УДК 534.1

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ В КАНАЛЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВЫНУЖДЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПЛАСТИНЫ

В. Б. Курзин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kurzin@hydro.nsc.ru

В рамках плоской модели рассмотрены аэроупругие колебания пластины, обтекаемой под нулевым углом атаки потоком несжимаемой вязкой жидкости в канале с параллельными стенками. При вынужденных колебаниях пластины в поперечном направлении возникает нестационарная составляющая силы трения потока, обусловленная возмущением скорости течения жидкости колеблющейся пластиной. В предположении о ламинарном характере течения жидкости показано, что в случае малой ширины канала по сравнению с длиной пластины эта сила может возбудить колебания пластины в продольном направлении, имеющие тот же порядок, что и возбуждаемые внешними силами ее колебания в поперечном направлении.

Ключевые слова: аэроупругие колебания, пластина, канал, жидкость, силы трения.

Введение. Реакция аэроупругой системы на приложенную к ней внешнюю нагрузку иногда качественно отличается от реакции соответствующей упругой системы, если не учитывается ее взаимодействие с потоком обтекаемой жидкости. В данной работе показано, что в случае аэроупругих колебаний пластины, обтекаемой потоком вязкой жидкости в канале, под действием возбуждающих сил в поперечном направлении в результате взаимодействия с потоком она может совершать колебания и в продольном направлении. Механизм этого явления состоит в следующем. При вынужденных колебаниях пластины в поперечном направлении периодически изменяется геометрия сечений каналов, образованных пластиной и стенками основного канала. Следовательно, периодически изменяются скорость обтекания пластины и силы трения, действующие на нее со стороны потока. Если расстояния от стенок канала до пластины различны, то амплитуда суммарной силы трения будет отлична от нуля, при этом под действием данной силы могут возникнуть колебания пластины в продольном направлении.

Подобное явление аэроупругости может иметь место в активной части ядерного реактора, основные элементы которой (твэлы) подвержены действию нестационарных гидродинамических сил, возникающих вследствие турбулентности и неравномерности течения рабочей среды. Однако в многочисленных работах, посвященных исследованию динамической прочности твэлов (см., например, [1, 2]), упругостью заделок их торцов пренебрегается. Вместе с тем возникновение колебаний твэлов в продольном направлении может

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00145).

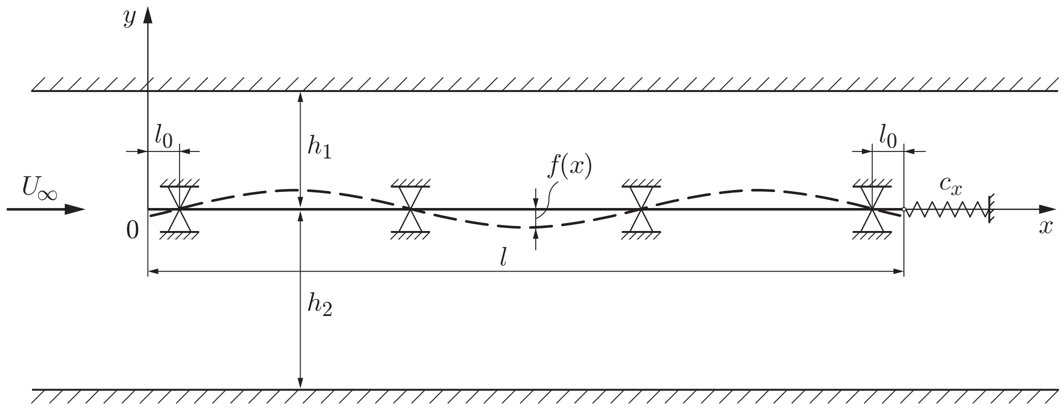

Схема расположения и закрепления пластины в потоке

оказывать существенное влияние на их фреттинг-износ, представляющий собой весьма актуальную проблему усталостной прочности активной части ядерного реактора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание вязкой несжимаемой жидкостью однородной упругой пластины, расположенной вдоль потока и закрепленной в канале с параллельными стенками в соответствии со схемой, представленной на рисунке. Пусть пластина совершает вынужденные гармонические колебания по закону

$$y(x,t) = \varepsilon_0 h f(x)\, \mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad f(x) = O(1), \quad \varepsilon_0 \ll 1, \tag{1.1}$$

где x — безразмерная координата точки пластины, равная расстоянию от этой точки до передней кромки пластины, отнесенному к длине пластины l; $h = h_1 + h_2$ — ширина канала, отнесенная к l; h_1, h_2 — безразмерные расстояния от верхней и нижней стенок канала до пластины соответственно; ω, $f(x)$ — частота и форма колебаний пластины. Колебания пластины зависят не только от указанных выше геометрических параметров системы, но и от скорости набегающего на пластину потока U_∞ и кинематической вязкости жидкости ν.

Решение задачи о гидроупругих колебаниях пластины и способы его построения существенно зависят от соотношения указанных параметров. Рассмотрим случай, когда значения этих параметров имеют тот же порядок, что и значения геометрических параметров продольного сечения кассет активной части современных ядерных реакторов и значения параметров потока теплоносителя, а именно:

$$l \approx 4 \text{ м}, \quad \mu = l_0/l \ll 1, \quad h_1 \approx 0{,}001 \ll 1, \quad h_2 \approx 0{,}001 \ll 1, \quad \omega \approx 25 \div 400. \tag{1.2}$$

Здесь μ — отношение расстояния от переднего конца твэла до передней опоры к его длине,

$$U_\infty \approx 10 \text{ м/с}, \qquad \nu \approx 0{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}. \tag{1.3}$$

В предположении, что течение жидкости является ламинарным, согласно (1.2), (1.3) для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_j = U_\infty l h_j/\nu$ справедливы неравенство

$$\mathrm{Re}_j > 1/(0{,}04 h_j) \qquad (j = 1, 2), \tag{1.4}$$

а также оценки для параметров закона колебаний пластины вида

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big| \approx |f(x)|, \qquad k = \frac{\omega h l}{U_\infty} < 0{,}2. \tag{1.5}$$

Задача состоит в определении нестационарной составляющей силы трения потока о пластину и закона колебаний пластины, возбуждаемых этой силой.

2. Кинематика течения жидкости вблизи колеблющейся пластины. Введем осредненные по координате y значения скоростей течения жидкости $\langle U_j(x,t)\rangle$ в каналах, образованных пластиной и стенками основного канала, расположенного выше ($j = 1$) и ниже ($j = 2$) пластины. Для осредненного течения в этих каналах запишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial S_j}{\partial t}\, l + \langle U_j(x,t)\rangle \,\frac{\partial S_j}{\partial x} + S_j\,\frac{\partial\langle U_j(x,t)\rangle}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$S_j = h_j - \delta_j^*(x) + (-1)^j \varepsilon_0 h_j f(x)\,\mathrm{e}^{i\omega t} \qquad (j = 1, 2), \tag{2.2}$$

$\delta_j^*(x)$ — толщина вытеснения жидкости в пограничных слоях на пластине и стенках канала, отнесенная к l. Согласно [3] из условия (1.4) следует, что параболическое распределение скоростей по оси y (течение Пуазейля) в каналах ($j = 1, 2$) не достигается. Поэтому значение $\delta_j^*(x)$ может быть определено приближенно с помощью формулы вида

$$\delta_j^* = 3{,}4416\sqrt{\nu x/(lU_\infty)} = 3{,}4416\sqrt{x/\operatorname{Re}_j}. \tag{2.3}$$

С учетом (1.1), (1.2) выражения для осредненных скоростей представим в виде

$$\langle U_j(x,t)\rangle = U_\infty + \langle u_j^*(x)\rangle + \varepsilon_0 U_\infty \langle u_j(x)\rangle\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{2.4}$$

где $\langle u_j^*(x)\rangle$ — осредненные значения возмущений скорости набегающего потока вне пограничных слоев на стенках каналов; $\langle u_j(x)\rangle$ — безразмерные функции, определяющие осредненные амплитуды нестационарных составляющих скоростей.

Подставим (2.2), (2.4) в (2.1) и согласно методу возмущений приравняем к нулю коэффициенты при нулевой и первой степенях параметра ε_0 в левой части полученного выражения:

$$-\,[U_\infty + \langle u_j^*(x)\rangle]\,\frac{\partial \delta_j^*(x)}{\partial x} + (h_j - \delta_j^*(x))\,\frac{\partial\langle u^*(x)\rangle}{\partial x} = 0,$$

$$(-1)^j i\omega h l f(x) - U_\infty\langle u_j(x)\rangle\,\frac{\partial\delta^*(x)}{\partial(x)} + (-1)^j h\,\frac{\partial f(x)}{\partial x}\,[U_\infty + \langle u_j^*(x)] + {}$$
$$+ [h_j - \delta_j^*(x)]U_\infty\,\frac{\partial\langle u_j(x)\rangle}{\partial x} + (-1)^j h f(x)\,\frac{\partial\langle u^*(x)\rangle}{\partial x} = 0.$$

Эти уравнения преобразуются к виду

$$\frac{d}{dx}\,[h_j\langle u_j^*(x)\rangle - U_\infty\delta_j^*(x) - \langle u_j^*(x)\rangle\delta_j^*(x)] = 0; \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[(h_j - \delta_j^*(x))\langle u_j(x)\rangle + (-1)^j h f(x)\Big(1 + \frac{\langle u_j^*(x)\rangle}{U_\infty}\Big)\Big] = -(-1)^j ik f(x). \tag{2.6}$$

Полагая, что

$$\delta_j^*(x) = 0, \quad \langle u_j^*(x)\rangle = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

из уравнения (2.5) находим

$$\langle u_j^*(x)\rangle = U_\infty\,\frac{\delta_j^*(x)}{h_j - \delta_j^*(x)}. \tag{2.7}$$

С учетом (2.7) из уравнения (2.6) получаем

$$\langle u_j(x)\rangle = -\frac{(-1)^j}{h_j - \delta_j^*(x)}\Big(h f(x)\,\frac{h_j}{h_j - \delta_j^*(x)} + ik\int f(x)\,dx + c_j\Big), \tag{2.8}$$

где c_j — произвольные константы, для определения которых используются условие сохранения расхода жидкости в окрестности передней кромки пластины

$$\langle u_1(x)\rangle h_1 + \langle u_2(x)\rangle h_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{2.9}$$

и условие отсутствия перепада давления в окрестности задней кромки пластины (условие Жуковского). Для нестационарных составляющих параметров течения вблизи пластины, колеблющейся по гармоническому закону, второе условие приводится к виду

$$ik \int\limits_0^1 [\langle u_2(x)\rangle - \langle u_1(x)\rangle]\,dx + h[\langle u_2(1) - u_1(1)\rangle] = 0. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.8) в (2.9), получаем $c_1 = c_2$.

Для того чтобы условие (2.10) было выполнено (с учетом предположения (1.2) и выражения (2.3)), полагая, что толщины вытеснения на стенках канала одинаковы, функцию $\delta_j^*(x)$ представим следующим образом:

$$\delta_j^*(x) = \varepsilon_1 h_j \sqrt{x}, \qquad \varepsilon_1 = 6{,}8832/\sqrt{\mathrm{Re}_j} = O(\sqrt{h_j}\,). \tag{2.11}$$

Предполагая дополнительно, что расстояния между опорами пластины одинаковы, и учитывая (1.2), зададим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sin(n\pi x). \tag{2.12}$$

С учетом (2.11), (2.12) и с помощью формулы Ньютона из (2.8) получаем приближенное выражение для $v_j(x)$, более удобное для интегрирования:

$$\langle u_j(x)\rangle = -(-1)^j \Big[\frac{h}{h_j}\Big(1 + 2\varepsilon_1 \frac{h}{h_j}\sqrt{x}\Big)\sin(n\pi x) + \\ + \frac{1}{h_j}\Big(1 + \varepsilon_1 \frac{h}{h_j}\sqrt{x}\Big)\Big(c_j - \frac{ik}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big)\Big][1 + O(h)]. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.3) в (2.10), находим

$$c_j = \frac{1}{n\pi}\Big([2(-1)^n - 1]h - \frac{ik\varepsilon_1(h_1^2 + h_2^2)}{n\pi h_1 h_2\sqrt{2n}}\,S(n\pi)\Big) + O(h^{3/2}), \tag{2.14}$$

где $S(n\pi)$ — синус-интеграл Френеля.

3. Нестационарная составляющая силы трения, действующей на пластину со стороны потока. При малом периодическом возмущении внешнего потока вязкой жидкости вблизи колеблющейся пластины на нее действует периодическая сила трения, существенно зависящая от частоты колебаний жидкости. Согласно [3] при больших частотах, когда выполняется неравенство

$$\Big(\frac{\delta_0}{\delta}\Big)^2 \ll 1 \qquad \Big(\delta_0 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad \delta = 5\sqrt{\frac{\nu x l}{U_\infty}}\,\Big), \tag{3.1}$$

нестационарная составляющая скорости течения в пограничном слое при заданной нестационарной составляющей скорости внешнего течения

$$u(x,t) = \varepsilon_0 u_0(x) U_\infty \,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

может быть представлена в виде

$$U(x,y,t) = \varepsilon_0 u_0(x) U_\infty \big(1 - \mathrm{e}^{-(1+i)yl/\delta_0}\,\big)\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{3.2}$$

где y — координата, отнесенная к l; $u_0(x)$ — безразмерная функция, определяющая амплитуду колебаний скорости внешнего потока.

Из предположений (1.4), (1.5) следует, что неравенство (3.1) выполняется на всей поверхности пластины, за исключением малой окрестности ее передней кромки. Будем считать, что амплитуда колебаний скорости течения жидкости в каналах, образованных пластиной и стенками основного канала, приближенно равна ее осредненным значениям в соответствующих сечениях каналов. Тогда с учетом (3.2) значения нестационарных составляющих напряжения трения на нижней и верхней поверхностях пластины можно определить по формуле

$$\tau_j(x,t) = \frac{\nu\rho}{l}\Big(\frac{\partial u_j(x,y,t)}{\partial y}\Big)_{y=0} = \frac{\varepsilon_0}{\delta_0}\,(1+i)\nu\rho U_\infty \langle u_j(x)\rangle\, \mathrm{e}^{i\omega t}\,.$$

Следовательно, нестационарная составляющая силы трения, приходящейся на единицу ширины пластины, равна

$$F_x = \frac{\varepsilon_0}{\delta_0}\,(1+i)\rho\nu l U_\infty\, \mathrm{e}^{i\omega t} \int\limits_0^1 [\langle u_1(x)\rangle + \langle u_2(x)\rangle]\, dx. \tag{3.3}$$

Подставляя (2.13) в (3.3), с учетом (2.14), (3.1) находим

$$F_x = \varepsilon_0\, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, \rho l \sqrt{\nu\omega}\, U_\infty C_u\, \mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{3.4}$$

где

$$C_u = \frac{h_2 - h_1}{n\pi h_1 h_2}\Big((-1)^n h + \frac{ik\varepsilon_1}{n\pi}\sqrt{\frac{2}{n}\, S(n\pi)[1 + O(\sqrt{h})]}\Big). \tag{3.5}$$

Из выражения для C_u следует, что сила трения отлична от нуля лишь при $h_1 \neq h_2$.

В случае упругого опирания торцов пластины сила F_x возбуждает ее колебания в направлении оси x, а со стороны потока на пластину действует дополнительная периодическая сила сопротивления. Для установившихся гармонических колебаний пластины по закону

$$x = \varepsilon_0 h x_0\, \mathrm{e}^{i(\omega t + \varphi)}, \tag{3.6}$$

где φ — фаза колебаний пластины в направлении оси x по отношению к ее колебаниям в направлении оси y, эта сила равна

$$R_x = -(1+i)\rho\sqrt{2\nu\omega}\, l^2\, \mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)}\, \dot{x} = -\varepsilon_0 x_0 h\rho(1+i) i\omega\sqrt{2\nu\omega}\, l^2\, \mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)}\,. \tag{3.7}$$

4. Вынужденные колебания пластины в направлении оси x. Запишем уравнение колебаний пластины в направлении оси x под действием периодических сил трения потока жидкости о пластину, которые могут возникнуть в случае упругого опирания ее торцов:

$$m\ddot{x} + c_x x = (F_x + R_x)b. \tag{4.1}$$

Здесь m — масса пластины; c_x — коэффициент жесткости упругой опоры пластины в направлении оси x; b — ширина пластины, отнесенная к l. Согласно (3.4) сила $F_x b$ не зависит от колебаний пластины в направлении оси x, поэтому ее можно рассматривать как силу, возбуждающую эти колебания. Сила $R_x b$, пропорциональная $\dot{x}$, демпфирует эти колебания.

Для определения амплитуды x_0 и фазы φ колебаний пластины подставим (3.4), (3.5), (3.7) в (4.1). В результате получим алгебраическое уравнение в комплексной форме

$$\Big[p^2 - \omega^2 + \frac{\rho}{m}\,(i-1)\omega\sqrt{2\nu\omega}\,l^2 b\Big]x_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\rho}{mh}\,\sqrt{\nu\omega}\,V_\infty lbC_u\,\mathrm{e}^{-i\varphi},$$

где $p = \sqrt{c_x/m}$ — собственная частота колебаний пластины в направлении оси x. Разрешая это уравнение относительно неизвестных величин x_0 и φ, находим

$$x_0 = \frac{\rho\sqrt{\nu\omega}\,V_\infty lbC_u}{mh\sqrt{(p^2-\omega^2)^2 - 2(p^2-\omega^2)(\rho/m)\omega\sqrt{2\nu\omega}\,l^2 b + 2((\rho/m)\omega\sqrt{2\nu\omega}\,l^2 b)^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{(p^2-\omega^2)mh}{\rho\sqrt{2\nu\omega}\,V_\infty lbC_u}\,x_0.$$

В режиме резонанса ($\omega = p$) получаем

$$x_0 = \frac{C_u}{2k}, \qquad \cos\varphi = 0. \tag{4.2}$$

Из (3.5) находим

$$C_u \sim \frac{|h_1^2 - h_2^2|}{n\pi h_1 h_2}. \tag{4.3}$$

Из выражения (4.2) с учетом (1.1), (1.5), (3.6), (4.3) следует, что при $|h_1 - h_2| \sim \min\limits_j h_j$ вследствие вынужденных колебаний пластины в поперечном направлении в потоке вязкой жидкости могут возникать ее колебания и в продольном направлении, имеющие тот же порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hassan M. A., Weawer D. S., Dokainish M. A.** A simulation of the turbulence response of heat exchanger tubes in lattice-bar sappert // J. Fluids Structures. 2002. V. 16. P. 1145–1176.
2. **Pettigrew M. J., Taylor C. E.** Vibration analysis of shell-and-tube heat exchangers: an overview. 2. Vibration respons, fretting-wear, guidelines // J. Fluids Structures. 2003. V. 18. P. 485–500.
3. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 19/XI 2007 г.,
в окончательном варианте — 10/VII 2009 г.