ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

А. А. Кошкин (*Москва*)

Рассматривается нагревание бесконечного пространства с цилиндрической полостью радиуса R, по которой протекает газ или жидкость с температурой, изменяющейся по закону

$$b + a_0 \cos 2\pi\nu\tau$$

где ν — частота колебания, a_0 — амплитуда, τ — время, b — среднее значение температуры. Начальная температура тела равна нулю. Теплообмен между поверхностью и средой определяется коэффициентом теплоотдачи α.

Требуется найти распределение температуры $t = t(r, \tau)$ по радиусу тела в любой момент времени и удельный расход тепла.

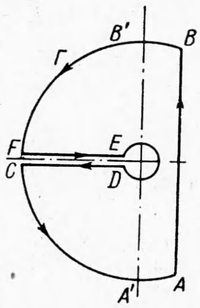
Уравнение теплопроводности для этого случая

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right) \qquad (R < r < \infty)$$

Краевые условия

$$-\lambda\,(\partial t / \partial r)_{r=R} = \alpha\,[b + a_0 \cos 2\pi\nu\tau - t(R, \tau)], \qquad (\partial t / \partial r)_{r\to\infty} = 0, \qquad t(r, 0) = 0$$

Здесь a и λ — соответственно коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала тела, r — текущий радиус.



Задачу решаем операционным методом. Решение для изображения имеет вид

$$T(s, r) = \frac{(\alpha / \lambda)\,[b\,(s^2 + \omega^2) + a_0 s^2]\,K_0(\sqrt{s / a}\,r)}{s\,(s^2 + \omega^2)\,[\sqrt{s / a}\,K_1(\sqrt{s / a}\,R) + (\alpha/\lambda)\,K_0(\sqrt{s / a}R)]}$$

где $\omega = 2\pi\nu$. Оригинал функции по теореме обращения будет

$$t(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} T(r, s)\,e^{s\tau}\,ds$$

Подынтегральная функция неоднозначна относительно s и имеет в начале координат особую точку. Для получения решения будем пользоваться контуром фигуры. В области, ограниченной этим контуром, подынтегральная функция однозначна и имеет полюсы $\pm i\omega$. Радиус малой окружности с центром в точке O равен ε. Легко показать, что при $R \to \infty$ интегралы вдоль $B'B$ и $B'F$ стремятся к нулю. Это замечание также относится к интегралам вдоль CA' и $A'A$.

Тогда по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} T(s, r)\,e^{s\tau}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\,\Omega + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\lambda}\,a_0\,\frac{K_0(\sqrt{i\omega / a}\,r)\,e^{i\omega\tau}}{\sqrt{i\omega / a}\,K_1(\sqrt{i\omega / a}\,R) + (\alpha / \lambda)K_0(\sqrt{i\omega / a}\,R)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\lambda}\,a_0\,\frac{K_0(\sqrt{-i\omega / a}\,r)\,e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{-i\omega / a}\,K_1(\sqrt{-i\omega / a}\,R) + (\alpha / \lambda)\,K_0(\sqrt{-i\omega / a}\,R)}$$

где Ω означает предел, при $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ суммы интегралов вдоль отрезка CD, малой окружности и отрезка EF. Интеграл вдоль малой окружности при $\varepsilon \to 0$ будет равен b. Для определения интегралов вдоль CD и EF положим соответственно

$$s = aU^2 \exp(-i\pi), \qquad s = aU^2 \exp(i\pi)$$

Получим

$$\Omega = b + \frac{2\alpha}{\pi\lambda}\int\limits_0^\infty \frac{b\,(a^2U^4 + \omega^2) + a_0 a^2 U^4}{a^2U^4 + \omega^2} \times$$

$$\times \frac{\{[UY_1(UR) + (\alpha/\lambda)\,Y_0(UR)]\,J_0(Ur) - [UJ_1(UR) + (\alpha/\lambda)\,J_0(UR)]\,Y_0(UR)\}}{[UJ_1(UR) + (\alpha / \lambda)\,J_0(UR)]^2 + [UY_1(UR) + (\alpha / \lambda)\,Y_0(UR)]^2}\,e^{-aU^2\tau}\,\frac{dU}{U}$$

Введем обозначения

$$\mu = UR,\ h = (\alpha / \lambda) R,\ F = (a / R^2)\tau,\ P = (\omega / a) R^2$$

$$\varphi(\mu) = \frac{(b - t_0)(\mu^4 + P^2) + a_0\mu^4}{\mu^4 + P^2}$$

$$\Phi(\mu) = \frac{[\mu Y_1(\mu) + hY_0(\mu)]\, J_0(\mu r/R) - [\mu J_1(\mu) + hJ_0(\mu)]\, Y_0(\mu r/R)}{[\mu J_1(\mu) + hJ_0(\mu)]^2 + [\mu Y_1(\mu) + hY_0(\mu)]^2}$$

В этом случае выражение для температуры тела имеет вид:

$$t(r, \tau) = b + \frac{1}{2} ha_0 \frac{K_0(\sqrt{iP}\, r/R)\, e^{iPF}}{\sqrt{iP}\, K_1(\sqrt{iP}) + hK_0(\sqrt{iP})} +$$

$$+ \frac{1}{2} ha_0 \frac{K_0(\sqrt{-iP}\, r/R)\, e^{-iPF}}{\sqrt{-iP}\, K_1(\sqrt{-iP}) + hK_0(\sqrt{-iP})} + \frac{2h}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\mu)\, \Phi(\mu)\, e^{-\mu^2 F} \frac{d\mu}{\mu} \tag{1}$$

Здесь t_0 — начальная температура тела, если она не равна нулю. Формула (1) неудобна для расчетов, так как при $\mu = 0$ подынтегральная функция неопределенна; поэтому целесообразно интеграл в формуле (1) представить в виде суммы двух интегралов от 0 до μ_0 и от μ_0 до ∞.

Под μ_0 подразумевается величина, квадрат которой $\ll 1$.

Разлагая числитель и знаменатель подынтегральной функции в ряд и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим расчетную формулу для интеграла от 0 до μ_0

$$\int_0^{\mu_0} \varphi(\mu)\, \Phi(\mu)\, e^{-\mu^2 F} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{(b - t_0)}{h^2}\left(1 + h \ln \frac{r}{R}\right) \left\{\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\pi h}\left(h \ln \frac{\mu_0}{2} + h\gamma - 1\right)\right] + \frac{\pi}{2}\right\}$$

где γ — эйлерова постоянная ($\gamma = 0{,}5772157\ldots$)

Окончательная формула для расчета распределения температуры в теле может быть представлена в следующем виде:

$$t(r, \tau) = b + \frac{1}{2} ha_0 \frac{K_0(\sqrt{iP}\, r / R)\, e^{iPF}}{\sqrt{iP}\, K_1(\sqrt{iP}) + hK_0(\sqrt{iP})} +$$

$$+ \frac{1}{2} ha_0 \frac{K_0(\sqrt{-iP}\, r / R)\, e^{-iPF}}{\sqrt{-iP}\, K_1(\sqrt{-iP}) + hK_0(\sqrt{-iP})} - \frac{2}{\pi h}(b - t_0)\left(1 + h \ln \frac{r}{R}\right) \times$$

$$\times \left\{\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\pi h}\left(h \ln \frac{\mu_0}{2} + \gamma h - 1\right)\right] + \frac{\pi}{2}\right\} + \frac{2h}{\pi}\int_{\mu_0}^\infty \varphi(\mu)\, \Phi(\mu)\, e^{-\mu^2 F} \frac{d\mu}{\mu} \tag{2}$$

Для поверхности тела ($r / R = 1$) все члены формулы (2) очевидным образом упрощаются, а функция $\Phi(\mu)$ принимает вид

$$\Phi(\mu) = -\frac{2}{\pi\{[\mu J_1(\mu) + hJ_0(\mu)]^2 + [\mu Y_1(\mu) + hY_0(\mu)]^2\}} \tag{3}$$

При $h = \infty$ температура поверхности будет точно следовать за изменением температуры среды. Формула для этого случая элементарно получается из (2).

Интеграл в формуле (2) с течением времени уменьшается и, начиная с некоторого значения $F > F_1$ (квазистационарное состояние), он становится ничтожно малым по сравнению со вторым и третьим членами, так что им можно пренебречь.

Тогда для квазистационарного состояния можно написать

$$\frac{t(r, \tau)}{a_0} = \frac{b}{a_0} + \sqrt{N_i N_{-i}} \cos\left[PF - \operatorname{arc\,tg}\left(i\,\frac{N_i - N_{-i}}{N_i + N_{-i}}\right)\right] \tag{4}$$

где

$$N_i = \frac{h\, K_0(\sqrt{iP}\, r / R)}{\sqrt{iP} K_1(\sqrt{iP}) + hK_0(\sqrt{iP})},\quad N_{-i} = \frac{h\, K_0(\sqrt{-iP}\, r / R)}{\sqrt{-iP} K_1(\sqrt{-iP}) + hK_0(\sqrt{-iP})}$$

Из формулы (4) следует, что температура в любой точке тела будет совершать простое гармоническое колебание с той же частотой, но фаза колебания будет отставать от фазы колебания температуры среды.

Амплитуда колебаний будет уменьшаться с глубиной. Максимальная амплитуда соответствует поверхности тела ($r/R=1$), но она меньше амплитуды колебаний среды на величину $\sqrt{N_i N_{-i}}$. Тепловой поток в стенку

$$q(\tau)=\frac{1}{2}\lambda h a_0 \frac{\sqrt{iP}}{R}\frac{K_1(\sqrt{iP})\, e^{iPF}}{\sqrt{iP}\,K_1(\sqrt{iP})+hK_0(\sqrt{iP})}+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda h a_0 \frac{\sqrt{-iP}}{R}\frac{K_1(\sqrt{-iP})\, e^{-iPF}}{\sqrt{-iP}\,K_1(\sqrt{-iP})+hK_0(\sqrt{-iP})}+$$

$$+\frac{2\lambda}{\pi R}(b-t_0)\left\{\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2}{\pi h}\left(h\ln\frac{\mu_0}{2}+h\gamma-1\right)+\frac{\pi}{2}\right\}-\frac{2h^2\lambda}{\pi R}\int\limits_{\mu_0}^{\infty}\varphi(\mu)\,\Phi(\mu)\,e^{-\mu^2 F}\frac{d\mu}{\mu} \qquad (5)$$

Здесь $\Phi(\mu)$ определяется формулой (3). Для квазистационарного состояния два последние члена в решении (5) можно отбросить. Для нахождения общего количества тепла выражения (5) нужно проинтегрировать по промежутку времени. Для квазистационарного состояния формула (5) может быть преобразована аналогично выражению (4).

Поступила 3 II 1962

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ ДВУХ НЕПРОЗРАЧНЫХ СЕРЫХ ТЕЛ

Н. А. Рубцов (*Новосибирск*)

Рассматривается нестационарное лучистое взаимодействие двух полубесконечных тел. Даются приближенные выражения для результирующей плотности излучения. Для исследования используется решение А. Н. Тихонова [1] об остывании полубесконечного тела при излучении в окружающее пространство при постоянной температуре.

Задача о лучистом взаимодействии (фиг. 1) двух полубесконечных тел *1* и *2* приводится к уравнениям теплопроводности с граничными и начальными условиями

$$\frac{\partial^2 T_1(x,\tau)}{\partial x^2}=\frac{1}{a_1}\frac{\partial T_1(x,\tau)}{\partial \tau} \qquad (0<x<\infty)$$

$$\frac{\partial^2 T_2(x,\tau)}{\partial x^2}=\frac{1}{a_2}\frac{\partial T_2(x,\tau)}{\partial \tau} \qquad (0>x>-\infty) \qquad \left(a=\frac{\lambda}{c\rho}\right) \qquad (1)$$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}(0,\tau)=E_1(0,\tau)=\sigma_{12}\,[T_2^4(0,\tau)-T_1^4(0,\tau)] \qquad (\sigma_{12}=\sigma_0 A_1 A_2 \Phi_{12})$$

$$\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y}(0,\tau)=E_2(0,\tau)=\sigma_{21}\,[T_1^4(0,\tau)-T_2^4(0,\tau)] \qquad (\sigma_{21}=\sigma_0 A_1 A_2 \Phi_{21}) \qquad (2)$$

$$T_1(x,0)=T_1, \qquad T_2(x,0)=T_2 \qquad (3)$$

Здесь a_1 и a_2 — коэффициенты температуропроводности; A_1, A_2 — поглощательные способности поверхностей тел; Φ_{12}, Φ_{21} — средние разрешающие угловые коэффициенты излучения между телами; $\sigma_0=4.9\cdot 10^{-8}$ *ккал/м*^{2} *час·град*^{4} — постоянная излучения абсолютно черного тела; $E_1(0,\tau)$ и $E_2(0,\tau)$ — результирующие плотности излучения по поверхностям тел *1* и *2* в момент времени τ. Применительно к рассматриваемой излучающей системе, составленной из двух бесконечно протяженных параллельных тел, имеют место соотношения

$$\Phi_{12}=\Phi_{21}=\frac{1}{1/A_1+1/A_2-1}, \qquad \sigma_{12}=\sigma_{21}$$

На фиг. 1 промежуток между телами *1* и *2* изображен условно с тем, чтобы показать, что нестационарное взаимодействие осуществляется по законам лучистого теплообмена между телами, разделенными диатермической, прозрачной средой. В рассмотренной выше постановке задачи подразумевается схема из двух полубесконечных тел, находящихся между собой как бы в «несовершенном» тепловом контакте. Термическое сопротивление такого контакта определяется законами лучистого теплообмена.

Учитывая симметричность процесса лучистого теплообмена в рассматриваемой задаче, ниже рассматривается решение только для одного тела (тело *1*).