УДК 532.591+517.948

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается математическая модель распространения длинноволновых возмущений на сдвиговом потоке двухслойной идеальной стратифицированной жидкости со свободной границей. Получено и исследовано характеристическое уравнение, определяющее скорости распространения возмущений в жидкости. Сформулированы необходимые условия гиперболичности уравнений движения для течений с монотонным по глубине профилем скорости, и вычислена характеристическая форма системы. Показано, что вопрос о получении достаточных условий гиперболичности эквивалентен решению системы сингулярных интегральных уравнений. Исследованы предельные случаи слабой и сильной стратификации. Для этих моделей сформулированы необходимые и достаточные условия гиперболичности, системы уравнений движения приведены к интегральным инвариантам Римана, сохраняющимся вдоль характеристик.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, сдвиговые течения, длинные волны, гиперболичность.

Введение. Моделирование нелинейных волновых движений на поверхности узкого слоя жидкости представляет интерес как для фундаментальных исследований, так и для практических приложений в области океанологии и метеорологии. Эта тематика развивается достаточно давно, и ей посвящено большое количество работ, в том числе монографии [1–4]. Изучение динамики стратифицированной жидкости с кусочно-постоянной плотностью имеет приложения к задачам океанологии и исследования "слоистой" (разделенной на почти однородные по плотности горизонтальные слои) структуры верхнего слоя океана [5]. Важной особенностью таких движений является развитие внутренних волн за счет передачи импульса от одного слоя к другому. Л. В. Овсянниковым [6] выведены и исследованы модели потенциальных волновых движений двухслойной жидкости в асимптотическом приближении мелкой воды. Новый теоретический метод анализа интегродифференциальных уравнений, предложенный В. М. Тешуковым [7], позволяет провести исследование более сложных моделей двухслойной жидкости, учитывающих вихревой (сдвиговый) характер движения. Ряд результатов для двухслойной модели вихревой мелкой воды со свободной границей и под крышкой получены в работах [8, 9].

1. Вывод математической модели. Плоскопараллельные движения двухслойной идеальной несжимаемой жидкости над ровным дном со свободной границей в поле силы тяжести описываются системой уравнений Эйлера с граничными и начальными условиями

$$u_{it} + u_i u_{ix} + v_i u_{iy} + \rho_i^{-1} p_{ix} = 0, \qquad \varepsilon^2 (v_{it} + u_i v_{ix} + v_i v_{iy}) + \rho_i^{-1} p_{iy} = -g,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 01-868), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-06424) и Министерства образования Российской Федерации (код проекта E02-4.0-21).

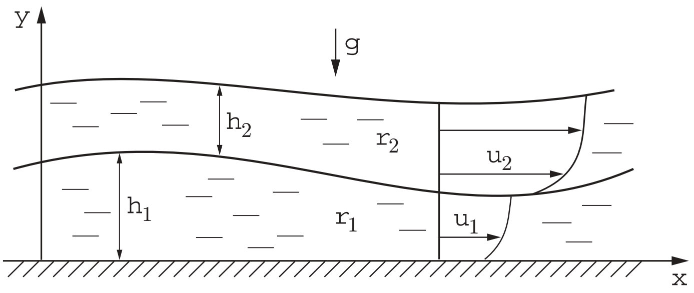

Рис. 1

$$
\begin{gathered}
u_{ix} + v_{iy} = 0, \qquad h_{1t} + u_1(t,x,h_1)h_{1x} = v_1(t,x,h_1), \qquad v_1(t,x,0) = 0, \\
h_{1t} + u_2(t,x,h_1)h_{1x} = v_2(t,x,h_1), \\
(h_1+h_2)_t + u_2(t,x,h_1+h_2)(h_1+h_2)_x = v_2(t,x,h_1+h_2), \\
u_i(0,x,y) = u_{i0}(x,y), \quad v_i(0,x,y) = v_{i0}(x,y), \quad h_i(0,x) = h_{i0}(x) \qquad (i = 1,2).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Значение индекса $i = 1$ соответствует гидродинамическим величинам в нижнем слое жидкости, $i = 2$ — в верхнем слое (рис. 1). Переменные $u_i^* = (aH_0)^{1/2}u_i$, $v_i^* = (aH_0)^{1/2}H_0L_0^{-1}v_i$, $\rho_i^* = R_0\rho_i$, $p_i^* = R_0aH_0p_i$, $t^* = L_0(aH_0)^{-1/2}t$, $x^* = L_0x$, $y^* = H_0y$ — размерные компоненты вектора скорости, плотность, давление, время и декартовы координаты; u_i, v_i, ρ_i, p_i, t, x, y — соответствующие им безразмерные величины. Параметры L_0 и H_0 определяют характерный горизонтальный и вертикальный масштабы; параметр R_0 имеет размерность плотности, a — ускорения; g — безразмерное ускорение свободного падения; $h_1(t,x)$, $h_2(t,x)$ — глубины слоев жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$).

В приближении длинных волн безразмерный параметр $\varepsilon = H_0/L_0$ считается малым. Пренебрегая членами порядка ε^2 в уравнениях (1), получаем следующие выражения для гидростатического распределения давления:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= g\rho_1(h_1 - y) + g\rho_2h_2 + p_0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant h_1), \\
p_2 &= g\rho_2(h_1 + h_2 - y) + p_0 \qquad (h_1 \leqslant y \leqslant h_1 + h_2).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Интегрирование уравнения неразрывности с учетом краевых условий дает выражения для вертикальной компоненты вектора скорости в слоях

$$
v_1 = -\int_0^y u_{1x}(t,x,y')\,dy', \qquad v_2 = -\int_{h_1}^y u_{2x}(t,x,y')\,dy' + h_{1t} + u_2(t,x,h_1)h_{1x},
$$

и система (1) при $\varepsilon = 0$ принимает вид

$$
\begin{gathered}
u_{1t} + u_1u_{1x} + v_1u_{1y} + gh_{1x} + grh_{2x} = 0, \qquad h_{1t} + \Big(\int_0^{h_1} u_1\,dy\Big)_x = 0, \\
u_{2t} + u_2u_{2x} + v_2u_{2y} + g(h_{1x} + h_{2x}) = 0, \qquad h_{2t} + \Big(\int_{h_1}^{h_1+h_2} u_2\,dy\Big)_x = 0
\end{gathered} \tag{3}
$$

($r = \rho_2/\rho_1$; выражения для $v_i(t,x,y)$ приведены выше; начальные данные те же). Следует отметить, что в рассматриваемом приближении завихренность потока в слое пропорциональна u_{iy} и в случае отсутствия сдвига скорости по глубине система (3) сводится к известным уравнениям двухслойной мелкой воды [6]. Рассмотрим течения с монотонным по глубине профилем скорости. Пусть для определенности $u_{iy} > 0$ и $u_1 < u_2$.

Анализ характеристических свойств уравнений двухслойной мелкой воды для сдвиговых течений (3) удобно проводить в полулагранжевой системе координат на основе предложенного В. М. Тешуковым обобщения понятий характеристик и гиперболичности для систем с операторными коэффициентами [4, 7]. Переход к полулагранжевым переменным x, λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ осуществляется заменой переменной [10]

$$y = \begin{cases} \Phi_1(t,x,\lambda), & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant h_1, \\ h_1(t,x) + \Phi_2(t,x,\lambda), & \text{если } h_1 < y \leqslant h_1 + h_2. \end{cases} \tag{4}$$

Функции $\Phi_i(t,x,\lambda)$ — решения следующих задач Коши:

$$\Phi_{1t} + u_1(t,x,\Phi_1)\Phi_{1x} = v_1(t,x,\Phi_1), \qquad \Phi_1|_{t=0} = \lambda h_1(0,x);$$
$$(h_1+\Phi_2)_t + u_2(t,x,h_1+\Phi_2)(h_1+\Phi_2)_x = v_2(t,x,h_1+\Phi_2),$$
$$(h_1+\Phi_2)|_{t=0} = h_1(0,x) + \lambda h_2(0,x).$$

Замена обратима, если $\Phi_{i\lambda} \neq 0$ (полагаем $\Phi_{i\lambda} > 0$).

Для определения функций $u_i(t,x,\lambda)$, $H_i(t,x,\lambda) = \Phi_{i\lambda}$ возникает интегродифференциальная система уравнений

$$\begin{gathered} u_{1t} + u_1 u_{1x} + g\int_0^1 H_{1x}\,d\lambda + gr\int_0^1 H_{2x}\,d\lambda = 0, \qquad H_{1t} + H_1 u_{1x} + u_1 H_{1x} = 0, \\ u_{2t} + u_2 u_{2x} + g\int_0^1 H_{1x}\,d\lambda + g\int_0^1 H_{2x}\,d\lambda = 0, \qquad H_{2t} + H_2 u_{2x} + u_2 H_{2x} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

с начальными данными $u_i(0,x,\lambda) = u_{0i}(x,\lambda)$, $H_i(0,x,\lambda) = H_{0i}(x,\lambda)$.

Если в результате решения системы уравнений (5) функции $u_i(t,x,\lambda)$, $H_i(t,x,\lambda)$ найдены, то формулы $\Phi_{i\lambda} = H_i$, $\Phi_i(t,x,0) = 0$ позволяют найти Φ_i и глубины слоев $h_i = \Phi_i(t,x,1)$. По формулам (2), (4) определяется давление, выражения для v_i дают возможность вычислить вертикальные компоненты вектора скорости. Далее найдем условия гиперболичности уравнений двухслойной вихревой мелкой воды (5).

2. Характеристические свойства уравнений (5). Система (5) представима в виде

$$\boldsymbol{U}_t + A\boldsymbol{U}_x = 0, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{U} = (u_1, H_1, u_2, H_2)^{\text{т}}$ — искомый вектор;

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & g\int_0^1 \ldots\,d\lambda & 0 & gr\int_0^1 \ldots\,d\lambda \\ H_1 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & g\int_0^1 \ldots\,d\lambda & u_2 & g\int_0^1 \ldots\,d\lambda \\ 0 & 0 & H_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

— матрица с операторными коэффициентами.

Согласно [7] характеристическая кривая системы (6) определяется дифференциальным уравнением $x'(t) = k(t,x)$, где скорость распространения характеристики k является собственным значением задачи

$$(\boldsymbol{F}, (A - kI)\boldsymbol{\varphi}) = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) относительно векторного функционала $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ ищется в классе локально интегрируемых либо обобщенных функций. Действие функционала $\boldsymbol{F}$ осуществляется по переменной λ (t и x рассматриваются как параметры); I — тождественное отображение. Действие функционала $\boldsymbol{F}$ на уравнение (6) дает соотношение на характеристике

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}_t + k\boldsymbol{U}_x) = 0. \tag{8}$$

Система (6) является обобщенно-гиперболической [7], если все собственные значения k вещественные и совокупность соотношений на характеристиках (8) эквивалентна уравнениям (6) (т. е. система собственных функционалов полна в рассматриваемом пространстве).

Из уравнений (7) с учетом независимости компонент пробной вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\text{т}}$ получаем равенства

$$\begin{gathered}
(F_1, (u_1 - k)\varphi_1) + (F_2, H_1\varphi_1) = 0, \\
g\int\limits_0^1 \varphi_2\,d\lambda(F_1, 1) + (F_2, (u_1 - k)\varphi_2) + g\int\limits_0^1 \varphi_2\,d\lambda(F_3, 1) = 0, \\
(F_3, (u_2 - k)\varphi_3) + (F_4, H_2\varphi_3) = 0, \\
gr\int\limits_0^1 \varphi_4\,d\lambda(F_1, 1) + g\int\limits_0^1 \varphi_4\,d\lambda(F_3, 1) + (F_4, (u_2 - k)\varphi_4) = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Рассмотрим множество чисел k, принадлежащих комплексной плоскости, за исключением отрезков $[u_{10}, u_{11}]$ и $[u_{20}, u_{21}]$, где $u_{i0} = u_i(t,x,0)$, $u_{i1} = u_i(t,x,1)$. Из системы (9) следует

$$\begin{gathered}
(F_1, \psi_1) = -(F_2, (u_1 - k)^{-1}H_1\psi_1), \\
(F_3, \psi_3) = -(F_4, (u_2 - k)^{-1}H_2\psi_3),
\end{gathered} \tag{10}$$

где $\psi_{1,2} = (u_1 - k)\varphi_{1,2}$; $\psi_{3,4} = (u_2 - k)\varphi_{3,4}$. Поэтому действие компонент F_2, F_4 вектор-функционала $\boldsymbol{F}$ представимо в виде

$$\begin{gathered}
(F_2, \psi_2) = g[(F_2, (u_1 - k)^{-1}H_1) + (F_4, (u_2 - k)^{-1}H_2)]\int\limits_0^1 (u_1 - k)^{-1}\psi_2\,d\lambda, \\
(F_4, \psi_4) = g[r(F_2, (u_2 - k)^{-1}H_1) + (F_4, (u_2 - k)^{-1}H_2)]\int\limits_0^1 (u_1 - k)^{-1}\psi_4\,d\lambda.
\end{gathered} \tag{11}$$

Полагая в формулах (11) $\psi_2 = (u_1 - k)^{-1}H_1$, $\psi_4 = (u_2 - k)^{-1}H_2$ и приравнивая к нулю соответствующий определитель однородной относительно $(F_2, (u_1 - k)^{-1}H_1)$ и $(F_4, (u_2 - k)^{-1}H_2)$ системы, получаем характеристическое уравнение

$$\chi(k) = 1 - g\int\limits_0^1 \frac{H_1\,d\lambda}{(u_1 - k)^2} - g\int\limits_0^1 \frac{H_2\,d\lambda}{(u_2 - k)^2} + g^2\mu\int\limits_0^1 \frac{H_1\,d\lambda}{(u_1 - k)^2}\int\limits_0^1 \frac{H_2\,d\lambda}{(u_2 - k)^2} = 0, \tag{12}$$

где $\mu = 1 - r$ ($0 < \mu < 1$).

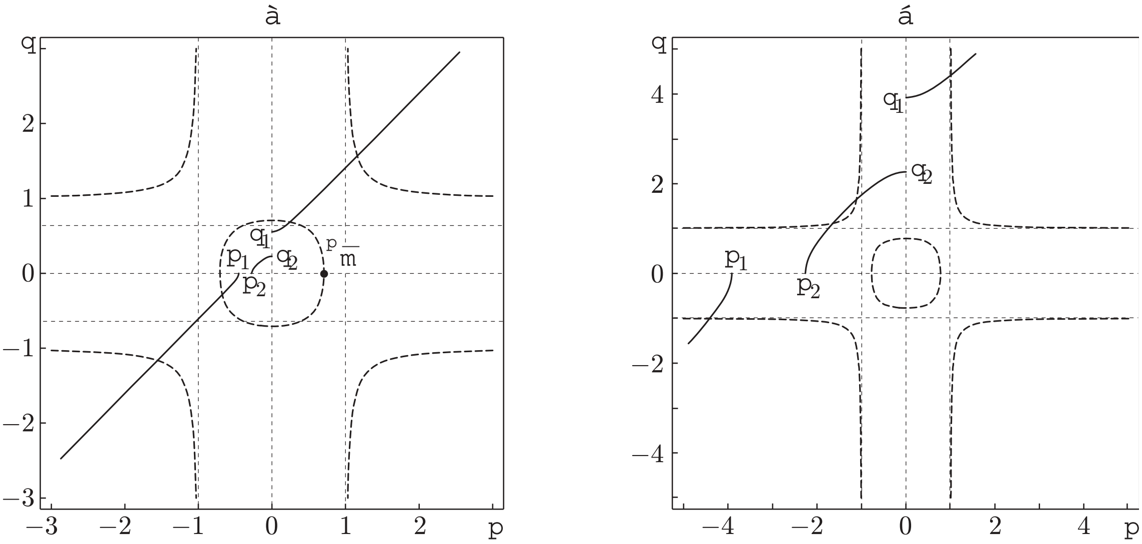

Рис. 2

Как показано в [6], в безвихревом случае уравнения двухслойной мелкой воды гиперболичны на рассматриваемом решении, если существует четыре вещественных корня характеристического уравнения. Поэтому в данном случае наиболее естественной будет ситуация, когда на рассматриваемом решении интегродифференциальной системы (5) имеется также четыре вещественных характеристических корня k_i. Ввиду сложности и нелинейности уравнения (12) его анализ удобно проводить с использованием геометрической интерпретации, предложенной в [6] для осредненной модели. Обозначим

$$\frac{1}{p^2(k)} = g\int\limits_0^1 \frac{H_1\,d\lambda}{(u_1-k)^2}, \qquad \frac{1}{q^2(k)} = g\int\limits_0^1 \frac{H_2\,d\lambda}{(u_2-k)^2} \tag{13}$$

(знаки величин $p(k)$ и $q(k)$ совпадают со знаками величин u_1-k и u_2-k соответственно; $k\in(-\infty,u_{10})\cup(u_{11},u_{20})\cup(u_{21},\infty)$). Тогда уравнение (12) представимо в виде

$$(p^2-1)(q^2-1)=r. \tag{14}$$

На плоскости безразмерных переменных (p,q) уравнение (14) — уравнение кривой четвертого порядка, имеющей четыре оси симметрии (штриховая кривая на рис. 2). Количество вещественных корней уравнения (12) определяется числом пересечений кривой (14) с параметрически заданной разрывной линией (13) (сплошная кривая на рис. 2). В безвихревом случае формулы (13) задают прямую на плоскости (p,q). Определение количества вещественных корней уравнения (12) удобно проводить с использованием величин

$$p_1=-\Big(g\int\limits_0^1\frac{H_1\,d\lambda}{(u_1-u_{21})^2}\Big)^{-1/2}, \qquad p_2=-\Big(g\int\limits_0^1\frac{H_1\,d\lambda}{(u_1-u_{20})^2}\Big)^{-1/2},$$

$$q_1=\Big(g\int\limits_0^1\frac{H_2\,d\lambda}{(u_2-u_{10})^2}\Big)^{-1/2}, \quad q_2=\Big(g\int\limits_0^1\frac{H_2\,d\lambda}{(u_2-u_{11})^2}\Big)^{-1/2}.$$

Отметим, что $p_1<p_2<0$, $0<q_2<q_1$ и параметрически заданная кривая $p=p(k)$, $q=q(k)$ монотонно возрастает на интервалах $(-\infty,u_{10})$, (u_{11},u_{20}), (u_{21},∞). Сформулируем достаточные условия существования четырех вещественных корней уравнения (12).

Если на заданном решении u_i, H_i выполняется одно из следующих условий:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad q_1 < \sqrt{\mu}, \quad p_1 > -\sqrt{\mu};\\
&2)\quad q_2 > \sqrt{\mu}, \quad p_1 > -\sqrt{\mu};\\
&3)\quad q_1 < \sqrt{\mu}, \quad p_2 < -\sqrt{\mu};\\
&4)\quad q_2 > \sqrt{\mu}, \quad p_2 < -\sqrt{\mu}, \quad p^2(k_*) + q^2(k_*) \leqslant \mu,\\
&5)\quad p^2(k_*) > 1 + \sqrt{r}, \quad q^2(k_*) > 1 + \sqrt{r} \quad (k_* = (u_{20} + u_{11})/2),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

то уравнение (12) *имеет четыре вещественных корня.*

Каждое из условий (15) гарантирует существование четырех точек пересечения кривых (13) и (14), соответствующих вещественным корням характеристического уравнения (12). Рис. 2,*а* соответствует условию 1), а рис. 2,*б* — условию 5). При выполнении условия 4) или 5) имеет место следующее расположение характеристических корней: $k_1 < u_1 < k_2 < k_3 < u_2 < k_4$. В случае 1) справедливы неравенства $k_1 < k_2 < u_1 < u_2 < k_3 < k_4$; при выполнении условия 2) или 3) на промежутке (u_{11}, u_{20}) имеется один корень, на интервале $(-\infty, u_{10})$ — один (два) и на интервале (u_{21}, ∞) — два (один) корня.

В случае потенциальных течений, когда характеристическое уравнение является полиномом четвертой степени, использования приведенной геометрической интерпретации достаточно для выяснения типа уравнений. Для вихревых течений уравнение (12), определяющее характеристические корни, не является полиномом и условия отсутствия комплексных корней более сложные.

Определим комплексные функции $\chi_i(z)$

$$
\chi_i(z) = \frac{1}{\omega_{i1}(u_{i1} - z)} - \frac{1}{\omega_{i0}(u_{i0} - z)} - \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\frac{1}{\omega_i'}\Big) \frac{d\nu}{u_i' - z},
$$

где $\omega_i = u_{i\lambda}/H_i$; $u_i' = u_i(t, x, \nu)$. Тогда функция $\chi(z)$ представима в виде

$$
\chi(z) = 1 + g\chi_1(z) + g\chi_2(z) + g^2\mu\chi_1(z)\chi_2(z).
$$

Условия отсутствия комплексных корней уравнения (12) формулируются в терминах предельных значений функции $\chi(z)$ из верхней и нижней полуплоскости на вещественной оси.

Лемма. *Уравнение* (12) *на решении $u_i(t, x, \lambda)$, $H_i(t, x, \lambda)$ не имеет комплексных корней, если выполнено условие*

$$
\Delta \arg(\chi^+(u)/\chi^-(u)) = 2\pi(n - 4), \qquad \chi^\pm \neq 0 \tag{16}
$$

(*приращение аргумента вычисляется при изменении u от u_{10} до u_{11} и от u_{20} до u_{21}; n — число вещественных нулей функции χ*).

Доказательство проводится на основе применения принципа аргумента к аналитической функции $\chi(z)$ и аналогично приведенному в [11] для баротропной однослойной модели.

В работе [8] рассмотрена n-слойная модель и получено характеристическое уравнение, совпадающее при $n = 2$ с уравнением (12). Там же приведены некоторые условия существования четырех вещественных корней для двухслойной модели в терминах корней вспомогательных функций вида $1 + \mu g\chi_i$ и $1 + (1 + \sqrt{r})g\chi_i$. Имеется два существенных отличия условий, приведенных в [8], от условий (15), предлагаемых в данной работе. В [8] не рассмотрены случаи, когда на промежутке (u_{11}, u_{20}) имеется один характеристический корень, но при этом общее количество вещественных корней равно четырем (что соответствует условию 3) или 4) в формулах (15)). В случае, когда на промежутке (u_{11}, u_{20}) имеется два корня, но общее число корней равно четырем, приведено лишь одно условие (аналог условия 5), соответствующий большим значениям числа Фруда). Другая ситуация, когда на рассматриваемом решении имеется четыре корня (12) и два из них на интервале (u_{11}, u_{20}) (условие 4) в (15)), в [8] не отражена.

Собственные функционалы. С использованием формул (10), (11) нетрудно найти собственные функционалы, отвечающие корням $k = k_i$ характеристического уравнения (12):

$$(\boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{\varphi}(\lambda)) = -(1-\gamma_2^i)\Big(\int\limits_0^1 \frac{H_1\varphi_1\,d\lambda}{(u_1-k_i)^2} - \int\limits_0^1 \frac{\varphi_2\,d\lambda}{(u_1-k_i)^2}\Big) - r\gamma_1^i\Big(\int\limits_0^1 \frac{H_2\varphi_3\,d\lambda}{u_2-k_i} - \int\limits_0^1 \frac{\varphi_4\,d\lambda}{u_2-k_i}\Big),$$

$$\gamma_j^i = g\int\limits_0^1 \frac{H_j\,d\nu}{(u_j-k_i)^2}, \qquad j=1,2$$

(в силу (12) выполняется равенство $1-\gamma_1^i-\gamma_2^i+\mu\gamma_1^i\gamma_2^i = 0$).

Покажем, что задача (7) имеет нетривиальные решения, если $k \in [u_{10}, u_{12}] \cup [u_{20}, u_{21}]$, т. е. существует непрерывный характеристический спектр, состоящий из двух отрезков вещественной прямой. Пусть $k = u_1(t,x,\lambda)$. В этом случае система (9) принимает вид

$$\begin{gathered}
(F_1, (u_1'-u_1)\varphi_1') + (F_2, H_1'\varphi_1') = 0,\\
g\int\limits_0^1 \varphi_2\,d\lambda(F_1,1) + (F_2,(u_1'-u_1)\varphi_2') + g\int\limits_0^1 \varphi_2\,d\lambda(F_3,1) = 0,\\
(F_3, (u_2'-u_1)\varphi_3') + (F_4, H_2'\varphi_3') = 0,\\
gr\int\limits_0^1 \varphi_4\,d\lambda(F_1,1) + g\int\limits_0^1 \varphi_4\,d\lambda(F_3,1) + (F_4,(u_2'-u_1)\varphi_4') = 0.
\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь функционалы действуют по переменной ν, для краткости используются обозначения $f' = f(t,x,\nu)$, $f = f(t,x,\lambda)$. Так как $H_i \neq 0$, то имеют место равенства

$$(F_2,\psi') = -(F_1,(u_1'-u_1){H'}_1^{-1}\psi'), \qquad (F_4,\psi') = -(F_3,(u_2'-u_1){H'}_2^{-1}\psi')$$

и система (17) сводится к уравнениям

$$g\int\limits_0^1 \varphi_2\,d\lambda(F_1,1) + g\int\limits_0^1 \varphi_2\,d\lambda(F_3,1) - (F_1,(u_1'-u_1)^2{H'}_1^{-1}\varphi_2') = 0,$$

$$gr\int\limits_0^1 \varphi_4\,d\lambda(F_1,1) + g\int\limits_0^1 \varphi_4\,d\lambda(F_3,1) - (F_3,(u_2'-u_1)^2{H'}_2^{-1}\varphi_4') = 0.$$

Эта система имеет два различных решения $\boldsymbol{F}^{1\lambda}$ и $\boldsymbol{F}^{2\lambda}$:

$$(\boldsymbol{F}^{1\lambda}, \boldsymbol{\varphi}(\nu)) = (1-\alpha\mu)g\int\limits_0^1 \frac{H_1'(\varphi_1'-\varphi_1)\,d\nu}{(u_1'-u_1)^2} + (1-\alpha)\varphi_1(\lambda) -$$

$$- (1-\alpha\mu)g\int\limits_0^1 \frac{\varphi_2'\,d\nu}{u_1'-u_1} + rg\int\limits_0^1 \frac{H_2'\varphi_3'\,d\nu}{(u_2'-u_1)^2} - rg\int\limits_0^1 \frac{\varphi_4'\,d\nu}{u_2'-u_1},$$

$$(\boldsymbol{F}^{2\lambda}, \boldsymbol{\varphi}(\nu)) = -\varphi_{1\lambda} + u_{1\lambda}H_1^{-1}\varphi_2(\lambda).$$

Аналогично находим собственные функционалы $\boldsymbol{F}^{3\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{4\lambda}$, соответствующие значениям $k = u_2(t, x, \lambda)$:

$$(\boldsymbol{F}^{3\lambda}, \boldsymbol{\varphi}(\nu)) = g \int\limits_0^1 \frac{H_1' \varphi_1' \, d\nu}{(u_1' - u_2)^2} - g \int\limits_0^1 \frac{\varphi_2' \, d\nu}{(u_1' - u_2)^2} + (1 - \beta) \varphi_3(\lambda) +$$

$$+ (1 - \beta\mu) g \int\limits_0^1 \frac{H_2' (\varphi_3' - \varphi_3) \, d\nu}{u_2' - u_2} - (1 - \beta\mu) g \int\limits_0^1 \frac{\varphi_4' \, d\nu}{u_2' - u_2},$$

$$(\boldsymbol{F}^{4\lambda}, \boldsymbol{\varphi}(\nu)) = -\varphi_{3\lambda} + u_{2\lambda} H_2^{-1} \varphi_4(\lambda).$$

Здесь использованы обозначения

$$\alpha = g \int\limits_0^1 \frac{H_2' \, d\nu}{(u_2' - u_1)^2}, \qquad \beta = g \int\limits_0^1 \frac{H_1' \, d\nu}{(u_1' - u_2)^2}.$$

Соотношения на характеристиках. Действуя собственными функционалами $\boldsymbol{F}^{i\lambda}$, $\boldsymbol{F}^i$ на систему уравнений (5), получаем соотношения на характеристиках

$$\omega_{1t} + u_1 \omega_{1x} = 0, \qquad \omega_{2t} + u_2 \omega_{2x} = 0,$$

$$\frac{1 - \alpha\mu}{rg} \Big(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \Big) \Big(u_1 - g \int\limits_0^1 \frac{H_1' \, d\nu}{u_1' - u_1} \Big) - \Big(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \Big) \int\limits_0^1 \frac{H_2' \, d\nu}{u_2' - u_1} = 0,$$

$$(1 - \beta\mu) \Big(\frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x} \Big) \Big(u_2 - g \int\limits_0^1 \frac{H_2' \, d\nu}{u_2' - u_2} \Big) - \tag{18}$$

$$- r \Big(\frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x} \Big) g \int\limits_0^1 \frac{H_2' \, d\nu}{u_1' - u_2} + \mu\beta \Big(\frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial x} \Big) u_2 = 0,$$

$$\frac{1 - \gamma\mu}{rg} \Big(\frac{\partial}{\partial t} + k_i \frac{\partial}{\partial x} \Big) \Big(k_i - g \int\limits_0^1 \frac{H_1 \, d\lambda}{u_1 - k_i} \Big) - \Big(\frac{\partial}{\partial t} + k_i \frac{\partial}{\partial x} \Big) \int\limits_0^1 \frac{H_2 \, d\lambda}{u_2 - k_i} = 0.$$

Далее предполагаем, что на рассматриваемом решении выполнено одно из условий (15) (т. е. имеется четыре вещественных корня уравнения (12)) и выполняется условие отсутствия комплексных характеристик (16). Рассмотрим вопрос о полноте системы собственных функционалов $\boldsymbol{F}^{i\lambda}$, $\boldsymbol{F}^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Для доказательства эквивалентности уравнений (5) и соотношений на характеристиках (18) надо показать, что равенства $(\boldsymbol{F}^{i\lambda}, \boldsymbol{S}) = 0$, $(\boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{S}) = 0$ выполнены, если и только если вектор-функция $\boldsymbol{S}(\lambda) = (S_1, S_2, S_3, S_4)$ тождественно равна нулю.

Из уравнений $(\boldsymbol{F}^{2\lambda}, \boldsymbol{S}) = 0$ и $(\boldsymbol{F}^{4\lambda}, \boldsymbol{S}) = 0$ следует, что $S_2 = \omega_1^{-1} S_{1\lambda}$, $S_4 = \omega_2^{-1} S_{3\lambda}$. С учетом этого запишем результаты действия функционалов $\boldsymbol{F}^{1\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{3\lambda}$ на векторфункцию $\boldsymbol{S}$:

$$
\begin{gathered}
\frac{1-\alpha}{rg}\,S_1-\frac{1-\mu\alpha}{r}\int\limits_0^1\frac{1}{\omega_1'}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{S_1'-S_1}{u_1'-u_1}\Big)\,d\nu-\int\limits_0^1\frac{1}{\omega_2'}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{S_3'}{u_2'-u_1}\Big)\,d\nu=0,\\
\frac{1-\beta}{g}\,S_3-(1-\mu\beta)\int\limits_0^1\frac{1}{\omega_2'}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{S_3'-S_3}{u_1'-u_1}\Big)\,d\nu-\int\limits_0^1\frac{1}{\omega_1'}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{S_1'}{u_1'-u_2}\Big)\,d\nu=0.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Нетрудно проверить, что функции

$$
l_1^i=r\gamma_2^i(u_1-k_i)^{-1},\qquad l_3^i=(1-\gamma_1^i)(u_2-k_i)^{-1}
\tag{20}
$$

удовлетворяют системе (19). Поэтому искомые функции S_1 и S_2 можно представить в виде

$$
S_1=S_1^*+r\sum_{i=1}^4\frac{C_i\gamma_2^i}{u_1-k_i},\qquad S_3=S_3^*+\sum_{i=1}^4\frac{C_i(1-\gamma_1^i)}{u_2-k_i}.
$$

Выбором не зависящих от λ величин C_i добиваемся того, что S_1^* и S_3^* обращаются в нуль при $\lambda=0$ и $\lambda=1$. После несложных преобразований получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений для определения функций $\tilde S_1(u_1)=S_1^*(\lambda)$ и $\tilde S_3(u_2)=S_3^*(\lambda)$:

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{Re}\,(\chi^+(u_1))}{rg}\,\tilde S_1-\frac{1+g\mu\chi_2(u_1)}{r}\int\limits_{u_{10}}^{u_{11}}\Big(\frac{1}{\omega_1'}\Big)_{u_1'}\frac{\tilde S_1'\,du_1'}{u_1'-u_1}+\int\limits_{u_{20}}^{u_{21}}\Big(\frac{1}{\omega_2'}\Big)_{u_2'}\frac{\tilde S_3'\,du_2'}{u_2'-u_1}=0,\\
\frac{\mathrm{Re}\,(\chi^+(u_2))}{g}\,\tilde S_3+\int\limits_{u_{10}}^{u_{11}}\Big(\frac{1}{\omega_1'}\Big)_{u_1'}\frac{\tilde S_1'\,du_1'}{u_1'-u_2}+(1+\mu g\chi_1(u_2))\int\limits_{u_{20}}^{u_{21}}\Big(\frac{1}{\omega_2'}\Big)_{u_2'}\frac{\tilde S_3'\,du_2'}{u_2'-u_2}=0.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Сингулярные интегральные уравнения (21) содержат как характеристическую часть, так и фредгольмов оператор первого рода, что существенно осложняет их решение.

В случае существования только тривиального решения уравнений (21) система собственных функционалов $\boldsymbol{F}^{i\lambda}$, $\boldsymbol{F}^i$ $(i=1,2,3,4)$ полна. Действительно, из соотношений $(\boldsymbol{F}^i,\boldsymbol{S})=0$ получаем линейную однородную систему четырех уравнений $\Gamma\boldsymbol{C}=0$ для нахождения C_i. Компоненты матрицы Γ определяются формулой $\Gamma_{ij}=(\boldsymbol{F}^i,\boldsymbol{l}^j)$, где вектор-функция $\boldsymbol{l}^j$ имеет компоненты l_1^j, l_3^j, заданные формулой (20), и $l_2^j=\omega_1^{-1}l_{1\lambda}^j$, $l_4^j=\omega_2^{-1}l_{3\lambda}^j$. При $i\neq j$

$$
\Gamma_{ij}=-\frac{r}{g(k_i-k_j)}\big(\gamma_2^j(1-\gamma_2^i)(\gamma_1^i-\gamma_1^j)+\gamma_1^i(1-\gamma_1^j)(\gamma_2^i-\gamma_2^j)\big)=0,
$$

так как величины γ_1^i и γ_2^i в силу характеристического уравнения (12) связаны соотношением $1-\gamma_1^i-\gamma_2^i+\mu\gamma_1^i\gamma_2^i=0$. Диагональные компоненты матрицы Γ отличны от нуля:

$$
\Gamma_{ii}=\frac{r\gamma_2^i(1-\gamma_2^i)}{g(\mu\gamma_2^i-1)}\,\chi'(k_i)\neq 0.
$$

Таким образом, вопрос о гиперболичности уравнений двухслойной вихревой мелкой воды (5) сведен к анализу однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений (21).

3. Случай слабого скачка плотности. Рассмотрим ситуацию, когда стратификация жидкости по плотности практически отсутствует $\rho_1 \to \rho_2$ $(r \to 1,\ \mu \to 0)$. Выполняя предельный переход в уравнениях (5), получаем более простую модель однородной жидкости со скольжением слоев. В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\chi(k) = 1 - g\int\limits_0^1 \frac{H_1\,d\lambda}{(u_1-k)^2} - g\int\limits_0^1 \frac{H_2\,d\lambda}{(u_2-k)^2} = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) имеет четыре вещественных корня, если выполняется условие $\chi(k_*) > 0$ $(k_* = (u_{11}+u_{20})/2)$ или эквивалентное ему условие 5) в (15). Система соотношений на характеристиках (18) приводится к интегральным инвариантам Римана

$$R_j = u_j - g\int\limits_0^1 \frac{H_1'\,d\nu}{u_1'-u_j} - g\int\limits_0^1 \frac{H_2'\,d\nu}{u_2'-u_j}, \qquad \omega_j = u_{j\lambda}H_j^{-1} \qquad (j=1,2),$$

$$r_i = k_i - g\int\limits_0^1 \frac{H_1'\,d\nu}{u_1'-k_i} - g\int\limits_0^1 \frac{H_2'\,d\nu}{u_2'-k_i} \qquad (i=1,2,3,4),$$

сохраняющимся вдоль характеристик

$$(\partial_t + u_j\partial_x)R_j = 0, \qquad (\partial_t + u_j\partial_x)\omega_j = 0, \qquad (\partial_t + k_i\partial_x)r_i = 0.$$

Кроме того, система (21) при $\mu = 0$ представима в виде однородного сингулярного интегрального уравнения, союзного с характеристическим, на разомкнутых контурах [12]

$$A(\xi)S(\xi) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(\xi')S(\xi')\,d\xi'}{\xi'-\xi} = 0. \tag{23}$$

Здесь $A = \operatorname{Re}(\chi^+)$; $B = \operatorname{Im}(\chi^+)$; $S(\xi) = \tilde S_1$, если $\xi \in [u_{10}, u_{11}]$, и $S(\xi) = \tilde S_3$, если $\xi \in [u_{20}, u_{21}]$; L — разрывная линия, состоящая из отрезков $[u_{10}, u_{11}]$ и $[u_{20}, u_{21}]$; χ^+ — предельные значения комплексной функции

$$\chi(z) = 1 + g\sum_{j=1}^2 \Big(\frac{1}{\omega_{j1}(u_{j1}-z)} - \frac{1}{\omega_{j0}(u_{j0}-z)} - \int\limits_{u_{j0}}^{u_{j1}} \Big(\frac{1}{\omega_j'}\Big)_{u_j'} \frac{du_j'}{u_j'-z}\Big)$$

из верхней полуплоскости на вещественной оси.

Введением функции

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{B(\xi)S(\xi)\,d\xi}{\xi - z}$$

решение уравнения (23) сводится к решению однородной задачи сопряжения (задачи Римана)

$$\Psi^+(z) = G(z)\Psi^-(z), \qquad G(z) = \chi^+(z)/\chi^-(z) \tag{24}$$

для определения аналитической комплексной функции $\Psi(z)$ по граничному условию на разрывной линии L.

Если индекс функции χ равен нулю, то задача сопряжения (24) имеет только тривиальное решение в классе функций, исчезающих на бесконечности [12]. При выполнении условия 5) в (15) и условия (16) индекс задачи сопряжения равен нулю, следовательно,

$S \equiv 0$. Таким образом, полнота системы собственных функционалов доказана и гиперболичность модели (5) при $r = 1$ установлена.

4. Случай сильного скачка плотности. Другой предельный случай возникает при сильной стратификации, когда плотность в нижнем слое ρ_1 существенно больше плотности в верхнем слое ρ_2, толщина которого мала. Полагая в уравнениях (5) $r = 0$, получаем упрощенную модель двухслойной жидкости. Очевидно, что уравнения движения распадаются: в каждом из слоев движение жидкости описывается однослойной моделью вихревой мелкой воды [11]. При этом линия раздела жидкостей, задаваемая уравнением $y = h_1(t, x)$, формируется только под влиянием тяжелой жидкости в нижнем слое. Если функции u_1, H_1 найдены из первых двух уравнений системы (5) при $r = 0$, то для определения функций u_2, H_2 возникает такая же задача, но с правой частью, соответствующей случаю, когда для верхнего слоя "дно" ($y = h_1(t, x)$) изменяется по заданному закону. В [11] показано, что уравнения однослойной вихревой мелкой воды приводятся к инвариантам Римана и модель является обобщенно-гиперболической для течений с монотонным по глубине профилем скорости при выполнении условий

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \qquad \chi^\pm \neq 0$$

для предельных значений аналитической функции $\chi(z) = \int\limits_0^1 (u' - z)^{-2} H' \, d\nu$ на отрезке $[u(t, x, 0), u(t, x, 1)]$.

Заключение. Проведено теоретическое исследование распространения длинноволновых возмущений в двухслойной стратифицированной завихренной жидкости. Определены скорости распространения возмущений и сформулированы условия отсутствия комплексных характеристических корней, необходимые для гиперболичности модели. Вычислена характеристическая форма интегродифференциальной системы уравнений. Вопрос об эквивалентности исходной системы и характеристической формы сведен к исследованию разрешимости сингулярных интегральных уравнений. В предельных случаях сильной и слабой стратификации установлена обобщенная гиперболичность моделей и существование интегральных инвариантов Римана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
3. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
5. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
6. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной "мелкой воды" // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
7. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
8. **Грекова Т. В.** Характеристические свойства уравнений теории длинных волн в стратифицированной жидкости // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 95. С. 56–69.

9. **Чесноков А. А.** Длинные волны в двухслойной вихревой жидкости под крышкой // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 68–80.
10. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
11. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 27/X 2003 г.