

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ
КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ
ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

УДК 539.3

Е. В. Коваленко¹, В. Б. Зеленцов²

¹Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

²НИИ механики и прикладной математики

Ростовского государственного университета, 344104 Ростов-на-Дону

Рассматриваются следующие динамические контактные задачи теории упругости: 1) задача об антиплоском сдвиге штампом упругого полупространства, 2) плоская задача о вдавлении штампа в упругую полуплоскость. При этом считается, что в момент времени $t = 0$ к штампу прикладывается усилие, изменяющееся достаточно произвольным образом во времени.

Для решения этих неустановившихся динамических задач применяются преобразования Лапласа — Карсона по времени и Фурье по пространственной координате. В результате задачи относительно трансформированных по Лапласу — Карсону контактных напряжений сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода типа свертки на конечном интервале, ядра которых зависят от безразмерного параметра $\lambda \in (0, \infty)$, связанного со временем.

Для решения этих уравнений используются методы [1, 2]. Для больших и малых значений λ , что отвечает большим и малым временам взаимодействия штампа с полупространством, получены простые аналитические решения в нескольких формах, каждая из которых эффективна в своей области изменения параметра λ ; причем, как показали численные расчеты, эти области перекрывают в совокупности весь возможный диапазон изменения λ . Для окончательного решения задач в полученных формулах совершается переход от трансформант Лапласа — Карсона неизвестных функций к их оригиналам.

1. Пусть изотропное упругое полупространство находится в условиях чистого сдвига под действием бесконечной недеформируемой полосы ширины $2a$, нагруженной вдоль своей образующей сдвигающей силой $T(t) = T_0 f(t)$ ($f(t)$ — ограниченная функция с конечным числом линий разрыва при $t \geq 0$), отнесенной к единице длины. Между поверхностями полосы и полупространства предполагается полное сцепление. Постановку задачи свяжем с ортогональной системой координат $Oxyz$. Плоскость $y = 0$ совпадает с поверхностью контакта полосы и полупространства, которое занимает область $y \leq 0$. Ось z направлена вдоль образующей полосы.

Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\Delta w = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \left(c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (1.1)$$

получающегося из уравнений Ламе при отсутствии массовых сил, при граничных условиях

$$y = 0 : \quad w = \gamma f(t) \quad (|x| \leq a), \quad \tau_{yz} = 0 \quad (|x| > a) \quad (1.2)$$

и начальных условиях

$$t = 0 : \quad w = 0, \quad \partial w / \partial t = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $w(x, y, t)$ — проекция вектора перемещений на ось z ; ρ, G — плотность и модуль сдвига материала упругого полупространства; τ_{yz} — тангенциальная компонента тензора напряжений; $\gamma f(t)$ — функция, характеризующая перемещение полосы как жесткого целого.

Смешанную краевую задачу (1.1)–(1.3) будем решать при помощи интегральных преобразований [3]. Применяя к ней преобразование Лапласа — Карсона по времени

$$w^L = p \int_0^\infty w(x, y, t) e^{-pt} dt, \quad w = \frac{1}{2\pi i} \int_L w^L(x, y, p) \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad (1.4)$$

получим граничную задачу для функции $w^L(x, y, p)$:

$$\Delta w^L = p^2 c_2^{-2} w^L, \quad y = 0: \quad w^L = \gamma f^L(p) \quad (|x| \leq a), \quad \tau_{yz}^L = 0 \quad (|x| > a). \quad (1.5)$$

Используя далее для решения (1.5) интегральное преобразование Фурье по x [1], запишем интегральное уравнение относительно трансформированных по Лапласу — Карсону контактных касательных напряжений $\tau^L(x, p)$. В безразмерных переменных $x = x'a, \xi = \xi'a$ и с учетом обозначений $\gamma = \gamma'a, \lambda = c_2(ap)^{-1}, \varphi^L(x', p) = \tau^L(x, p)G^{-1}$ (штрих ниже опустим) оно примет вид

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g(x) f^L(p) \quad (|x| \leq 1); \quad (1.6)$$

$$k(s) = \int_0^\infty K(u) \cos(us) du = K_0(s), \quad K(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad g(x) \equiv \gamma \quad (1.7)$$

($K_0(s)$ — функция Макдональда).

Рассмотрим вторую контактную задачу о вдавливании без трения силой $P(t) = P_0 f(t)$ жесткого штампа ширины $2a$ в упругую полуплоскость $|x| < \infty, y \leq 0$, т. е. требуется найти решение системы уравнений Ламе, записанной для удобства в терминах волновых функций $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(c_1^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_2^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(c_1^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(c_2^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) &= 0, \quad c_1^2 = 2G(1-\nu)[\rho(1-2\nu)]^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

со следующими краевыми и начальными условиями:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \quad (|x| < \infty), \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{b^2} - 2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \quad \left(b = \frac{c_2}{c_1}, \quad |x| > a \right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -[\gamma - r(x)] f(t) \quad (|x| \leq a); \\ t = 0: \quad \varphi = \psi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В (1.8), (1.9) ν — коэффициент Пуассона материала упругой полуплоскости; $\gamma f(t)$ — жесткое перемещение штампа под действием силы $P(t)$; $r(x)$ — функция, описывающая форму

его основания. Здесь ограничимся случаем, когда сила $P(t)$ приложена в центре штампа коллинеарно оси y .

Последовательно применяя к (1.8)–(1.10) интегральные преобразования Лапласа — Карсона по времени и Фурье по координате x , сведем, как и ранее, решение смешанной краевой задачи к эквивалентному ей интегральному уравнению, записанному в образах Лапласа — Карсона. Это уравнение в безразмерных переменных, введенных выше, примет вид (1.6), причем ядро его представимо в форме (1.7), где

$$K(u) = \frac{2(1-b^2)\sqrt{u^2+b^2}}{(2u^2+1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2+b^2}\sqrt{u^2+1}} \quad (b^2 < 1). \quad (1.11)$$

В (1.6) $\varphi^L(x', p) = q^L(x, p)[2G(1-b^2)]^{-1}$; $g(x') = a^{-1}[\gamma - r(x)]$; $q^L(x, p)$ — трансформанта Лапласа — Карсона контактных давлений (штрихи у безразмерных переменных опущены).

2. Прежде чем приступить к решению интегрального уравнения (1.6), исследуем свойства его ядра. Заметим вначале, что функция $K(\zeta)$ (символ ядра) вещественная, четная, положительная на всей действительной оси и многозначная в комплексной плоскости $\zeta = u + iv$, причем в первой из рассматриваемых задач она имеет одну пару точек ветвления $\zeta = \pm i$, а во второй — две пары точек ветвления ($\zeta = \pm i$, $\zeta = \pm bi$) и два полюса ($\zeta = \pm Ri$ ($R > 1$)), расположенных на мнимой оси. Для устранения многозначности функции $K(\zeta)$ в комплексной плоскости проведем разрезы: для первой задачи — от точки $+i$ до точки $-i$ через бесконечно удаленную точку, для второй — два разреза, соединяющих точки ветвления bi с i и $-bi$ с $-i$.

Асимптотические свойства функции $K(\zeta)$ таковы:

$$K(u) = A + O(u^2) \quad (u \rightarrow 0), \quad uK(u) = 1 + \sum_{n=1}^N e_{2n}u^{-2n} + O(u^{-2N-2}) \quad (u \rightarrow \infty) \quad (2.1)$$

($A = 1$ для задачи 1, $A = 2b(1-b^2)$ для задачи 2).

Из соотношений (2.1) следует, что асимптотика ядра $k(s)$ при малых значениях s имеет вид [2]

$$k(s) = \ln |s| l_1(s) + l_2(s), \quad l_j(s) = \sum_{i=0}^N d_{ji} s^{2i} + O(s^{2N+2}) \quad (j = 1, 2), \quad (2.2)$$

где несколько первых коэффициентов d_{ji} даются формулами

$$d_{10} = -1, \quad d_{11} = \frac{e_2}{2}, \quad d_{12} = -\frac{e_4}{24}, \quad d_{20} = \int_0^\infty \left[K(u) - \frac{1-e^{-u}}{u} \right] du,$$

$$d_{21} = -\frac{3}{4}e_2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty [u^2 - u^3 K(u) + e_2(1-e^{-u})] \frac{du}{u},$$

$$d_{22} = \frac{25}{288}e_4 - \frac{1}{24} \int_0^\infty [u^4 \left(1 - \frac{e_2}{u^2}\right) - u^5 K(u) + e_4(1-e^{-u})] \frac{du}{u}.$$

Решение интегрального уравнения (1.6) при больших λ будем искать в форме [2]

$$\varphi^L(x, p) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{\pi} \varphi_{2n,m}^L(x, p) \lambda^{-2n} (\ln \lambda)^m + O(\lambda^{-2N-2} \ln^{N+1} \lambda). \quad (2.3)$$

Подставляя (2.2), (2.3) в (1.6), приравнявая выражения при одинаковых степенях λ^{-2}

и $\ln \lambda$, а также беря обратное преобразование Лапласа — Карсона от $\varphi^L(x, p)$, с точностью до членов порядка $O(\lambda^{-4} \ln \lambda)$ получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \varphi_{00}(x, t) + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{20}(x, t) + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\varphi_{21}(x, \tau)}{(t - \tau)^2} d\tau - \\ & - \frac{C}{\Lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{21}(x, t) - \frac{\ln \Lambda}{\Lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{21}(x, t) \quad (\Lambda = \lambda p), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$p^2(\ln p + C) = \frac{1}{t^2}, \quad p = \frac{\partial}{\partial t}, \quad f^L(p)g^L(p) = \frac{d}{dt} \int_0^{t+0} g(\tau)f(t - \tau) d\tau;$$

$$\begin{aligned} \varphi_{00}(x, t) = & \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[N_0(t) - f(t) \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} g'(\xi) d\xi \right], \\ \varphi_{20}(x, t) = & \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} d\xi \int_{-1}^1 (\xi - \tau) \times \\ & \times (2d_{11} \ln |\xi - \tau| + 2d_{21} + d_{11}) \varphi_{00}(\tau, t) (1 - \tau^2)^{-1/2} d\tau, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\varphi_{21}(x, t) = -\frac{2d_{11}}{\pi^2\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} d\xi \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\tau) (\xi - \tau) d\tau;$$

$$N_0(t) = \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx \quad (2.6)$$

(C — постоянная Эйлера). При этом интегралы и производные в (2.4) следует понимать в обобщенном смысле [3].

Отметим следующий факт. Пусть, например, штамп имеет плоское основание ($g(x) \equiv g = \text{const}$), а $f(t) \equiv H(t)$ ($H(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда [3]). Механически это означает, что штамп мгновенно переместился на величину g под действием силы $N_0(t)$ и удерживается ею в этом положении. Тогда при больших значениях t формулы (2.4), (2.5) примут вид

$$\varphi(x, t) = \frac{N_0}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (2.7)$$

($N_0 = T_0/(aG)$ для задачи 1, $N_0 = P_0/[2aG(1 - b^2)]$ для задачи 2), т. е. достаточно быстро вырождаются в решение соответствующей статической задачи. Как известно [4], в такой задаче невозможно найти связь между усилием N_0 и жестким перемещением штампа g из условия (2.6).

Построим решение интегрального уравнения (1.6) при малых значениях параметра λ (малое время). Для этого воспользуемся асимптотическим методом «малых» λ [1, 2]. Нулевой член асимптотики решения уравнения (1.6) при $\lambda \rightarrow 0$ представим как

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_*^L\left(\frac{1+x}{\lambda}, p\right) + \varphi_*^L\left(\frac{1-x}{\lambda}, p\right) - v^L\left(\frac{x}{\lambda}, p\right), \quad (2.8)$$

где $\varphi_*^L(y, p)$, $v^L(y, p)$ — решения интегральных уравнений вида

$$\int_0^{\infty} \varphi_*^L(\tau, p) k(\tau - y) d\tau = \pi g \lambda^{-1} f^L(p) \quad (0 \leq y < \infty); \quad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^L(\tau, p) k(\tau - y) d\tau = \pi g \lambda^{-1} f^L(p) \quad (|y| < \infty). \quad (2.10)$$

Здесь использована четность функции $K(u)$ ($|u| < \infty$), а также теорема 24.4 из [1], в соответствии с которой достаточно исследовать только уравнение (1.6) с правой частью $g(x) \equiv g = \text{const}$.

Решение уравнения (2.9) можно найти методом Винера — Хопфа [1], если применять факторизацию функции $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$:

$$\varphi_*^L(y, p) = -\frac{gf^L(p)}{\lambda K_+(0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{e^{-i\alpha y}}{K(\alpha)\alpha} d\alpha \quad (c > 0). \quad (2.11)$$

Решение интегрального уравнения (2.10) получается при помощи интегрального преобразования Фурье и использования теоремы о свертке [1]:

$$v^L(y, p) = gf^L(p)[\lambda K(0)]^{-1}. \quad (2.12)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа — Карсона к (2.8) с учетом того, что $\lambda = \Lambda p^{-1}$, запишем решения поставленных задач при $\lambda \rightarrow 0$ в форме

$$\varphi(x, t) = \varphi_*\left(\frac{1+x}{\Lambda}, t\right) + \varphi_*\left(\frac{1-x}{\Lambda}, t\right) - v\left(\frac{x}{\Lambda}, t\right). \quad (2.13)$$

Полагая в (2.11), (2.12) $K(\alpha) = (1 + \alpha^2)^{-1/2}$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_*^L\left(\frac{1 \pm x}{\lambda}, p\right) &= \frac{gf^L(p)}{\lambda} \left\{ \frac{\exp[-\lambda^{-1}(1 \pm x)]}{\sqrt{\pi \lambda^{-1}(1 \pm x)}} - \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{1 \pm x}{\lambda}} + 1 \right\}, \\ v^L\left(\frac{x}{\lambda}, p\right) &= \frac{gf^L(p)}{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

откуда в соответствии с (2.13) найдем решение задачи о чистом сдвиге штампом упругого полупространства:

$$\frac{\Lambda \varphi(x, t)}{g} = \begin{cases} f'(t) & (0 < t\Lambda < \sigma_-(x)), \\ f'(t) + \frac{1}{\pi \sqrt{\sigma_-(x)}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma_-(x)\Lambda^{-1}}^t f(t-\tau) \frac{\theta_-(\tau, x)}{\tau} d\tau & (\sigma_-(x) < t\Lambda < \sigma_+(x)), \\ f'(t) + \frac{1}{\pi \sqrt{\sigma_-(x)}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma_-(x)\Lambda^{-1}}^t f(t-\tau) \frac{\theta_-(\tau, x)}{\tau} d\tau + \\ + \frac{1}{\pi \sqrt{\sigma_+(x)}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma_+(x)\Lambda^{-1}}^t f(t-\tau) \frac{\theta_+(\tau, x)}{\tau} d\tau & (t\Lambda > \sigma_+(x)), \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\pm}(x) = 1 \pm |x|, \quad \theta_{\pm}(x, \tau) = \sqrt{\tau\Lambda - \sigma_{\pm}(x)}.$$

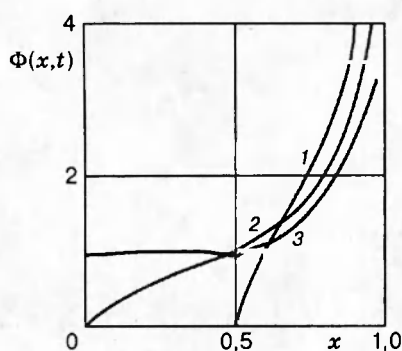


Рис. 1

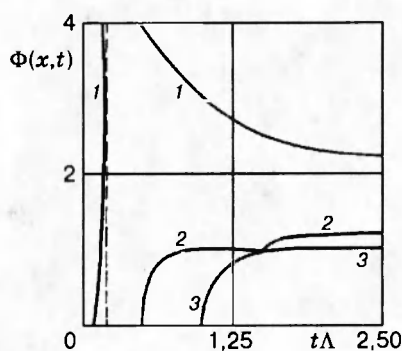


Рис. 2

При переходе от трансформант Лапласа — Карсона в соотношениях (2.13), (2.14) к оригиналам были использованы следующие формулы [5]:

$$\operatorname{perfc}(\sqrt{\alpha p}) = \begin{cases} 0 & (t < \alpha), \\ \frac{1}{\pi t} \sqrt{\frac{\alpha}{t - \alpha}} & (t > \alpha, \alpha > 0), \end{cases} \quad \sqrt{p} e^{-\alpha p} = \begin{cases} 0 & (t < \alpha), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi(t - \alpha)}} & (t > \alpha). \end{cases}$$

Если же закон движения штампа, как и выше, задан при помощи функции Хевисайда, то решение (2.15) упростится и примет вид

$$\frac{\Lambda \varphi(x, t)}{g} = \begin{cases} \delta(t) & (0 < t\Lambda < \sigma_-(x)), \\ \delta(t) + \frac{\theta_-(t, x)}{\pi t \sqrt{\sigma_-(x)}} & (\sigma_-(x) < t\Lambda < \sigma_+(x)), \\ \delta(t) + \frac{\theta_-(t, x)}{\pi t \sqrt{\sigma_-(x)}} + \frac{\theta_+(x, t)}{\pi t \sqrt{\sigma_+(x)}} & (t\Lambda > \sigma_+(x)), \end{cases} \quad (2.16)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Получив выражения (2.15), (2.16), можно провести анализ контактных касательных напряжений в первой задаче. Из равенств (2.15) видно, что пока до точки «наблюдения» под штампом не дошла волна контактных напряжений, напряжение в ней пропорционально скорости движения штампа $f'(t)$. Волна контактных касательных напряжений, приходящая в точку «наблюдения» от ближайшего из краев штампа, имеет на фронте нулевое напряжение и распространяется со скоростью поперечной волны в данной среде. Кроме того, через определенный промежуток времени в эту точку приходит волна контактных напряжений от другого края штампа. В частности, из соотношений (2.16), соответствующих случаю $f(t) \equiv H(t)$, следует, что контактные касательные напряжения в каждой точке под штампом пропорциональны $\delta(t)$, а при $t > 0$ до прихода поперечной волны от ближайшего края штампа равны нулю.

Для иллюстрации на рис. 1 представлены графики распределения контактных касательных напряжений $\Phi(x, t) = \Lambda g^{-1} \varphi(x, t)$ в моменты приведенного времени $t\Lambda = 0.5; 1.0; 1.5$ (кривые 1–3). Кроме этого, на рис. 2 изображено изменение величины $\Phi(x, t)$ в зависимости от $t\Lambda$ в точках $x = 0; 0.5; 0.9$ (кривые 1–3).

Важной характеристикой решений контактных задач является сила (2.6), действующая на штамп. Для нахождения ее воспользуемся тем, что при малых λ нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения (1.6) может быть представлен в мульти-

пликативной форме [1]

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_*^L\left(\frac{1+x}{\lambda}, p\right) \varphi_*^L\left(\frac{1-x}{\lambda}, p\right) \left[v^L\left(\frac{x}{\lambda}, p\right)\right]^{-1}, \quad (2.17)$$

где функции $\varphi_*^L(y, p)$ и $v^L(y, p)$ удовлетворяют уравнениям (2.9), (2.10). Определим вначале величину

$$N_0^L(p) = \int_{-1}^1 \varphi^L(x, p) dx. \quad (2.18)$$

Внося (2.11), (2.12) и (2.17) в равенство (2.18) и производя необходимые преобразования [1], имеем

$$N_0^L(p) = g f^L(p) \frac{K_-(0)}{K_+(0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{2\alpha/\lambda}}{\alpha^2 K_+^2(i\alpha)} d\alpha. \quad (2.19)$$

Если предположить, что $K(\alpha) = (1 + \alpha^2)^{-1/2}$, то из формулы (2.19) получим

$$N_0^L(p) = g f^L(p) (2\lambda^{-1} + 1). \quad (2.20)$$

Применяя в (2.20) обратное преобразование Лапласа — Карсона, с учетом последнего соотношения (2.4) найдем

$$N_0(t)g^{-1} = 2\Lambda^{-1}f'(t) + f(t). \quad (2.21)$$

Если же в равенстве (2.21) $f(t) \equiv H(t)$, то $\dot{N}_0(t)g^{-1} = 2\Lambda^{-1}\delta(t) + H(t)$.

3. Построим решение второй задачи при малом времени. Следует иметь в виду, что в этом случае, как было отмечено выше, символ ядра (1.11) интегрального уравнения (1.6) более сложного вида по сравнению с таковым для первой задачи. Кроме того, он содержит уже четыре точки ветвления в комплексной плоскости, что существенно усложняет факторизацию $K(\zeta)$. Тем не менее функция $K(\zeta)$ ($\zeta = u + iv$) является положительной и не имеет особых точек типа полюсов и точек ветвления на действительной оси.

Принимая во внимание это обстоятельство, а также асимптотические свойства (2.1) и используя метод приближенной факторизации Койтера [6], аппроксимируем символ ядра $K(\zeta)$ (1.11) выражением*

$$K(\zeta) \approx \sqrt{\zeta^2 + h_1^2} (\zeta^2 + h_2^2)^{-1}, \quad h_1 = b, \quad h_1 h_2^{-2} = 2b(1 - b^2). \quad (3.1)$$

Можно предложить и более простую по сравнению с (3.1) аппроксимацию функции $K(\zeta)$:

$$K(\zeta) \approx (\zeta^2 + h_1^2)^{-1/2}, \quad h_1 = b. \quad (3.2)$$

Аппроксимация вида (3.2) выбирается из следующих соображений: во-первых, точка ветвления функции (3.2) совпадает с первой точкой ветвления символа ядра $K(\zeta)$ вида (1.11), и можно говорить об аппроксимации $K(\zeta)$ в области $|v| < h_1 < 1$, $|u| < \infty$ плоскости комплексного переменного $\zeta = u + iv$, что дает возможность получить решение задачи, правильное с физической точки зрения, так как скорость распространения продольной волны контактных давлений под штампом совпадает с c_1 [8]; во-вторых, погрешность такой аппроксимации не превосходит 6 % вдоль действительной оси.

* Приближение символа ядра $K(\zeta)$ вида (1.11), учитывающее его поведение на всей комплексной плоскости $\zeta = u + iv$, дано в [7].

Внося $K(\zeta)$ в форме (3.2) в соотношения (2.11) и (2.19), придем к равенствам (2.15), (2.21), в которых необходимо заменить параметр Λ выражением $\Lambda = c_1 a^{-1}$. Таким образом, характер контактных напряжений здесь тот же, что и в первой задаче, и поэтому может быть проиллюстрирован при помощи рис. 1, 2.

В заключение отметим, что примерно в такой же постановке решалась задача о полубесконечном штампе в [8], причем факторизация функции $K(\zeta)$ (1.11) бралась в форме интегралов Коши. Качественно результаты [8] совпадают с результатами настоящей работы.

Кроме того, стыковка решений поставленных задач при малых и больших значениях времени, как показали численные расчеты, происходит в районе $t = 2\Lambda^{-1}$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Решение интегрального уравнения (1.6), (1.7) может быть построено методом ортогональных функций, если воспользоваться спектральным соотношением [9]

$$-\int_{-1}^1 \frac{ce_n(\arccos \xi, -\varkappa)}{\sqrt{1-\xi^2}} K_0\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi \frac{Fek_n(0, -\varkappa)}{Fek'_n(0, -\varkappa)} ce_n(\arccos x, -\varkappa)$$

($|x| < 1$, $\varkappa = 1/(4\pi^2)$) и свойством ортогональности периодических функций Матье. Опуская промежуточные выкладки, имеем

$$\varphi^L(x, p) = \frac{2gf^L(p)}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} A_0^{(2n)} \frac{Fek'_{2n}(0, -\varkappa)}{Fek_{2n}(0, -\varkappa)} ce_{2n}(\arccos x, -\varkappa). \quad (3.3)$$

Теперь для получения решения основной нестационарной задачи о чистом сдвиге упругого полупространства необходимо совершить в формуле (3.3) обратное преобразование Лапласа — Карсона согласно (1.4). Принимая в расчет последнее соотношение (2.4), запишем

$$\varphi(x, t) = \frac{g}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(t-\tau) h(x, \tau) d\tau, \quad (3.4)$$

$$h(x, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} A_0^{(2n)} \frac{Fek'_{2n}(0, -\varkappa)}{Fek_{2n}(0, -\varkappa)} ce_{2n}(\arccos x, -\varkappa).$$

Численное обращение преобразования Лапласа — Карсона во второй формуле (3.4) выполняется, например, при помощи метода Папулиса [10]. После этого можно определить силу $N_0(t)$ согласно (2.6) и первой формуле (3.4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00181-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
2. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.
3. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

5. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965.
6. **Нобл Б.** Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. **Боев С. И., Сумбатян М. А.** Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости при высоких частотах колебаний // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 6. С. 1039–1043.
8. **Флитман Л. М.** Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 4. С. 697–705.
9. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Метод ортогональных функций в смешанных задачах механики сплошных сред // Прикл. механика. 1977. Т. 13, № 12. С. 9–17.
10. **Papulis A.** A new of inversion method of the Laplace transforms // Quart. Appl. Math. 1957. V. 14, N 4. P. 405–414.

Поступила в редакцию 21/IX 1995 г.
