

реакций рассмотренный подход позволяет ставить вопросы вычисления констант на практическую основу.

Отметим, что границы применимости диффузионной модели определяются также классичностью подхода. В частности, длина волны де Бройля должна быть мала по сравнению с характерной длиной изменения потенциала взаимодействия. В этом смысле полученные формулы не применимы к расчету констант реакций, идущих с изменением электронных состояний реагирующих частиц. Такие реакции должны описываться на основе квантовомеханического рассмотрения.

Поступила 22 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахизер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.
2. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т. Кинетика ударно-радиационной ионизации и рекомбинации.— УФН, 1972, т. 107, № 3.
3. Никитин Е. Е. Теория элементарных атомно-молекулярных процессов в газах. М.: Химия, 1970.
4. Исихара А. Статистическая физика. М.: Мир, 1973.
5. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
6. Решетняк С. А., Шелепин Л. А. Об одном методе интегрирования уравнений Фоккера — Планка.— ПМТФ, 1977, № 5.
7. Решетняк С. А., Шелепин Л. А. Метод квазиравновесных функций в физической кинетике.— Труды ФИАН, 1979, т. 106, с. 90.
8. Kramers H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions.— Physica (The Hague), 1940, vol. 7, N 4.
9. Rinkman H. C. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions.— Physica (Utrecht), 1956, vol. 22, N 3.
10. Donnelly R. J., Roberts P. H. Stochastic theory of the interaction of ions and quantized vortices in helium II.— Proc. Roy. Soc. (London), 1969, vol. 312A, N 1511.
11. Visscher P. B. Escape rate for a Brownian particle in a potential well.— Phys. Rev., 1976, vol. B13, N 8.
12. Blomberg C. The Brownian motion theory of chemical transition rates.— Physica (Utrecht), 1977, vol. A86, N 1.
13. Larson R. S., Kostin M. D. Kramer's theory of chemical kinetics. Eigenvalue and eigenfunction analysis.— J. Chem. Phys., 1978, vol. 69, N 11.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
15. Таблицы физических величин. Справочник/Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.
16. Краткий справочник физико-химических величин/Под ред. К. П. Мищенко и А. А. Равделя. Л.: Химия, 1972.
17. Кондратьев В. Н. Константы скорости газофазных реакций. М.: Наука: 1970.

УДК 551.491.5

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ ЗОНЫ НАСЫЩЕНИЯ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КАНАЛА С МАЛОЙ ГЛУБИНОЙ ВОДЫ

Э. Н. Береславский, Л. А. Панасенко

(Ленинград)

В работах [1—4] рассматривается гидродинамическое решение плоской стационарной задачи о линзе пресных вод, устанавливающейся при фильтрации (по закону Дарси) из канала путем вытеснения из зоны канала соленых грунтовых вод. При этом предполагается, что глубина воды в канале бесконечно мала и расходным фактором, компенсирующим фильтрацию из канала, является испарение воды со свободной поверхности. В данной работе исследуется филь-

рация из канала в слой однородного изотропного грунта мощности T , подстилаемого горизонтальным водоупором. Этот случай является предельным для упомянутой выше задачи, когда плотность соленой воды неограниченно возрастает. Решение задачи так же, как и в работах [1—4], найдено методом П. Я. Полубариновой-Кочиной [5], который основан на применении аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом в качестве канонической принимается такая область, характеристики фильтрационного потока для которой удается получить в замкнутой форме через известные специальные функции.

Ввиду симметрии области фильтрации ограничимся рассмотрением правой ее половины, схематично изображенной на фиг. 1. Дно канала представлено горизонтальным отрезком длины $2l$. При указанном на фиг. 1 выборе системы координат и при совмещении плоскости сравнения потенциалов с плоскостью $y = 0$ на границе области фильтрации выполняются следующие условия:

$$(1) \quad y = 0, \varphi_r = 0 \text{ на } AD, \quad x = 0, \psi_r = 0 \text{ на } AB, \quad y = T, \psi_r = 0 \text{ на } BC, \\ \varphi_r + y = 0, \psi_r + \varepsilon_r x = \varepsilon_r L \text{ на } CD,$$

где $\omega_r = \varphi_r + i\psi_r$ — приведенный к коэффициенту фильтрации комплексный потенциал фильтрации (причем φ_r — приведенный потенциал скоростей фильтрации, ψ_r — приведенная функция тока); $z = x + iy$ — комплексная координата области фильтрации; ε_r — приведенная интенсивность испарения.

В качестве вспомогательной области примем полуокладку плоскости w фиг. 2. В используемом здесь методе искомыми являются функции $d\omega/dw$ и dz/dw , которые определяются как решения некоторого линейного дифференциального уравнения класса Фукса с регулярными особыми точками. Рассматривая сначала поведение функций $d\omega/d\zeta$ и $dz/d\zeta$, где ζ — верхняя полуокладка, найдем, что характеристические показатели этих функций в окрестностях особых точек имеют следующие значения: около точки A ($\zeta = -a$) $(-1/2, -1/2)$, около точки B ($\zeta = 0$) $(-1/2, 0)$, около точки C ($\zeta = 1$) $(\nu/2 - 1/2, -\nu/2 - 1/2)$, около точки D ($\zeta = \infty$) $(3/2, 2)$, где $\nu = 1 - (2/\pi) \arctg \sqrt{\varepsilon_r}$, причем особенность в точке $\zeta = -a$ является устранимой.

Решение задачи, удовлетворяющее условиям (1), имеет вид

$$(2) \quad \frac{d\omega}{dw} = A \frac{\sqrt{\varepsilon_r} \operatorname{sh} \nu w}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 w + a \operatorname{ch}^2 w}}, \quad \frac{dz}{dw} = A \frac{\operatorname{ch} \nu w}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 w + a \operatorname{ch}^2 w}},$$

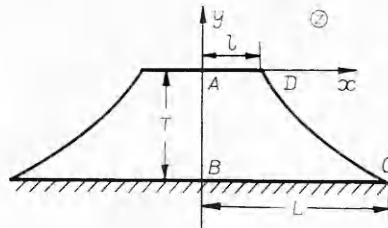
где A — некоторая вещественная постоянная.

Уравнение правой ветви свободной поверхности DC получим, если разделим во втором уравнении (2) действительную и мнимую части и затем проинтегрируем их. Тогда найдем

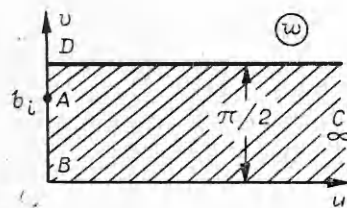
$$(3) \quad x = l + A \sin \frac{\pi \nu}{2} \int_0^w \frac{\operatorname{sh} \nu t dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t + a \operatorname{sh}^2 t}}, \\ y = -A \cos \frac{\pi \nu}{2} \int_0^w \frac{\operatorname{ch} \nu t dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t + a \operatorname{sh}^2 t}} \quad (0 \leq w \leq \infty).$$

Последовательно интегрируя второе из выражений (2) от точки A до точки D , от точки B до точки A и от точки B до точки C , соответственно получим

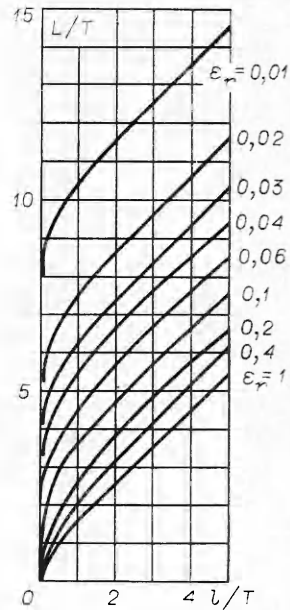
$$(4) \quad l = \frac{A \cos b}{\sqrt{2}} \int_{2b}^{\pi} \frac{\cos \frac{\nu}{2} t dt}{\sqrt{\cos 2b - \cos t}};$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

$$(5) \quad T = \frac{A\pi \cos b}{2} P_{\nu-1}(\cos 2b);$$

$$(6) \quad L = \frac{A\pi \cos b}{2 \cos \frac{\pi\nu}{2}} P_{\nu-1}(-\cos 2b),$$

где b — постоянная, связанная с a соотношением $a = \operatorname{tg}^2 b$; $P_\nu(z)$ — сферическая функция Лежандра первого рода с индексом ν [6], $P_\nu(z) = F(-\nu, 1 + \nu, 1, (1 - z)/2)$; $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция с параметрами α , β и γ .

По зависимостям (4) — (6) построен график функции L/T аргументов l/T и ϵ_r^* (фиг. 3). В заключение отметим, что $l \rightarrow (2/\pi) \ln \operatorname{tg}(b/2)$ и $L \rightarrow \infty$ при $\epsilon_r \rightarrow 0$.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору С. Н. Нумерову за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 25 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Эмих В. Н. Фильтрация с полосы при наличии подпорных соленых вод. — ПМТФ, 1962, № 2.
2. Эмих В. Н. К задаче о линзе пресных вод при фильтрации из капала. — Тр. ВЦ Ташкентского ун-та, 1964, вып. 1.
3. Эмих В. Н. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.
4. Эмих В. Н. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала. — Тр. коорд. совещаний по гидротехнике, 1967, вып. 35.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

* Предварительно в (4) с помощью замены $t = \arcsin \sqrt{\sin^2 b + \cos^2 b \sin^2 \nu}$ устраняется особенность подынтегральной функции на нижнем пределе интегрирования.