текущую.

Ключевые слова: упругие, неупругие и температурные деформации, слабые возмущения, собственные векторы и собственные значения, полярное разложение.

Введение. В работах [1–4] кинематика процесса упруго-неупругого и термоупруго-неупругого деформирования описывается соотношением

$$F = f \cdot F_*. \tag{1}$$

Здесь F, f, F_* — упруго-неупругие (термоупруго-неупругие) градиенты места, переводящие соответственно начальную конфигурацию в текущую, промежуточную конфигурацию, близкую к текущей, в актуальную и начальную в промежуточную. В свою очередь, $f = f_E \cdot f_{IN} \cdot f_\Theta$, где f_E, f_{IN}, f_Θ — упругий, неупругий и температурный градиенты места, каждый из которых определяется соотношением $f_i = g + \varepsilon h_i$ (индекс i обозначает E, IN или Θ); g — единичный тензор; ε — малая положительная величина, характеризующая близость промежуточной и текущей конфигураций; h_i — градиент упругого, неупругого и температурного векторов малых перемещений $\boldsymbol{u}_i$ относительно промежуточной конфигурации. Такое представление допускает коммутацию градиентов места f_E, f_{IN}, f_Θ и позволяет представить f в виде $f = g + \varepsilon h$, где $h = h_E + h_{IN} + h_\Theta$ — градиент полных перемещений (с точностью до линейных слагаемых по ε). Каждый градиент перемещений представляется через симметричную часть e, e_E, e_{IN} и e_Θ (малые деформации) и кососимметричную часть d, d_E, d_{IN} и d_Θ (малые повороты), причем $e = e_E + e_{IN} + e_\Theta$, $d = d_E + d_{IN} + d_\Theta$ (эти и только эти малые полные деформации и повороты являются совместными).

Соотношение (1) отражает историю процесса, т. е. любую последовательность и длительность действий чисто упругого, чисто неупругого и чисто температурного деформирования. Градиент F_* отнесен к моменту времени t_*, градиент F — к текущему моменту времени t, причем $t - t_* = \varepsilon\tau$, $\tau > 0$. С использованием понятий матриканта и мультипликативного интеграла в работах [3, 4] из кинематики (1) выделены температурная F_Θ,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00050) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8055.2006.1), а также в рамках Программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН и Интеграционной программы УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

неупругая F_{IN} и чисто упругая F_E кинематики. В результате соотношение (1) представляется в виде

$$F = F_E \cdot F_{IN} \cdot F_\Theta = [g + \varepsilon(h_E + h_{IN} + h_\Theta)] \cdot F_*, \qquad F_* = F_{E*} \cdot F_{IN*} \cdot F_{\Theta*}, \tag{2}$$

где градиенты места F, F_E, F_{IN}, F_Θ определены в текущий момент времени t, а те же градиенты с индексом “$*$” — в момент времени t_*. Представление (2) совпадает по форме с известным разложением Ли, но свободно от недостатков последнего [3, 4]. Выражения для F_E, F_{IN} и F_Θ, полученные в [3, 4], имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} F_E = (g + \varepsilon h_E) \cdot F_{E*}, \qquad F_{IN} = (g + \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot h_{IN} \cdot F_{E*}) \cdot F_{IN*}, \\ F_\Theta = (g + \varepsilon F_{IN*}^{-1} \cdot F_{E*}^{-1} \cdot h_\Theta \cdot F_{E*} \cdot F_{IN*}) \cdot F_{\Theta*}. \end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что в (2), (3) индексы IN и Θ можно поменять местами. Соотношения (3) удобно представить в виде

$$F_i = (g + \varepsilon P_i) \cdot F_{i*}, \qquad P_i = \begin{cases} h_E, & i \equiv E, \\ F_{E*}^{-1} \cdot h_{IN} \cdot F_{E*}, & i \equiv IN, \\ F_{IN*}^{-1} \cdot F_{E*}^{-1} \cdot h_\Theta \cdot F_{E*} \cdot F_{IN*}, & i \equiv \Theta. \end{cases} \tag{4}$$

Все соотношения и уравнения механики сплошной среды должны удовлетворять принципу объективности, т. е. быть материально независимыми от системы отсчета, относительно которой рассматривается движение. В работе [4] показано, что при использовании разложения (2) принцип объективности всех соотношений выполняется, если градиенты места F_{IN} и F_Θ являются чистыми деформациями без вращений: $F_{IN} = U_{IN} = V_{IN}$, $F_\Theta = U_\Theta = V_\Theta$, т. е. если в полярных разложениях тензоров $F_{IN} = R_{IN} \cdot U_{IN} = V_{IN} \cdot R_{IN}$ и $F_\Theta = R_\Theta \cdot U_\Theta = V_\Theta \cdot R_\Theta$ ортогональные тензоры R_{IN} и R_Θ равны единичным: $R_{IN} = R_\Theta = g$. Последнее условие должно определять недостающую связь между e_{IN} и d_{IN}, а также между e_Θ и d_Θ в соотношениях (3), (4). Эта связь является недостающей, в силу того что определяющие уравнения известны только для малых неупругих и температурных деформаций (скоростей). В случае пластичности, например, это ассоциированный закон [1], в случае вязкости — дифференциальный закон $\dot e_{IN} = T/\mu$ (T — тензор напряжений; μ — вязкость) [2], в случае термоупругости — закон $\dot e_\Theta = \beta \dot\Theta g$ (β — коэффициент линейного температурного расширения; Θ — абсолютная температура). Для малых вращений (скоростей) соотношения подобного типа отсутствуют. Установлению таких связей посвящена данная работа, являющаяся продолжением работы [4]. Кроме того, представляет интерес выявление самой структуры упругого, неупругого и температурного кинематических тензоров чистых деформаций и вращений, а также законов их изменения при изменении соответствующих им градиентов места.

Учитывая, что связь между кинематическими тензорами F, R, U, V, соответствующими полной, упругой, неупругой или температурной деформации, устанавливается соотношениями

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i \boldsymbol\delta_i^{(1)} \boldsymbol\delta_i^{(1)}, \qquad V = \sum_{i=1}^3 U_i \boldsymbol\delta_i^{(2)} \boldsymbol\delta_i^{(2)}, \qquad R = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol\delta_i^{(2)} \boldsymbol\delta_i^{(1)}, \qquad F = \sum_{i=1}^3 U_i\, \boldsymbol\delta_i^{(2)} \boldsymbol\delta_i^{(1)},$$

где U_i — собственные значения симметричного положительно-определенного тензора U (или V); $\boldsymbol\delta_i^{(1)}$ — собственные единичные и ортогональные векторы тензора U; $\boldsymbol\delta_i^{(2)}$ — собственные единичные и ортогональные векторы тензора V, рассмотрим их изменение при слабых возмущениях, т. е. при переходе из одной конфигурации (промежуточной) в другую, достаточно близкую (текущую).

Промежуточная конфигурация, близкая к текущей, вводится для линеаризации уравнений при решении нелинейных краевых задач, в частности задач нелинейной теории упругости (см., например, [5]). Этот подход оказался эффективным и при построении кинематики и определяющих уравнений упруго-неупругих сред, так как он позволяет получать неголономные (непредставимые в конечном интегральном виде, в отличие от случая нелинейной упругости) эволюционные соотношения, отражающие историю процесса [1–4]. Если в случае нелинейной упругости введение промежуточной конфигурации, близкой к текущей, является удобным инструментом для численной реализации краевых задач, то в случае упруго-неупругих сред этот подход дает также эффективный аппарат для построения кинематических и определяющих соотношений. Этот аппарат используется в данной работе при исследовании изменения указанных кинематических тензоров.

1. Собственные значения и собственные векторы слабовозмущенного симметричного положительно-определенного тензора второго ранга. Пусть A — симметричный положительно определенный тензор второго ранга, который через собственные значения и собственные векторы представляется в виде

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_i, \tag{1.1}$$

где $A_i > 0$; $\boldsymbol{\delta}_i$ — единичные ортогональные векторы. Дадим тензору A слабое возмущение εa (ε — малая положительная величина), такое что тензор $A' = A + \varepsilon a$ также симметричный и положительно определенный (отсюда следует, что тензор a как минимум симметричный). Тогда в силу малости возмущения и непрерывности тензора A собственные значения и собственные векторы тензора A' можно представить в виде $A'_i = A_i + \varepsilon\lambda_i$, $\boldsymbol{\delta}'_i = (g + \varepsilon d_a) \cdot \boldsymbol{\delta}_i$. Здесь $A'_i > 0$; $\boldsymbol{\delta}'_i$ — единичные ортогональные векторы; $\varepsilon\lambda_i$, $\varepsilon d_a \cdot \boldsymbol{\delta}_i$ — малые изменения собственных значений и собственных векторов тензора A; d_a — кососимметричный тензор. Только в этом случае тензор $g + \varepsilon d_a$ является ортогональным и поворачивает тройку ортонормальных векторов $\boldsymbol{\delta}_i$ в пространстве, не меняя их длину и углы между ними. Ортогональность тензора $g + \varepsilon d_a$ вытекает из следующего. С одной стороны, $(g + \varepsilon d_a)^{\mathrm{т}} = g - \varepsilon d_a$, так как $d_a^{\mathrm{т}} = -d_a$; с другой стороны, из тождества $(g + \varepsilon d_a)^{-1} \cdot (g + \varepsilon d_a) = g$, представляя тензор $(g + \varepsilon d_a)^{-1}$ в виде $m + \varepsilon n$, получаем равенство $m + \varepsilon(n + m \cdot d_a) = g$ с точностью до линейных слагаемых по ε. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем $m = g$, $n = -d_a$. Отсюда следует, что $(g + \varepsilon d_a)^{\mathrm{т}} = (g + \varepsilon d_a)^{-1}$, т. е. тензор $g + \varepsilon d_a$ ортогонален.

С учетом сказанного выше задача на собственные значения тензора A' сводится к трем векторным соотношениям

$$[A - A_i g + \varepsilon(A - A_i g) \cdot d_a + \varepsilon(a - \lambda_i g)] \cdot \boldsymbol{\delta}_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Учитывая, что $(A - A_i g) \cdot \boldsymbol{\delta}_i = 0$ (при $i = 1, 2, 3$), представляя тензор A в виде (1.1) и единичный тензор в базисе $\boldsymbol{\delta}_i$, сведем эти три векторных соотношения к девяти скалярным:

$$(A_j - A_i)(\boldsymbol{\delta}_j \cdot d_a \cdot \boldsymbol{\delta}_i) + [(\boldsymbol{\delta}_j \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_i) - \lambda_i \delta_{ij}] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

(δ_{ij} — символ Кронекера), три из которых являются эквивалентными. В результате система распадается на шесть уравнений:

$$\begin{gathered} (A_i - A_j)(\boldsymbol{\delta}_i \cdot d_a \cdot \boldsymbol{\delta}_j) + \boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_j = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \quad j = \begin{cases} i + 1, & i < 3, \\ 1, & i = 3, \end{cases} \\ \lambda_i = \boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_i, \qquad i = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{1.2}$$

из которых в случае различных собственных значений A_i находим λ_i и составляющие кососимметричного тензора d_a в базисе $\boldsymbol{\delta}_i$:

$$d_a = d_a^{12}(\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2 - \boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{\delta}_1) + d_a^{23}(\boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{\delta}_3 - \boldsymbol{\delta}_3\boldsymbol{\delta}_2) + d_a^{31}(\boldsymbol{\delta}_3\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_3), \qquad d_a^{ij} = -\frac{\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_j}{A_i - A_j}. \tag{1.3}$$

При равенстве двух собственных значений, например $A_1 = A_2 \neq A_3$, однозначно определен только единичный вектор $\boldsymbol{\delta}_3$. Единичные векторы $\boldsymbol{\delta}_1$ и $\boldsymbol{\delta}_2$ ортогональны между собой и вектору $\boldsymbol{\delta}_3$ и определены с точностью до поворота вокруг $\boldsymbol{\delta}_3$. Условие $\boldsymbol{\delta}_1 \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_2 = 0$, вытекающее из (1.2), связывает этот поворот с симметричным тензором a, при этом из соотношения (1.3) следует произвольность составляющей d_a^{12} кососимметричного тензора d_a. В случае равенства всех собственных значений три единичных ортогональных вектора $\boldsymbol{\delta}_i$ связаны с тензором a условиями

$$\boldsymbol{\delta}_1 \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_2 = 0, \qquad \boldsymbol{\delta}_2 \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_3 = 0, \qquad \boldsymbol{\delta}_3 \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_1 = 0,$$

а все составляющие кососимметричного тензора d_a произвольны.

Тензор A' можно представить в виде

$$A' = A + \varepsilon a = \sum_{i=1}^{3} [A_i + \varepsilon(\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_i)][(g + \varepsilon\, d_a) \cdot \boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_i \cdot (g - \varepsilon d_a)]. \tag{1.4}$$

Сохраняя в этом выражении только линейные относительно ε слагаемые, имеем

$$A' = A + \varepsilon a = A + \varepsilon d_a \cdot A - \varepsilon A \cdot d_a + \varepsilon \sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_i)\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_i. \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.5) выражение для d_a, получаем соотношение

$$A + \varepsilon a = A + \varepsilon(\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_j)\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j,$$

т. е. тождество.

В силу положительной определенности тензора A' существует тензор $(A')^{1/2}$, который представляется в виде (1.4) с собственными значениями в степени 1/2:

$$[A_i + \varepsilon(\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_i)]^{1/2} = A_i^{1/2} + (\varepsilon/2)A_i^{-1/2}(\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_i)$$

(при разложении в ряд удержаны только линейные относительно ε слагаемые). В результате линеаризованное выражение для тензора $(A')^{1/2}$ записывается в виде, аналогичном (1.5):

$$(A')^{1/2} = (A + \varepsilon a)^{1/2} = A^{1/2} + \varepsilon d_a \cdot A^{1/2} - \varepsilon A^{1/2} \cdot d_a + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{3} A_i^{-1/2}(\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_i)\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_i.$$

При подстановке в это выражение выражения для d_a оно принимает элегантную форму

$$(A')^{1/2} = (A + \varepsilon a)^{1/2} = A^{1/2} + \varepsilon\, \frac{\boldsymbol{\delta}_i \cdot a \cdot \boldsymbol{\delta}_j}{A_i^{1/2} + A_j^{1/2}}\, \boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j. \tag{1.6}$$

Приближенное соотношение (1.6) (при его получении сохранялись только линейные по ε слагаемые) можно привести к точному эволюционному. Перенося в левую часть $A^{1/2}$, деля все выражение на ε и устремляя ε к нулю, получаем производную Гато

$$D(A^{1/2}) = \frac{\boldsymbol{\delta}_i \cdot \dot{a} \cdot \boldsymbol{\delta}_j}{A_i^{1/2} + A_j^{1/2}}\, \boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j. \tag{1.7}$$

Здесь все величины определены в момент времени t.

2. Слабые возмущения кинематических тензоров упругих, неупругих и температурных деформаций и соответствующие им тензоры полярных разложений. Конкретизируем полученные соотношения применительно к кинематическим тензорам меры деформаций Коши — Грина C и Фингера Φ. Для тензора F_E (3) эти меры представляются в виде

$$C_E = F_E^{\mathrm{т}} \cdot F_E = C_{E*} + 2\varepsilon F_{E*}^{\mathrm{т}} \cdot e_E \cdot F_{E*}, \qquad C_{E*} = F_{E*}^{\mathrm{т}} \cdot F_{E*},$$
$$\Phi_E = F_E \cdot F_E^{\mathrm{т}} = \Phi_{E*} + \varepsilon(h_E \cdot \Phi_{E*} + \Phi_{E*} \cdot h_E^{\mathrm{т}}), \qquad \Phi_{E*} = F_{E*} \cdot F_{E*}^{\mathrm{т}}$$

или, с использованием для тензора F_E полярного представления ($F_E = R_E \cdot U_E = V_E \cdot R_E$; R_E — ортогональный тензор; U_E, V_E — правый и левый симметричные положительно-определенные тензоры чистой деформации), — в виде

$$U_E^2 = U_{E*}^2 + 2\varepsilon F_{E*}^{\mathrm{т}} \cdot e_E \cdot F_{E*}, \qquad V_E^2 = V_{E*}^2 + \varepsilon(h_E \cdot V_{E*}^2 + V_{E*}^2 \cdot h_E^{\mathrm{т}}). \tag{2.1}$$

Поставим в соответствие этим тензорам тензоры A', A, a из выражения (1.4). До тех пор пока рассматривается только упругая кинематика и для представления тензоров используется промежуточная конфигурация, для упрощения обозначений индексы E и “$*$” опускаются. Тогда в первом соотношении (2.1) роль тензора A' в выражении (1.4) играет тензор U_E^2 (обозначим его $(U')^2$), роль тензора A — тензор U^2 ($A = U^2$) с собственными значениями $A_i = U_i^2$ и собственными векторами $\boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$ ($U = \sum\limits_{i=1}^{3} U_i \boldsymbol{\delta}_i^{(1)} \boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$), а роль тензора a — тензор $2F^{\mathrm{т}} \cdot e \cdot F$. Во втором соотношении (2.1) роль тензора A' играет тензор V_E^2 (обозначим его $(V')^2$), роль тензора A — тензор V^2 ($A = V^2$) с теми же собственными значениями $A_i = U_i^2$, что и в первом соотношении, но с собственными векторами $\boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$ ($V = \sum\limits_{i=1}^{3} U_i \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$), а роль тензора a — тензор $h \cdot V^2 + V^2 \cdot h^{\mathrm{т}}$. Как известно, ортогональный тензор R преобразует векторы $\boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$ в векторы $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$ ($\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} = R \cdot \boldsymbol{\delta}_i^{(1)} \Rightarrow R = \sum\limits_{i=1}^{3} \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$), а тензор F представляется в виде $F = \sum\limits_{i=1}^{3} U_i \, \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$. С учетом сказанного выше выражение (1.6) для тензоров U' и V' записывается в виде

$$\begin{gathered} U' = U + 2\varepsilon \, \frac{U_i(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot e \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)})U_j}{U_i + U_j} \, \boldsymbol{\delta}_i^{(1)} \boldsymbol{\delta}_j^{(1)}, \\ V' = V + \varepsilon \, \frac{U_i^2(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot h^{\mathrm{т}} \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}) + (\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot h \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)})U_j^2}{U_i + U_j} \, \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

а выражение (1.3), определяющее преобразование векторов $\boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$ в $\boldsymbol{\delta}_i^{(1)'}$ и $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$ в $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)'}$, оставляя их единичными и ортогональными, — в виде

$$\begin{gathered} d_U = d_U^{12}(\boldsymbol{\delta}_1^{(1)} \boldsymbol{\delta}_2^{(1)} - \boldsymbol{\delta}_2^{(1)} \boldsymbol{\delta}_1^{(1)}) + d_U^{23}(\boldsymbol{\delta}_2^{(1)} \boldsymbol{\delta}_3^{(1)} - \boldsymbol{\delta}_3^{(1)} \boldsymbol{\delta}_2^{(1)}) + d_U^{31}(\boldsymbol{\delta}_3^{(1)} \boldsymbol{\delta}_1^{(1)} - \boldsymbol{\delta}_1^{(1)} \boldsymbol{\delta}_3^{(1)}), \\ d_U^{ij} = -2 \, \frac{U_i(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot e \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)})U_j}{U_i^2 - U_j^2}; \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$
d_V = d_V^{12}(\boldsymbol{\delta}_1^{(2)}\boldsymbol{\delta}_2^{(2)} - \boldsymbol{\delta}_2^{(2)}\boldsymbol{\delta}_1^{(2)}) + d_V^{23}(\boldsymbol{\delta}_2^{(2)}\boldsymbol{\delta}_3^{(2)} - \boldsymbol{\delta}_3^{(2)}\boldsymbol{\delta}_2^{(2)}) + d_V^{31}(\boldsymbol{\delta}_3^{(2)}\boldsymbol{\delta}_1^{(2)} - \boldsymbol{\delta}_1^{(2)}\boldsymbol{\delta}_3^{(2)}),
$$
$$
d_V^{ij} = \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot d \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)} - \frac{(U_i^2 + U_j^2)(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot e \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)})}{U_i^2 - U_j^2}. \tag{2.4}
$$

Наконец, учитывая, что $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)'} = R' \cdot \boldsymbol{\delta}_i^{(1)'}$, $\boldsymbol{\delta}_i^{(1)'} = (g + \varepsilon d_U) \cdot \boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$, $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)'} = (g + \varepsilon d_V) \cdot \boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$ и $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} = R \cdot \boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$, для ортогонального тензора R' получаем выражение

$$
R' = \Big\{ g + \varepsilon \Big[d - \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j}\, (\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot e \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}) \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_j^{(2)} \Big] \Big\} \cdot R \tag{2.5}
$$

(легко заметить, что вычитаемое в квадратных скобках — кососимметричный тензор, так же как и тензор d). Из соотношений (2.3)–(2.5) следует, что только в случае, когда собственные векторы симметричного тензора дополнительной малой упругой деформации e совпадают с векторами $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$, кососимметричный тензор $d_U = 0$ (векторы $\boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$ не поворачиваются), кососимметричный тензор $d_V = d$ (векторы $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$ поворачиваются только за счет деформационного тензора вращения d) и изменение ортогонального тензора в полярном разложении градиента места обусловлено только деформационным вращением $R' = (g + \varepsilon d) \cdot R$. В остальных случаях на все эти повороты влияет также тензор деформации.

Аналогично тому, как из приближенного соотношения (1.6) получено точное эволюционное (1.7), можно получить точные эволюционные соотношения для (2.2) и (2.5).

Если вместо h использовать тензор P (4), то все полученные выше соотношения для упругости останутся справедливыми и для градиентов F_{IN} и F_Θ при замене в них h_E на P, e_E на P_S и d_E на P_C ($P_S = (P + P^{\text{т}})/2$, $P_C = (P - P^{\text{т}})/2$ — симметричная и кососимметричная части P). Присутствующие в этих соотношениях тензоры чистой деформации, их собственные значения и векторы, а также ортогональный тензор соответствуют неупругой или температурной кинематике, т. е. имеют индекс IN или Θ.

Ниже из всех кинематических соотношений потребуется только выражение для ортогонального тензора неупругого и температурного градиентов места, которое в принятых обозначениях имеет вид

$$
R' = \Big\{ g + \varepsilon \Big[P_C - \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j}\, (\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_S \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}) \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_j^{(2)} \Big] \Big\} \cdot R \tag{2.6}
$$

(индексы IN, Θ и “$*$” опущены).

3. Неупругий и температурный градиенты места без вращений. Как показано в работе [4], при использовании разложения (2) градиенты места F_{IN} и F_Θ должны быть чистыми деформациями без вращений, т. е. ортогональные тензоры R_{IN} и R_Θ в полярных разложениях этих градиентов места должны быть единичными в любой момент времени. Отсюда следует, что в соотношении (2.6) $R = R' = g$. Тогда

$$
P_C = \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j}\, (\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_S \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}) \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}. \tag{3.1}
$$

Представляя тензор P_C в базисе $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)}$: $P_C = P_C^{ij} \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}$, где $P_C^{ij} = \boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_C \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}$, из соотношения (3.1) получаем

$$
\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_C \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)} = \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j}\, (\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_S \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}).
$$

Отсюда следует, что

$$
(U_i + U_j)(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_C \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}) = (U_i - U_j)(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_S \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)}).
$$

Из равенства этих составляющих вытекает равенство тензоров

$$(U_i + U_j)(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_C \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)})\boldsymbol{\delta}_i^{(2)}\boldsymbol{\delta}_j^{(2)} = (U_i - U_j)(\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} \cdot P_S \cdot \boldsymbol{\delta}_j^{(2)})\boldsymbol{\delta}_i^{(2)}\boldsymbol{\delta}_j^{(2)},$$

которое представляется в виде

$$V \cdot P_C + P_C \cdot V = V \cdot P_S - P_S \cdot V. \tag{3.2}$$

Условие $R = g$ приводит к равенству $\boldsymbol{\delta}_i^{(2)} = \boldsymbol{\delta}_i^{(1)}$. Это означает, что $V = U$ и соотношение (3.2) можно записать в виде

$$U \cdot P_C + P_C \cdot U = U \cdot P_S - P_S \cdot U. \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) следует также непосредственно из соотношения (4). Действительно, если градиент места есть чистая деформация, то (4) записывается в виде $U = (g + \varepsilon P) \cdot U_*$. Тогда тензор $U^{\text{т}} = U_*^{\text{т}} \cdot (g + \varepsilon P)^{\text{т}}$. В силу симметрии тензоров U и U_* $U = U^{\text{т}}$ и $U_* = U_*^{\text{т}}$. Тогда $P \cdot U_* = U_* \cdot P^{\text{т}}$. Представляя P в виде симметричной и кососимметричной частей, получаем соотношение (3.3).

Запишем уравнения для определения d_{IN} и d_Θ. Из выражения (4) следует $P_{IN} = F_{E*}^{-1} \cdot h_{IN} \cdot F_{E*}$. Определяя симметричную $(P_{IN})_S$ и кососимметричную $(P_{IN})_C$ части тензора P_{IN} и подставляя их в соотношение (3.3), в котором в этом случае $U \equiv U_{IN*}$, получаем уравнение для определения d_{IN}:

$$A \cdot d_{IN} + d_{IN} \cdot A^{\text{т}} = C, \qquad A = (F_*^{-})^{\text{т}} \cdot U_{\Theta*} \cdot F_{E*}^{-1}, \qquad C = e_{IN} \cdot A^{\text{т}} - A \cdot e_{IN}. \tag{3.4}$$

Подставляя аналогично тензор P_Θ из выражения (4) и полагая в (3.3) $U \equiv U_{\Theta*}$, получаем уравнение для определения d_Θ:

$$A \cdot d_\Theta + d_\Theta \cdot A = C, \qquad A = (F_*^{-})^{\text{т}} \cdot U_{\Theta*} \cdot F_*^{-1}, \qquad C = e_\Theta \cdot A - A \cdot e_\Theta. \tag{3.5}$$

В уравнениях (3.4), (3.5) тензоры A и C известны.

Уравнения (3.4), (3.5) можно записать в виде $A \cdot X + X \cdot B = C$, где $B = A^{\text{т}}$ или $B = A$; $X = d_{IN}$ или $X = d_\Theta$. Это уравнение имеет единственное решение, если тензоры A и $-B$ не имеют общих собственных значений (см. [6, 7]). Уравнения (3.4) и (3.5) удовлетворяют этому условию. Полагая в уравнении (3.5) $e_\Theta = \beta\theta g$, где θ — малое изменение температуры Θ (малая температурная деформация подчиняется закону линейного температурного расширения), получаем $A \cdot d_\Theta + d_\Theta \cdot A = 0$. В силу единственности решения этого уравнения $d_\Theta = 0$. С учетом кососимметричности тензора d_{IN} уравнение (3.4) для любого базиса $\boldsymbol{r}_i$ сводится к следующей системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{3} B_{(ij)}^{kl} d_{kl} = -\sum_{k=1}^{3} C_{(ij)}^{k} e_{kk} - \sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{3} D_{(ij)}^{kl} e_{kl}, \qquad i,j = 1,2,3, \quad i<j.$$

Здесь

$$B_{(ij)}^{kl} = A^{ik}g^{lj} + g^{ki}A^{jl} - A^{il}g^{kj} - g^{li}A^{jk},$$

$$C_{(ij)}^{k} = A^{ik}g^{kj} - g^{ki}A^{jk}, \qquad D_{(ij)}^{kl} = A^{ik}g^{lj} - g^{ki}A^{jl} + A^{il}g^{kj} - g^{li}A^{jk},$$

A^{ij}, g^{ij} — контравариантные составляющие тензора A из (3.4) и метрического тензора, отнесенные к базису $\boldsymbol{r}_i$.

Следует отметить, что уравнения (3.4) и (3.5) предельным переходом сводятся к точным эволюционным.

Заключение. Как показано в работе [4], согласно принципу объективности в представлении полного градиента места F в виде $F = F_E \cdot F_{IN} \cdot F_\Theta$ неупругий и температурный градиенты места должны быть чистыми деформациями без вращений. С учетом этого требования получена недостающая связь между малыми деформациями e_{IN}, для которых известно определяющее соотношение, и малыми вращениями d_{IN}, а также между малыми деформациями e_Θ с известным определяющим соотношением и малыми вращениями d_Θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 77–95.
2. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 122–140.
3. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
4. **Роговой А. А.** Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 144–153.
5. **Роговой А. А.** Модель слабосжимаемого и несжимаемого упругого тела при конечных деформациях // Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / Под ред. В. В. Мошева. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1997. С. 375–442.
6. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988.
7. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10/VII 2006 г.,
в окончательном варианте — 23/I 2007 г.