

УДК 532.526.2  
DOI: 10.15372/PMTF202215183

## ОСОБЕННОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т. Р. Аманбаев

Южно-Казахстанский университет им. М. Ауэзова, Чимкент, Казахстан  
E-mail: tulegen\_amanbaev@mail.ru

С использованием уравнения Фолкнера — Скэн исследовано поведение поперечного течения жидкости в пограничном слое на пластине и клине при наличии и отсутствии отсоса и вдува на поверхности тела. С помощью численных методов показано, что при определенных условиях в пограничном слое возникают линии “притяжения” и “отталкивания”, вдоль которых поперечная скорость равна нулю, а также линии максимальных поперечных скоростей. Рассматриваются разные режимы поперечного течения в пограничном слое, зависящие от определяющих параметров задачи.

Ключевые слова: пограничный слой, поперечное течение, пластина, клин, отсос, вдув

**Введение.** В различных областях техники и химических технологиях широко распространены процессы, происходящие в пограничном слое вблизи обтекаемых поверхностей (тепло- и массообменные процессы, разделение суспензий путем фильтрации, осаждение капель и частиц дисперсной смеси на твердые поверхности и т. п.). При этом следует отметить, что на структуру пограничного слоя большое влияние оказывает поперечное течение среды. В частности, наличие поперечного потока приводит к искривлению линий тока жидкости в пограничном слое. Причем скорость поперечного течения существенно зависит от интенсивности отсоса (вдува) жидкости на поверхности тела. Этот эффект часто используется с целью управления поведением течения в пограничном слое (например, для изменения сопротивления тела, охлаждения поверхности и т. п.). Однако в литературе недостаточно внимания уделяется изучению характеристик поперечного течения в пограничном слое, в том числе при наличии отсоса и вдува жидкости [1–7].

Целью настоящей работы является подробный анализ характера поперечного течения в ламинарном пограничном слое при наличии и отсутствии потока массы на обтекаемой поверхности.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение в плоском стационарном ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости вблизи поверхности тела. Такие течения можно описать с помощью уравнений пограничного слоя, которые следуют из системы уравнений Навье — Стокса при упрощающих предположениях [8, 9]. Особый интерес представляют подобные (или автомодельные) решения этих уравнений. В [9] показано, что такие решения, в частности, существуют в случае, когда значение скорости течения на внешней границе пограничного слоя пропорционально степени текущего расстояния  $x$ , измеряемого

от передней критической точки, т. е. если  $U(x) = \Lambda x^m$  ( $\Lambda, m$  — постоянные, причем первая из них имеет размерность  $m^{1-m}/c$ , вторая является безразмерной). Вводится декартова система координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль поверхности, ось  $y$  — поперек нее, начало координат находится на передней кромке обтекаемого тела. В постановке задачи о пограничном слое обычно на твердой поверхности принимается условие прилипания, а на внешней границе пограничного слоя — условие набегающего потока:  $y = 0, u = v = 0; y \rightarrow \infty, u = U$  ( $u, v$  — составляющие скорости по осям  $x$  и  $y$ ).

В автомодельных переменных

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\zeta x}}, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\zeta x U}} \quad (1.1)$$

уравнение пограничного слоя и граничные условия принимают вид

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0; \quad (1.2)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (1.3)$$

( $\zeta$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\psi$  — функция тока; штрих означает производную по  $\eta$ ). Уравнение (1.2) представляет собой уравнение Фолкнера — Скэн. Решение краевой задачи (1.2), (1.3) принято называть автомодельным (или подобным) решением задачи о пограничном слое. Составляющие скорости жидкости в пограничном слое определяются следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U f', \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta U}{x}} [(m+1)f + (m-1)\eta f']. \quad (1.4)$$

В случае когда обтекаемая поверхность является проницаемой, т. е. на поверхности имеет место отсос (например, вследствие фильтрации) или вдув жидкости, граничное условие на ней принимает вид

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = v_0(x)$$

( $v_0(x)$  — заданная функция). Нетрудно показать, что при скорости

$$v_0(x) = -\frac{m+1}{2} C \sqrt{\frac{\zeta U}{x}}, \quad (1.5)$$

где  $C$  — коэффициент, характеризующий интенсивность оттока ( $C > 0$ ) или вдува ( $C < 0$ ) жидкости, первое условие в (1.3) видоизменяется, а остальные не меняются. Таким образом, имеем

$$f(0) = C, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (1.6)$$

Выбранный вид функции  $v_0(x)$  позволяет применить преобразование подобия (1.1) к граничному условию для  $v$  и представить его в автомодельных переменных. Несмотря на то что данная функция имеет специально подобранную форму, такой подход дает возможность изучить влияние отсоса и вдува на течение в пограничном слое и установить основные особенности поведения параметров течения. Заметим, что функция  $v_0(x)$  в форме (1.5) использовалась в работах [10, 11] для случая обтекания пластины ( $m = 0$ ) и ряде других работ, например в [12], а также в [5], где рассматривалась близкая к (1.5) функция.

Очевидно, для того чтобы в случае течения при наличии отсоса (вдува) на обтекаемой поверхности выполнялись допущения, лежащие в основе теории пограничного слоя, скорость отсоса (вдува)  $v_0$  должна быть одного порядка с величиной  $U \text{Re}^{-1/2}$  [8]. Поскольку допущения теории пограничного слоя справедливы при больших числах Рейнольдса,

значение  $v_0$  будет существенно меньше  $U$ . Например, при числе Рейнольдса  $Re \approx 10^6$  из указанного выше условия следует для скорости значение  $v_0 \approx 0,001U$  [8]. При такой малой скорости можно пренебречь влиянием отсоса на потенциальное течение и считать, что данный эффект не приводит к изменению потенциального течения вблизи обтекаемого тела. Распределение продольной скорости (1.4), вообще говоря, удовлетворяет условию  $u \rightarrow U$  при  $x \rightarrow 0$ , однако точку  $x = 0$  необходимо исключить из рассмотрения, чтобы избавиться от особенности в выражении для  $v$  [5].

Следует отметить, что существуют невязкие несжимаемые течения, в которых распределение скорости вблизи обтекаемой поверхности описывается приведенной выше формулой  $U(x) = \Lambda x^m$ . Например, эти распределения соответствуют продольному обтеканию пластины (при  $m = 0$ ) и клиновидного тела ( $m \neq 0$ ) с углом раствора  $\alpha = [2m/(m + 1)]\pi$  невязким несжимаемым однородным потоком. Поэтому подобные решения уравнения (1.2) называются также “клиновыми решениями” [13].

Далее рассмотрим случаи с различными значениями параметра  $m$ , причем  $0 \leq m < 1$ . Предполагается, что на проницаемой поверхности существует поперечный поток массы, скорость которого задается соотношением (1.5). Для расчета пограничного слоя, описываемого краевой задачей (1.2), (1.6), использовался метод пристрелки [14], позволяющий свести краевую задачу к задаче Коши. При этом для вычисления значений пристрелочного параметра применялся метод Ньютона, который обеспечивает квадратичную сходимость итерационного процесса. Задача Коши для дифференциального уравнения (1.2) (после приведения его к системе трех уравнений первого порядка) решалась с помощью численного метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования.

**2. Поперечное течение в пограничном слое на пластине.** При  $m = 0$  в случае продольного обтекания пластины из (1.2) получаем уравнение пограничного слоя

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

с краевыми условиями (1.6). В этом случае на внешней границе (при  $\eta \rightarrow \infty$ ) пограничного слоя для продольной и поперечной составляющих скорости с учетом (1.4) имеем

$$u = u_e = \Lambda \equiv U_0, \quad v = v_e = (1/2)\delta\sqrt{\zeta U_0/x}, \quad \delta = (\eta - f)_{\eta \rightarrow \infty} \quad (2.1)$$

( $U_0$  — скорость набегающего потока; индекс  $e$  соответствует внешнему потоку,  $0$  — набегающему потоку, отсосу или вдуву). Величина  $\delta$ , характеризующая поперечную скорость на внешней границе пограничного слоя, принимает постоянное значение, определяемое по результатам численного решения сформулированной краевой задачи и зависящее от параметра  $C$ , который характеризует интенсивность переноса массы через поверхность пластины.

Безразмерная поперечная скорость жидкости в пограничном слое при обтекании пластины вычисляется по формуле  $\bar{v} = (v/U_0)2\sqrt{xU_0/\zeta} = \eta f' - f$ , вытекающей из (1.4) при  $m = 0$ .

На рис. 1 показана зависимость поперечной скорости среды от автомодельной переменной  $\eta$  при наличии оттока жидкости и различных значениях параметра  $C > 0$ . Заметим, что существует критическое значение  $C = C_* = 1,0323$  (кривая 2), при котором поперечная скорость на внешней границе пограничного слоя (согласно рис. 1 с большой точностью можно принять, что  $\eta = 7$  соответствует границе пограничного слоя), определяемая из (2.1), равна нулю:  $\bar{v}_e = 0$ . Это означает, что поперечный поток, движущийся в направлении от пограничного слоя вследствие эффекта “вытеснения”, компенсируется оттоком жидкости на пластине, который формирует движение потока в направлении пластины. При этом внутри пограничного слоя поперечная скорость среды  $\bar{v} < 0$ . Заметим,

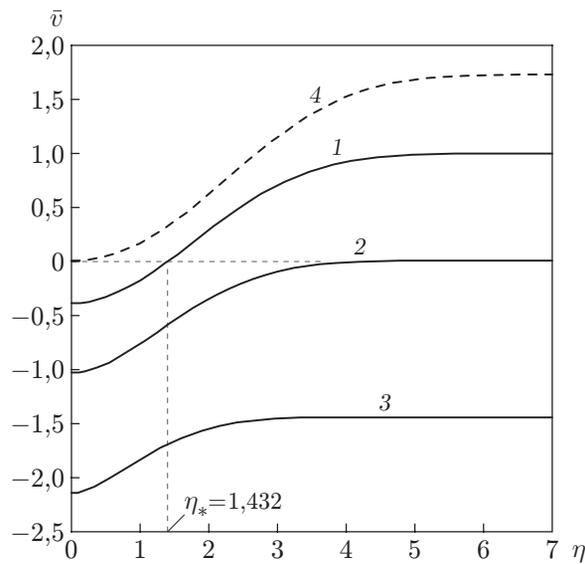


Рис. 1. Зависимость поперечной скорости среды от переменной  $\eta$  в пограничном слое на пластине при различных значениях коэффициента отсоса:  
 1 —  $C = 0,3915$ , 2 —  $C = C_* = 1,0323$ , 3 —  $C = 2,1464$ , 4 —  $C = 0$  (отсутствие отсоса)

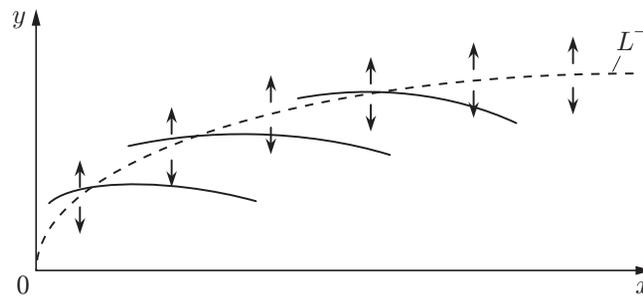


Рис. 2. Линии тока жидкости (сплошные кривые) в окрестности линии “отталкивания”  $L^-$  (штриховая кривая) в пограничном слое на пластине в случае  $0 < C < C_*$  (стрелки — направление поперечного течения)

что на внешней границе пограничного слоя при критическом отсосе линии тока жидкости направлены параллельно плоскости пластины, а внутри слоя — к пластине.

Картина течения в случае  $0 < C < C_*$  (кривая 1 на рис. 1) представлена на рис. 2, где штриховая линия  $L^-$  соответствует критическому значению  $\eta = \eta_*$ , при котором  $\bar{v} = 0$  (в частности, на рис. 1 видно, что при  $C = 0,3915$   $\eta_* = 1,432$ ). Таким образом, вдоль этой линии поперечная скорость  $\bar{v} = 0$ , а ниже и выше нее —  $\bar{v} < 0$  и  $\bar{v} > 0$  соответственно. Следовательно, данную кривую можно рассматривать как линию “отталкивания” по поперечной скорости. Вдоль оси  $y$  поперечная скорость увеличивается от значения  $v_0 < 0$  на пластине до нуля на линии  $L^-$ , увеличивается далее до значения  $v_e > 0$  на внешней границе пограничного слоя. Очевидно, что в точках линии  $L^-$  скорость течения направлена параллельно оси  $x$  (так как в этих точках поперечная скорость равна нулю:  $\bar{v} = 0$ ).

Изучение характеристик поперечного течения в окрестности линии  $L^-$  имеет большое значение, поскольку, например, на дисперсные частицы, расположенные выше линии  $L^-$ , действует поперечный поток, направленный вверх, а на частицы, расположенные ниже этой линии, действие поперечного потока направлено, наоборот, вниз. Это означает, что вблизи линии  $L^-$  возникает зона пониженной концентрации частиц.

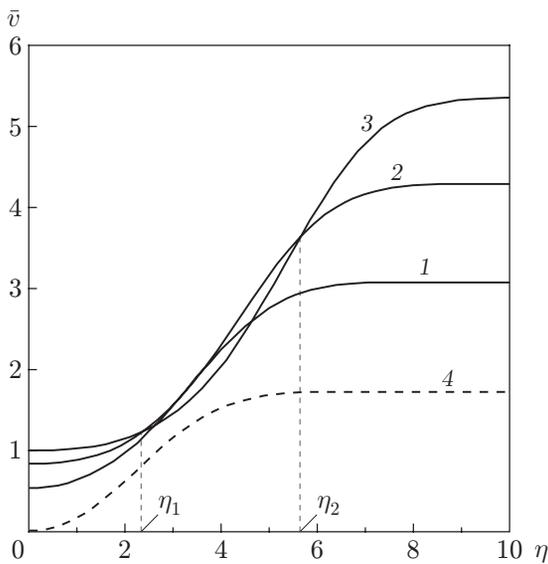


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость поперечной скорости среды от переменной  $\eta$  в пограничном слое на пластине при различных значениях коэффициента вдува: 1 —  $C = -0,5358$ , 2 —  $C = -0,8340$ , 3 —  $C = -1$ , 4 —  $C = 0$  (отсутствие вдува)

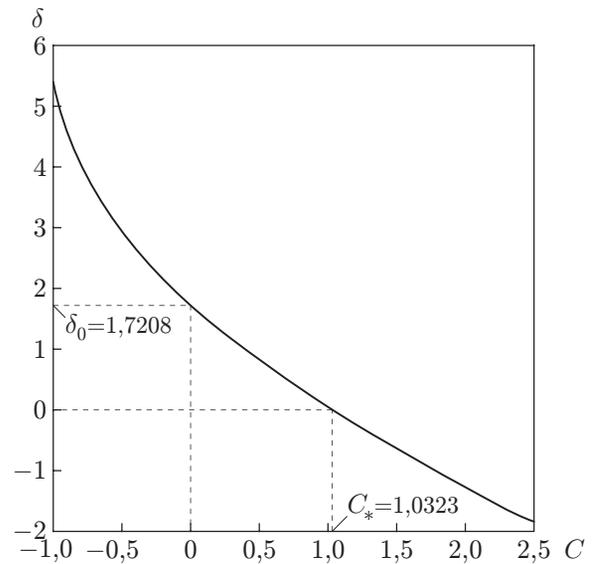


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость коэффициента  $\delta$  от коэффициента вдува (отсоса)  $C$

На рис. 2 видно, что в окрестности кривой  $L^-$  линии тока жидкости сначала направлены противоположно поверхности пластины, после достижения кривой  $L^-$  они меняют направление к поверхности. Таким образом, линия “отталкивания”  $L^-$  представляет собой совокупность точек поворота (где  $\bar{v} = 0$ ) линий тока жидкости.

При  $C > C_*$  (кривая 3 на рис. 1) во всей области течения поперечная скорость среды  $\bar{v} < 0$  и линии тока направлены к поверхности пластины.

Появление характерной линии  $L^-$  с физической точки зрения можно объяснить тем, что на поперечное течение в пограничном слое оказывают влияние два конкурирующих фактора: вытеснение, способствующее повороту потока в направлении от поверхности, и отсос жидкости, приводящий к движению потока в направлении поверхности тела. Когда эти факторы компенсируют друг друга (это происходит при критической интенсивности отсоса ( $C = C_* = 1,0323$ )) линия  $L^-$  уходит в бесконечность ( $\bar{v} = \bar{v}_e = 0$ ). В случае если интенсивность отсоса недостаточно большая ( $0 < C < C_*$ ), характерная линия  $L^-$  возникает внутри пограничного слоя, а в случае  $C > C_*$  поперечный поток всюду направлен к поверхности пластины, при этом линия  $L^-$  не возникает во всей области течения. В последнем случае интенсивность отсоса такова, что весь поток в области пограничного слоя (включая его внешнюю границу) начинает двигаться к поверхности пластины.

Уравнение для линии  $L^-$  имеет вид

$$y = \eta_* \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sqrt{\zeta x / U_0}.$$

Влияние вдува жидкости ( $C < 0$ ) с поверхности пластины на поперечное течение показано на рис. 3. При наличии вдува поперечное течение всегда направлено от стенки ( $\bar{v} > 0$ ), причем для рассматриваемого диапазона значений параметра вдува  $C$  имеется область  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ , в которой, несмотря на увеличение интенсивности вдува, поперечная скорость среды уменьшается. Это видно на рис. 3, где в интервале  $(\eta_1, \eta_2)$  кривая 3,

соответствующая большему по модулю значению  $C$ , расположена ниже кривой 2, соответствующей меньшему по модулю значению  $C$ .

Зависимость коэффициента  $\delta$ , входящего в формулу (2.1) и характеризующего величину поперечной скорости на внешней границе пограничного слоя  $\bar{v}_e$ , от параметра  $C$  представлена на рис. 4. Видно, что с ростом  $C$  коэффициент  $\delta$  уменьшается, достигая отрицательных значений при  $C > C_* = 1,0323$ . При  $C = 0$  в результате расчетов находим значение  $\delta = \delta_0 \approx 1,7208$ , которое согласуется с соответствующим значением в [12].

**3. Поперечный поток в пограничном слое на клине.** В случае  $0 < m < 1$  уравнение (1.2) можно рассматривать в качестве уравнения пограничного слоя при обтекании клина [8, 9] с ускоренным течением вдоль поверхности. При этом согласно [8, 9] профили продольной скорости не имеют точки перегиба, соответствующей отрыву пограничного слоя. Необходимо учитывать, что уравнения пограничного слоя описывают течение в области тонкого пристенного пограничного слоя, где поперечная скорость (по модулю) значительно меньше продольной составляющей и полученные результаты справедливы для небольших значений  $\eta$ . В частности, результаты анализа показывают, что при не очень малых значениях  $x$  для поперечной скорости справедлива оценка

$$|v/U| \sim \text{Re}^{-1/2} |(m+1)f + (m-1)\eta f'|,$$

из которой следует, что при характерных значениях числа Рейнольдса  $\text{Re} \approx 10^6$  для выполнения, например, условия  $|v/U| < 10^{-2}$  должно выполняться условие  $|(m+1)f + (m-1)\eta f'| < 10$ , согласно расчетам имеющее место при  $\eta < 10$ .

На рис. 5 представлена зависимость безразмерной поперечной скорости, вычисляемой по формуле  $\bar{v} = -[(m+1)f + (m-1)\eta f']$ , от автомодельной переменной  $\eta$  при различных значениях параметра  $m$  в случае отсутствия отсоса ( $C = 0$ ). Результаты расчетов показывают, что, в случае если значение  $m$  меньше некоторой критической величины  $m_* \approx 0,35$ , поведение зависимости  $\bar{v}(\eta)$  является немонотонным: с ростом  $\eta$  она сначала возрастает,

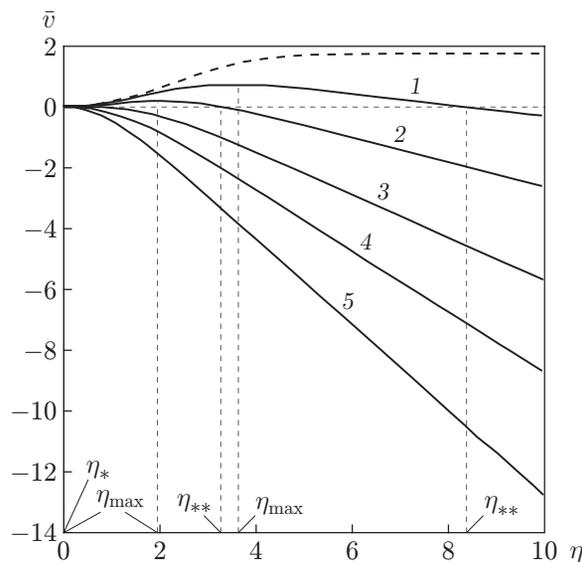


Рис. 5. Зависимость безразмерной поперечной скорости от переменной  $\eta$  в пограничном слое на клине при отсутствии потока массы на поверхности ( $C = 0$ ) и различных значениях параметра  $m$ :

1 —  $m = 1/11$  ( $\alpha = \pi/6$ ), 2 —  $m = 1/5$  ( $\alpha = \pi/3$ ), 3 —  $m = m_* \approx 0,35$  ( $\alpha \approx \pi/2$ ), 4 —  $m = 1/2$  ( $\alpha = 2\pi/3$ ), 5 —  $m = 0,7$  ( $\alpha \approx 5\pi/6$ ); штриховая линия —  $m = 0$  ( $\alpha = 0$ ) (пластина)

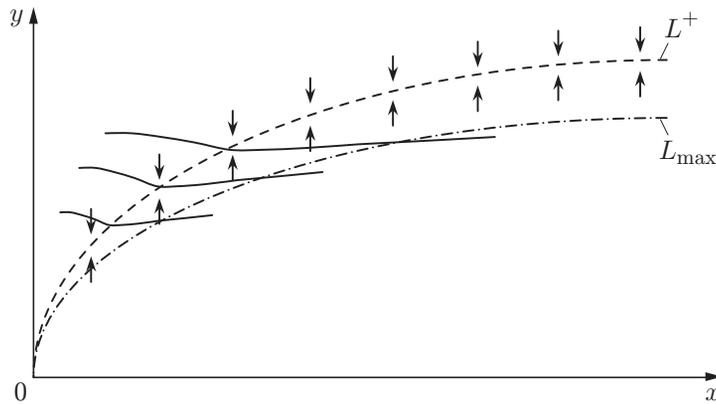


Рис. 6. Характерная картина течения в пограничном слое на клине при  $C = 0$ ,  $m < m_* \approx 0,35$ :

сплошные кривые — линии тока жидкости, штриховая кривая  $L^+$  — линия “притяжения”, штрихпунктирная  $L_{\max}$  — линия максимальных значений поперечной скорости ( $\eta = \eta_{\max}$ ,  $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$ ); стрелки — направление поперечного течения

затем, после достижения максимума  $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$  в точке  $\eta = \eta_{\max}$ , убывает до отрицательных значений (кривые 1, 2). Причем зависимость  $\bar{v}(\eta)$  пересекает линию  $\bar{v} = 0$  в двух точках:  $\eta = \eta_* = 0$ ,  $\eta = \eta_{**}$ . Заметим, что для кривой 1  $\eta_{**} \approx 8,246$ ,  $\eta_{\max} \approx 3,55$ , для кривой 2  $\eta_{**} \approx 3,219$ ,  $\eta_{\max} \approx 2,00$ . В случае  $m > m_*$  величина  $\bar{v}$ , начиная с нуля, монотонно уменьшается (кривые 3–5). При этом точка максимума  $\eta_{\max}$  и точка  $\eta_{**}$ , в которой зависимость  $\bar{v}(\eta)$  пересекается с линией  $\bar{v} = 0$ , совпадают в точке  $\eta = 0$ .

Дальнейшие расчеты показали, что критическое значение  $m_* \approx 0,35$  разграничивает кардинально разное (монотонное или немонотонное) поведение зависимости  $\bar{v}(\eta)$  не только в случае  $C = 0$ , но и при других значениях  $C$ . Таким образом, наличие критического значения параметра  $m = m_* \approx 0,35$  является общим свойством поперечного течения жидкости в пограничном слое на клине, поскольку установленное значение  $m_*$  не зависит от параметров задачи.

Структура течения на плоскости  $(x, y)$  при  $m < m_* \approx 0,35$ ,  $C = 0$  показана на рис. 6, где штриховая  $L^+$  и штрихпунктирная  $L_{\max}$  кривые соответствуют значениям  $\eta = \eta_{**}$  и  $\eta = \eta_{\max}$ . На первой из этих кривых  $\bar{v} = 0$ , на второй —  $\bar{v} = \max_{y \geq 0} \{\bar{v}(x, y)\} \equiv \bar{v}_{\max}(x)$ . В области, расположенной ниже кривой  $L_{\max}$ , поперечная скорость вдоль оси  $y$  увеличивается от нуля до некоторого максимального значения  $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$ , а в области между кривыми  $L_{\max}$  и  $L^+$  она монотонно уменьшается до нуля. Выше кривой  $L_+$  величина  $\bar{v}$  становится отрицательной и уменьшается с ростом поперечной координаты  $y$ . Таким образом, кривую  $L^+$  можно рассматривать как линию “притяжения” по поперечной скорости. Линии тока жидкости выше кривой  $L^+$  направлены вниз, к поверхности клина, затем после достижения линии  $L^+$  постепенно поднимаются. Причем наиболее существенный подъем линий тока наблюдается при пересечении кривой  $L_{\max}$ . Вообще говоря, линию “притяжения”  $L^+$  (аналогично линии “отталкивания” в случае пластины) можно трактовать как совокупность точек, в которых линии тока среды меняют направление на противоположное. Очевидно, что в точках линии  $L^+$  скорость жидкости направлена параллельно поверхности клина. Исходя из особенностей течения среды в окрестности линии  $L^+$  можно предположить, что в случае обтекания клина суспензией вблизи линии “притяжения” возможно появление области повышенной концентрации дисперсных частиц.

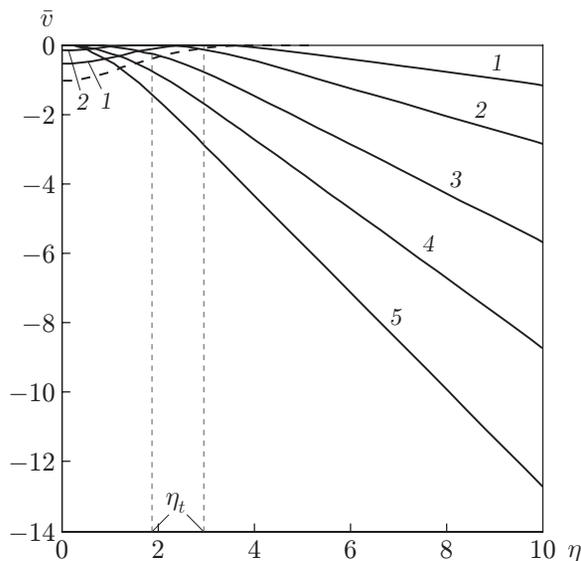


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость безразмерной поперечной скорости от переменной  $\eta$  в пограничном слое на клине при  $C = C_*$  и различных значениях параметра  $m$ : 1 —  $m = 1/11$  ( $C_* = 0,492$ ), 2 —  $m = 1/5$  ( $C_* = 0,125$ ), 3 —  $m = m_* \approx 0,35$  ( $C_* = 0$ ), 4 —  $m = 1/2$  ( $C_* = 0$ ), 5 —  $m = 0,7$  ( $C_* = 0$ ); штриховая линия —  $m = 0$  ( $C_* = 1,032$ ) (пластина)

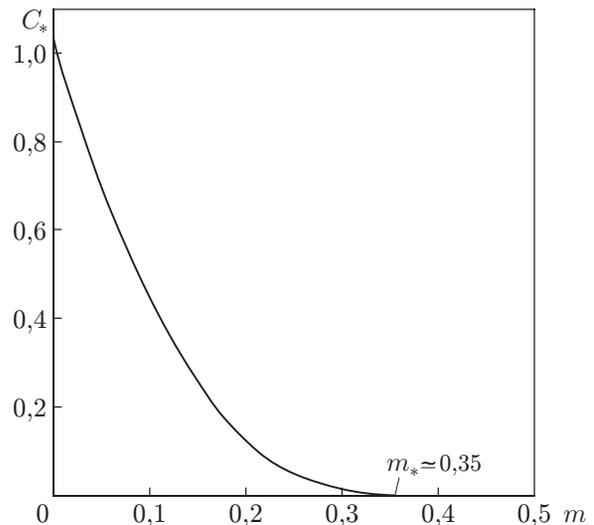


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость критического значения коэффициента  $C_*$  от параметра  $m$

В случае  $m \geq m_* \approx 0,35$  скорость  $\bar{v}$  всюду (за исключением точек оси  $y$ , где  $\bar{v} = 0$ ) направлена к поверхности клина, на которой она достигает нулевого значения, поэтому линии тока в этом случае всюду направлены к поверхности.

При наличии отсоса ( $C > 0$ ) для каждого значения параметра  $m$  существует критическое значение  $C = C_*$ , разграничивающее разное поведение зависимости  $\bar{v}(\eta)$ . Критический отсос определяется тем, что точки пересечения кривой  $\bar{v}(\eta)$  с линией нулевой скорости и точка максимума смыкаются в одну точку:  $\eta_* = \eta_{**} = \eta_{\max} \equiv \eta_t$ , где линия  $\bar{v} = 0$  становится касательной к кривой зависимости  $\bar{v}(\eta)$  (в случае пластины определенная таким образом точка  $\eta_t$  уходит в бесконечность). Кривые, соответствующие описанным условиям, представлены на рис. 7, где также показана зависимость для пластины ( $m = 0$ ). Причем в случае  $m < m_* \approx 0,35$  координаты точки смыкания  $\eta_t$  имеют значения  $\eta_t \approx 3,000$  для кривой 1 и  $\eta_t \approx 1,904$  для кривой 2; в случае  $m \geq m_* \approx 0,35$  (кривые 3–5)  $\eta_t = 0$  (соответственно  $C_* > 0$  и  $C_* = 0$ ).

Зависимость критического значения интенсивности отсоса  $C_*$  от параметра  $m$  приведена на рис. 8, где видно, что с ростом  $m$  величина  $C_*$ , начиная с максимального значения  $C_*^{\max} = 1,0323$  (соответствующего случаю  $m = 0$ ), уменьшается до нуля.

Картина течения при  $C = C_*$ ,  $m < m_* \approx 0,35$  показана на рис. 9. В данном случае штриховая кривая  $L$  представляет собой одновременно линии “отталкивания” и “притяжения”, а также линию, на которой поперечная скорость принимает максимальное значение  $\bar{v} = \bar{v}_{\max} = 0$ . При этом по обе стороны от этой критической линии  $L$  поперечная скорость направлена к поверхности. На рис. 9 также показано характерное поведение линий тока жидкости в окрестности кривой  $L$ . Видно, что линии тока имеют точки перегиба, в которых результирующая скорость потока направлена параллельно поверхности клина и через которые проходит кривая  $L$  (так как в этих точках  $\bar{v} = 0$ ). При  $m \geq m_* \approx 0,35$

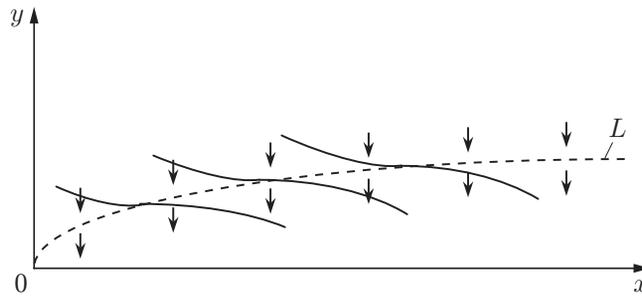


Рис. 9. Картина течения в пограничном слое на клине при  $C = C_*$ ,  $m < m_* \approx 0,35$ : сплошные кривые — линии тока жидкости, штриховая кривая  $L$  — линия  $\eta = \eta_t$ ; стрелки — направление поперечного течения

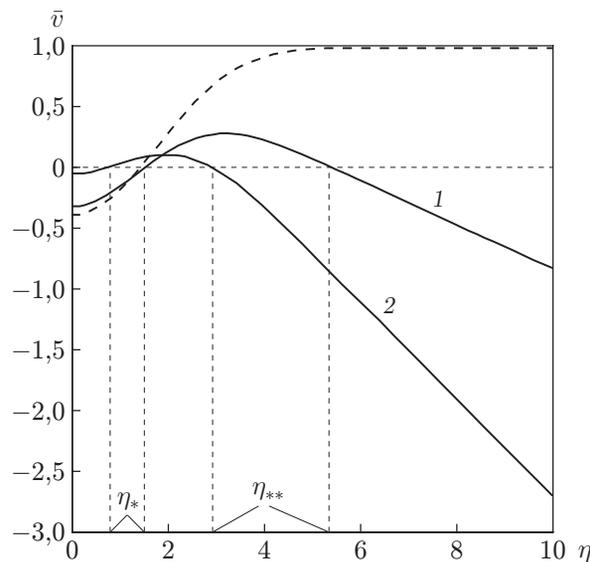


Рис. 10. Зависимость безразмерной поперечной скорости от переменной  $\eta$  на клине при  $0 < C < C_*$  и различных значениях параметра  $m$  в случае  $m < m_* \approx 0,35$ : 1 —  $m = 1/11$  ( $C = 0,300 < C_* = 0,492$ ), 2 —  $m = 1/5$  ( $C = 0,050 < C_* = 0,125$ ); штриховая линия —  $m = 0$  ( $C = 0,400 < C_* = 1,032$ ) (пластина)

все три указанные выше типичные линии, представленные одной кривой  $L$ , примыкают к поверхности клина ( $y = 0$ ).

В случае  $0 < C < C_*$ ,  $m < m_* \approx 0,35$  для разных значений  $m$  критическая величина  $C_*$ , как установлено выше, принимает разные значения (см. рис. 7, 8). Удовлетворяющие этим условиям зависимости  $\bar{v}(\eta)$  представлены на рис. 10. Видно, что кривые пересекают линию нулевой скорости  $\bar{v} = 0$  в двух точках, причем значение  $\eta_*$ , соответствующее первой точке пересечения, в отличие от случая  $C = 0$  (см. рис. 5), больше нуля. На рис. 11 приведена картина течения в пограничном слое для рассматриваемого случая. Заметим, что в этой ситуации возникают как линия “отталкивания”  $L^-$ , так и линия “притяжения”  $L^+$ , а между ними располагается линия  $\eta = \eta_{\max}$ , на которой  $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$  (кривая  $L_{\max}$ ). На рис. 11 также показано характерное поведение линий тока жидкости в окрестностях описанных выше кривых. По мере увеличения координаты  $x$  линия тока сначала опускается в направлении поверхности тела, после достижения линии  $L^+$  поднимается до линии  $L^-$ , затем вновь поворачивает в направлении поверхности тела.

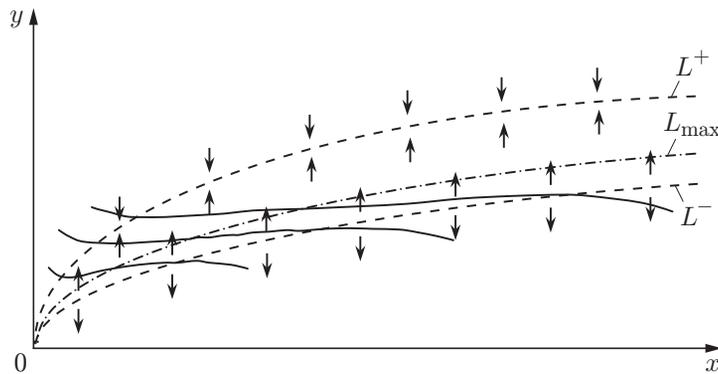


Рис. 11. Характерная картина течения в пограничном слое на клине при  $0 < C < C_*$ ,  $m < m_* \approx 0,35$ :

сплошные кривые — линии тока жидкости, штриховая линия “отталкивания”  $L^-$  —  $\eta = \eta_*$  ( $\bar{v} = 0$ ), штриховая линия “притяжения”  $L^+$  —  $\eta = \eta_{**}$  ( $\bar{v} = 0$ ), штрихпунктирная  $L_{\max}$  —  $\eta = \eta_{\max}$  ( $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$ ); стрелки — направление поперечного течения

При  $C > C_*$  зависимость  $\bar{v}(\eta)$ , очевидно, не пересекает линию нулевой скорости  $\bar{v} = 0$ , соответственно в этом случае характерные линии типа линий  $L^-$  и  $L^+$  отсутствуют. Типичная зависимость  $\bar{v}(\eta)$ , например, при значении  $C = 1,2$  (которое больше критического коэффициента  $C_*$  для любого  $0 < m < 1$ ) показана на рис. 12.

На рис. 13 показано влияние вдува (с коэффициентом  $C = -0,2$ ) на зависимость  $\bar{v}(\eta)$  при различных значениях параметра  $m$ . Видно, что при наличии вдува каждая кривая  $\bar{v}(\eta)$  пересекает критическую линию  $\bar{v} = 0$  только в одной точке  $\eta = \eta_*$ , причем значение  $\eta_*$  зависит от  $m$  (для кривых 1–4 параметр  $\eta_*$  соответственно имеет значения 10,276, 4,302, 1,979, 1,214). Картина течения для значений  $m < m_* \approx 0,35$  приблизительно такая же, как в случае  $C = 0$  (см. рис. 6) с линией “притяжения” и линией, на которой величина  $\bar{v}$  принимает максимальное значение, но при наличии вдува поперечная скорость жидкости на оси абсцисс больше нуля (при  $C = 0$  равна нулю). При  $m \geq m_* \approx 0,35$  линия максимальных значений совпадает с осью абсцисс (поскольку в данном случае  $\eta_{\max} = 0$ ), в остальном картина течения аналогична случаю  $C = 0$ .

Следует отметить, что в случае вдува линия “притяжения” возникает при любой интенсивности, тогда как в случае отсоса линии “притяжения” и “отталкивания” появляются при определенных значениях интенсивности. Также заметим, что в отличие от случая обтекания пластины при наличии вдува, когда поперечная скорость больше нуля во всей области течения (т. е. поперечный поток направлен от поверхности пластины), при обтекании клина, несмотря на вдув с поверхности, возникают зоны, где поперечный поток направлен в сторону поверхности клина (ср. рис. 3, 13).

Все описанные выше характерные кривые, определяемые на плоскости  $(x, y)$  в случае обтекания клина, описываются уравнением (с соответствующими значениями коэффициента  $H$ )

$$y = H\varphi(x), \quad H = (\eta_*, \eta_{**}, \eta_{\max}, \eta_t), \quad \varphi(x) = \sqrt{\zeta x/U}.$$

Заметим, что характерные величины  $\eta_*$ ,  $\eta_{**}$ ,  $\eta_{\max}$ ,  $\eta_t$  в свою очередь зависят от параметров  $m$  и  $C$ .

**Заключение.** В работе проведено исследование поведения поперечного течения жидкости в пограничном слое на пластине и клине. Обсуждается влияние переноса массы (отсоса или вдува) через поверхность тела на поперечное течение. Установлено, что в случае обтекания пластины существует некоторая (критическая) интенсивность отсоса,

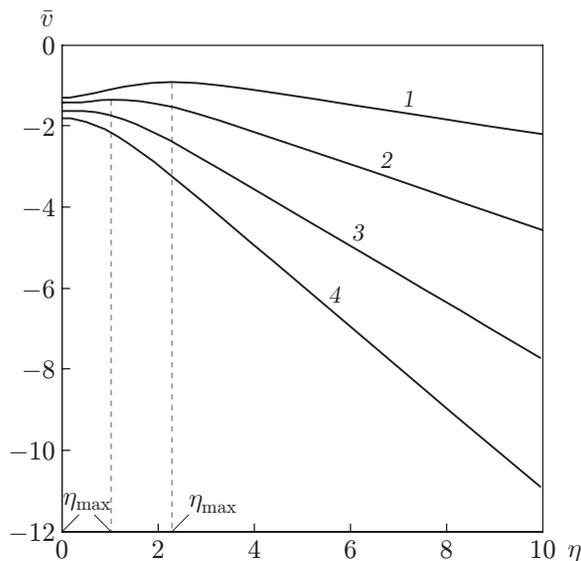


Рис. 12

Рис. 12. Зависимость безразмерной поперечной скорости в пограничном слое на клине от переменной  $\eta$  при  $C = 1, 2 > C_*$  и различных значениях параметра  $m$ : 1 —  $m = 1/11$  ( $C_* = 0,492$ ), 2 —  $m = 1/5$  ( $C_* = 0,125$ ), 3 —  $m = m_* \approx 0,35$  ( $C_* = 0$ ), 4 —  $m = 1/2$  ( $C_* = 0$ )

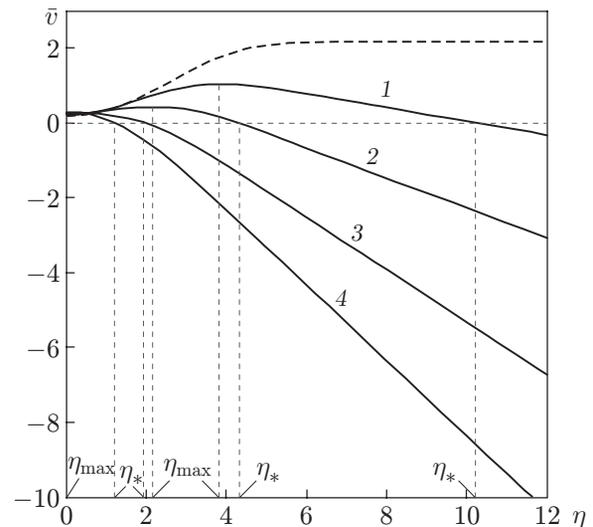


Рис. 13

Рис. 13. Зависимость безразмерной поперечной скорости от переменной  $\eta$  в пограничном слое на клине при наличии вдува ( $C = -0, 2$ ) и различных значениях параметра  $m$ :

1 —  $m = 1/11$ , 2 —  $m = 1/5$ , 3 —  $m = m_* \approx 0,35$ , 4 —  $m = 1/2$ ; штриховая линия —  $m = 0$  (пластина)

при которой поперечная скорость потока на внешней границе пограничного слоя обращается в нуль. В случае если интенсивность отсоса меньше критической (и больше нуля), внутри пограничного слоя возникает так называемая линия “отталкивания”  $L^-$ , вдоль которой поперечная скорость равна нулю, а выше и ниже нее направлена в противоположные стороны от этой линии.

При обтекании клина ускоряющимся по закону  $U(x) = \Lambda x^m$  внешним потоком существует критическое значение  $m_* \approx 0,35$ , такое что в случае  $m < m_*$  поведение зависимости поперечной скорости от автомодельной переменной является немонотонным (сначала увеличивается, затем уменьшается), а в случае  $m \geq m_*$  данная зависимость с ростом аргумента монотонно уменьшается. При  $m < m_*$  и отсутствии переноса массы через поверхность клина в пограничном слое появляется линия “притяжения”  $L^+$ . Вдоль этой линии поперечная скорость равна нулю, а выше и ниже нее направлена к ней.

В случае если значение параметра, характеризующего интенсивность отсоса, не превышает критического значения, в пограничном слое на клине возникают как линия  $L^-$ , так и линия  $L^+$ , а также линия, в точках которой поперечная скорость принимает максимальные значения. При критическом отсосе эти линии сливаются в одну кривую  $L$ . Следует отметить, что в случае обтекания пластины характерная линия  $L^-$  возникает только при наличии отсоса на поверхности, а при обтекании клина линия  $L^+$  возникает даже в случае, когда поверхность клина является непроницаемой.

Установлено, что при вдуве жидкости с поверхности клина линия  $L^+$  возникает при любой интенсивности вдува, причем, несмотря на наличие вдува, имеется зона, где поперечный поток направлен к поверхности клина.

Проанализировано поведение линий тока жидкости в окрестностях характерных кривых  $L^-$  и  $L^+$ . Вблизи кривой  $L^-$  линии тока жидкости сначала поднимаются, затем, после достижения кривой  $L^-$ , опускаются. В окрестности кривой  $L^+$  линии тока сначала направляются вниз, в сторону поверхности, а после пересечения линии  $L^+$  постепенно отдаляются от поверхности клина. При критической интенсивности отсоса среды точки кривой  $L$  (с которой сливаются линии  $L^-$  и  $L^+$ ) служат точками перегиба линий тока, а линии тока направлены вниз по обе стороны от кривой  $L$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Корнилов В. И., Кавун И. Н., Попков А. Н.** Развитие технологии вдува и отсоса воздуха для управления турбулентным течением на крыловом профиле // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 1. С. 10–19.
2. **Tan C. W., Dibiano R.** A parametric study of Falkner — Skan problem with mass transfer // AIAA J. 1972. V. 10, N 7. P. 923–925.
3. **Fang T., Zhang J.** An exact analytical solution of the Falkner — Skan equation with mass transfer and wall stretching // Intern. J. Non-Linear Mech. 2008. V. 43, N 9. P. 1000–1006.
4. **Orhan A., Kaya A.** Laminar boundary layer flow over a horizontal permeable flat plate // Appl. Math. Comput. 2005. V. 161, N 1. P. 229–240.
5. **Бурдэ Г. И.** Об одном классе решений уравнений пограничного слоя // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 45–51.
6. **Гришин А. М., Забарин В. И.** Двухфазный пограничный слой с несжимаемой несущей фазой на пластине при вдуве и отсосе газа с поверхности // ПМТФ. 1987. № 5. С. 54–61.
7. **Липатов И. И., Петруханов В. Н., Тимофеев Г. М.** Свободное взаимодействие течения в ламинарном пограничном слое с движущейся вверх по потоку волной разрежения // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 1. С. 11–15.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
9. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
10. **Schlichting H., Bussmann K.** Exakte Losungen fur die laminare reibungsschicht mit absaugung und ausblasen // Schriften Dtsch. Akad. Luftfahrtforsch. 1943. Ser. B. Bd 7, N 2. S. 25–69.
11. **Schlichting H.** Die Belinflussung der Grenzschicht durch Absaugung und Ausblasen // Jb. Dtsch. Akad. Luftfahrtforsch. 1943/1944. Bd 2, N 1. S. 90–108.
12. **Авдуевский В. С., Оброскова Е. И.** Исследование ламинарного пограничного слоя на пористой пластине с учетом тепло- и массообмена // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 4. С. 52–59.
13. **Бондарев Е. Н.** Аэрогидромеханика / Е. Н. Бондарев, В. Т. Дубасов, Ю. А. Рыжов, С. Б. Свирщевский, Н. В. Семенчиков. М.: Машиностроение, 1993.
14. **Na T. Y.** Computational methods in engineering boundary value problems. N. Y.: Acad. Press, 1979.

*Поступила в редакцию 29/VII 2022 г.,  
после доработки — 18/XII 2022 г.  
Принята к публикации 26/XII 2022 г.*