УДК 539.3

Т. А. Боднарь

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЙЛЕРОВА СТЕРЖНЯ. НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

1. Постановка задачи. Нелинейное уравнение Эйлера, описывающее деформируемое состояние упругого стержня переменной жесткости, шарнирно закрепленного на одном конце и находящегося под воздействием силы P, приложенной к нему с другого конца (рис. 1), имеет вид [1, 2]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2\rho(x)\,y\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{0,5}\equiv F(y,k)=0, \tag{1.1}$$

$$x_0\leqslant x\leqslant x_1=x_0+\pi,\quad k^2=\frac{Pl^2}{EI\pi^2},$$

где y — прогиб; E — модуль упругости; I — момент инерции; $\rho(x)$ — функция, характеризующая изменение жесткости стержня по его длине; l — длина стержня; $F(y,k)=0$ — операторная запись уравнения Эйлера; остальные обозначения даны на рис. 1.

Уравнение (1.1) — довольно часто встречающийся пример при доказательстве теорем существования решений нелинейных дифференциальных уравнений [1—3] и качественном анализе множества физических явлений, моделируемых этими уравнениями [4, 5].

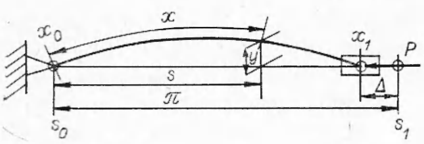

Рис. 1

В прикладном анализе линеаризованное уравнение Эйлера используется для решения различных частных задач, отличающихся друг от друга способом закрепления стержня и характером действующих сил [6—8]. Решение нелинейного уравнения (1.1) в эллиптических функциях известно лишь для стержня с постоянным поперечным сечением ($\rho(x)=1$) [3].

В некоторых работах [6, 8] пренебрегается смещением Δ свободного конца стержня как величиной более высокого порядка малости по сравнению с прогибом и вместо (1.1) рассматривается нелинейное уравнение

$$\frac{d^2y}{ds^2}+k^2\rho(s)\,y\left[1+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{1,5}=0, \tag{1.2}$$

которое решается при допущении $\rho(s)=1$.

Уравнения (1.1), (1.2) после линеаризации совпадают, но использование (1.2) вместо (1.1) в нелинейном анализе дает большие погрешности. Вместе с тем утверждение [2] об отсутствии решений уравнений (1.2) при $k^2>0$ и, следовательно, физического смысла небезусловно, что показано ниже.

Устойчивость решений уравнения (1.1) с граничными условиями

$$y(x_0)=y(x_1)=0 \tag{1.3}$$

исследуется методом проекций [4], в соответствии с которым определяется обладающее свойством полноты пространство собственных функций подходящего линейного оператора и вводится понятие амплитуды. Условие разрешимости (теорема Фредгольма об альтернативе) дает возможность вычислить границу, разделяющую область значений параметров задачи (1.1), (1.3) на зоны устойчивых и неустойчивых решений.

Помимо уравнения (1.1) изучена устойчивость решений уравнения нагруженного стержня, содержащего несовершенства.

Завершая постановку задачи, заметим, что если граничными условиями уравнения (1.2) будут

$$(1.4)\qquad y(s_0)=y(s_1-\Delta(y))=0,$$

то задачи (1.1), (1.3) и (1.2), (1.4) эквивалентны. При этом для анализа устойчивости предпочтительнее запись задачи в виде (1.1), (1.3) в силу однородности граничных условий.

2. Анализ устойчивости. Разложение (1.1) в ряд по степеням y, dy/dx в точке $(y, dy/dx)=(0, 0)$ дает

$$(2.1)\qquad F(y, k)=L_k y+\sum_{n=2}^{\infty} c_n y\,(dy/dx)^{n-1}=0,$$

где $L_k=d^2/dx^2+k^2\rho(x)$ — производящий оператор;

$$c_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y\,\partial(dy/dx)^{n-1}}\left(k^2\rho(x)\,y\,(1-(dy/dx)^2)^{0,5}\right).$$

Спектр оператора L_k состоит из собственных значений λ^2, удовлетворяющих краевой задаче

$$(2.2)\qquad L_\lambda y=0,\quad y(x_0)=y(x_1)=0.$$

В общем случае, если $\rho(x)$ не имеет специального вида, решение задачи о собственных значениях (2.2) возможно лишь приближенными методами [9]. При этом вопрос о сходимости того или иного метода остается открытым и зависит от удачного выбора некоторого базового уравнения. Без всяких претензий на общность или полноту анализа, а исходя из того, что k^2 всегда можно выбрать так (взять момент инерции максимального поперечного сечения стержня), чтобы $0<\rho(x)\leqslant 1$ на $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, в качестве базового возьмем уравнение

$$(2.3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y=0,\quad y(x_0)=y(x_1)=0.$$

Тогда, воспользовавшись фундаментальной системой решений задачи (2.3), состоящей из функций $\sin\lambda x$, $\cos\lambda x$, и имея в виду первое краевое условие, удобно записать (2.2) как эквивалентное интегральное уравнение

$$(2.4)\qquad \varphi(x)=\sin\lambda(x-x_0)-\lambda A\varphi(x),$$

$$A\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}\sin\lambda(x-\xi)(\rho(\xi)-1)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Собственные значения $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$ и соответствующие им собственные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... уравнения (2.4) будут также собственными значениями и функциями уравнения (2.2). Существенно отметить, что нуль не является собственным значением, а ненулевые собственные значения простые. (При некоторых специальных функциях $\rho(x)$ задача (2.2) имеет точное решение, а собственные значения оператора L_λ двукратны. Этот случай здесь не рассматривается.)

Решение (2.4) проводится методом последовательных приближений

$$(2.5)\qquad \varphi^{(n)}(x)=\sin\lambda(x-x_0)-\lambda A\varphi^{(n-1)}(x),$$

причем на каждом шаге собственное значение λ^2 определяется из уравнения, полученного с учетом второго краевого условия,

$$(2.6)\qquad \sin\lambda\pi-A\varphi^{(n)}(x_1)=0.$$

В качестве нулевого приближения можно взять $\varphi^{(0)}(x)=0$, 1 или любую другую функцию, удовлетворяющую краевым условиям (1.3). Принцип равномерной ограниченности [1, 2] гарантирует сходимость последовательности $\varphi^{(n)}(x)$, а в силу $0<\rho(x)\leqslant 1$ представляется очевидным, что скорость сходимости будет характеризоваться разностью $|\rho_1 - 1|$, где ρ_1 — минимальное значение, принимаемое функцией $\rho(x)$ на интервале (x_0, x_1). Действительно, поскольку

$$\sup_{\substack{x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ x_0 \leqslant \xi \leqslant x_1}} |\sin \lambda (x - \xi)(\rho(\xi) - 1)| = |\rho_1 - 1|,$$

$$\sup_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |\sin \lambda (x - x_0)| = 1,$$

справедлива оценка [10]

$$|\varphi^{(n+1)}(x) - \varphi^{(n)}(x)| \leqslant |\lambda|^n |\rho_1 - 1|^n \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Наконец, если интегральное уравнение (2.4) не имеет точного решения, скорее всего, так оно и есть, то удобно представить $\rho(x)$ в виде разложения по собственным функциям уравнения (2.3):

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \rho(x) \sin kx \, dx.$$

Покончив с определением собственных функций и собственных значений оператора L_k, заметим, что минимальное положительное собственное значение λ_1^2 позволяет записать условие устойчивости решения (2.2) как

$$\mu = k^2 - \lambda_1^2 \leqslant 0. \tag{2.7}$$

Знак равенства в (2.7) определяет критическое значение k_*^2, полученное в линейном приближении. При $\rho(x) = 1$ результат $\mu = k_*^2 - 1 = 0$ известен [6 — 8].

Возвратившись к функциям $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, легко установить, что они интегрируемы на интервале (x_0, x_1) с квадратом и ортогональны между собой с весом $\rho(x)$. Пространство этих функций является полным со скалярным произведением векторов $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$, равным $\langle \varphi_i(x), \varphi_j^*(x) \rangle$ (все признаки гильбертова пространства), так что любые решения (2.1) могут быть представлены в виде разложения по $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...

Появившаяся выше функция $\varphi_j^*(x)$ сопряжена с функцией $\varphi_j(x)$ относительно скалярного произведения и с точностью до постоянного множителя M равна $\varphi_j^*(x) = M\rho(x)\varphi_j(x)$.

Теперь, определив амплитуду как проекцию $y(x)$ на собственное подпространство, ассоциированное с сопряженным вектором $\varphi_1^*(x)$, $\varepsilon = \langle y(x), \varphi_1^*(x) \rangle$, будем искать решение (2.1) в виде рядов

$$\begin{vmatrix} y \\ \mu \end{vmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \begin{vmatrix} y_n \\ \mu_n \end{vmatrix}. \tag{2.8}$$

Прежде чем приступить к определению y_n, μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, выразим в (2.1), используя (2.7) при знаке равенства, k^2 через μ, λ_1^2 таким образом, что оператор

$$L_\mu = d^2/dx^2 + (\mu + \lambda_1^2)\rho(x).$$

Тогда подстановка (2.8) в (2.1) и отождествление членов при одинаковых степенях ε до третьей степени включительно приводят к системе

$$L_0 y_1 = 0; \tag{2.9}$$

$$L_0 y_2 + 2\mu_1 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1 + 2\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1) = 0; \tag{2.10}$$

$$L_0 y_3 + 3\mu_1 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_2 + 6\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) + 3\mu_2 \frac{\partial L_0}{\partial \mu} y_1 + 6\mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1) = 0, \tag{2.11}$$

где

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{c_2\lambda_1^2}{2}\left(y_1\frac{dy_2}{dx} + y_2\frac{dy_1}{dx}\right);$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \frac{c_3\lambda_1^2}{3}\left(\mathbf{y}_1\frac{dy_2}{dx}\frac{dy_3}{dx} + y_2\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_3}{dx} + y_3\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx}\right)$$

Из (2.9) непосредственно следует $y_1 = \varphi_1(x)$. Для решения (2.10), (2.11) используется теорема Фредгольма об альтернативе, в соответствии с которой данные уравнения разрешимы, если

$$\langle L_0 y_2, \varphi_1^*(x)\rangle = \langle L_0 y_3, \varphi_1^*(x)\rangle = 0$$

и, значит,

$$\mu_1\left\langle\frac{\partial L_0}{\partial\mu}y_1, \varphi_1^*(x)\right\rangle + \langle\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1), \varphi_1^*(x)\rangle = 0,$$

$$\mu_1\left\langle\frac{\partial L_0}{\partial\mu}y_2, \varphi_1^*(x)\right\rangle + 2\langle\mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \varphi_1^*(x)\rangle +$$

$$+ \mu_2\left\langle\frac{\partial L_0}{\partial\mu}y_1, \varphi_1^*(x)\right\rangle + 2\langle\mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1), \varphi_1^*(x)\rangle = 0,$$

откуда, учитывая, что $c_2 = 0$, $c_3 = -0{,}5$, легко получить $\mu_1 = 0$, $y_2 = 0$,

$$\mu_2 = \frac{\lambda_1^2\langle\rho(x)\,y_1(dy_1/dx)^2, \varphi_1^*(x)\rangle}{\langle\rho(x)\,y_1, \varphi_1^*(x)\rangle}.$$

Таким образом, в плоскости (μ, ε) граница устойчивости определяется уравнением

$$\mu = 0{,}5\mu_2\varepsilon^2. \tag{2.12}$$

Для того чтобы решение (2.12) было единственным, необходимо найти условие нормировки. С этой целью подставим (2.8) в выражение для амплитуды $\varepsilon = \langle y, \varphi_1^*(x)\rangle$ и продифференцируем последнее по ε. В результате имеем уравнение

$$\left\langle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}y_k\varepsilon^{k-1}, \varphi_1^*(x)\right\rangle = 1,$$

которое с учетом $\langle y_k, \varphi_1^*(x)\rangle = 0$ при $k \neq 1$ дает условие нормировки $\langle y_1, \varphi_1^*(x)\rangle = 1$. Данное условие равносильно $\varepsilon = 1$, $M = \langle\varphi_1(x), \rho(x)\varphi_1(x)\rangle^{-1}$ и дает возможность определить критическое значение k_*^2, при котором решение (2.1) теряет устойчивость:

$$k_*^2 = \lambda_1^2 + 0{,}5\mu_2. \tag{2.13}$$

Поскольку $\mu_2 > 0$ при любой функции $\rho(x)$, критическая нагрузка $P_* = P(k_*^2)$ при нелинейном анализе выше, чем полученная в линейном приближении.

Возвращаясь к (1.2), заметим, что у данного уравнения нет решения при $k^2 > 0$, если $\lambda_1^2 < 1{,}5\mu_2$.

В качестве примера рассмотрим стержень с параболическим изменением поперечного сечения

$$\rho(x) = \pi^2(\pi^2 + ax(\pi - x))^{-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

где a — постоянная. Как и следовало ожидать, интегральное уравнение (2.4) не имеет точного решения, поэтому представим $\rho(x)$ в виде ряда, ограничившись первыми двумя членами:

$$\rho(x) = b_1\sin x + b_2\sin 2x.$$

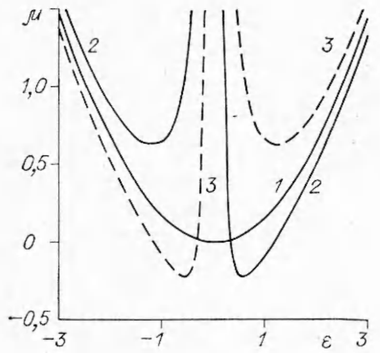

Рис. 2

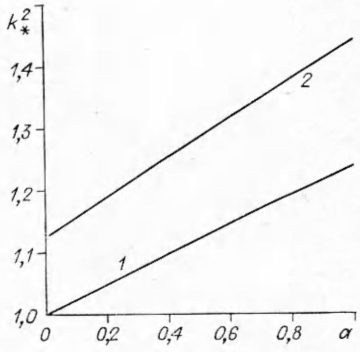

Рис. 3

Подставив данное выражение в (2.5) и приняв $\varphi^{(0)}(x) = 1$, находим первое приближение для собственной функции, на котором остановимся:

$$\text{(2.14)} \qquad \varphi_1(x) = \varphi_1^{(1)}(x) = \sin\lambda_1 x + \lambda_1\left[\frac{b_1}{1-\lambda_1^2}(\lambda_1\sin x - \sin\lambda_1 x) + \frac{2b_2}{4-\lambda_1^2}(\lambda_1 \sin 2x - \sin\lambda_1 x)\right].$$

Подстановка (2.14) в (2.6) приводит к уравнению для λ_1:

$$\text{(2.15)} \qquad 1 + \lambda_1\left[\frac{b_1}{\lambda_1^2 - 1} + \frac{2b_2}{\lambda_1^2 - 4}\right] = 0.$$

Результаты расчетов границы устойчивости в плоскости (μ, ε), проведенные по формуле (2.12) с использованием (2.14), (2.15) при $a = 0{,}5$, приведены на рис. 2 (кривая *1*), на рис. 3 представлены зависимости $k_*^2 = k_*^2(a)$, рассчитанные по формулам (2.7), (2.13) (кривые *1*, *2* соответственно). При $a = 0$ расчеты по формуле (2.7) дают $k_*^2 = 1$, а по формуле (2.13) $k_*^2 = 1{,}125$. Для сравнения укажем, что для уравнения (1.2) формула (2.13) при $a = 0$ дает $k_*^2 = 0{,}625$.

3. Несовершенства. Пусть стержень содержит несовершенства такие, что математическая запись задачи имеет вид

$$\text{(3.1)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + k^2\left[\rho(x)\, y\,(1-(dy/dx)^2)^{0,5} + \omega\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\, y^n\right] \equiv F(y, \mu, \omega) = 0,$$

$$k^2 = \mu + \lambda_1^2,\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1 = x_0 + \pi, \quad y(x_0) = y(x_1) = 0,$$

где ω — постоянная; $\psi_n(x)$ $(n = 0, 2, \ldots)$ — функции, среди которых, по крайней мере, $\psi_0(x)$ не равна тождественно нулю.

Смысл уравнения (3.1) состоит в том, что при нулевой нагрузке $k^2 \to 0$, $\omega \sim 1/k^2$ ось стержня не является идеальной прямой, а определяется уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2\omega\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\, y^n = 0.$$

Как видно из п. 2, решение уравнения $F(y, \mu, 0) = 0$ строго теряет устойчивость при переходе μ из области отрицательных в область положительных значений. Из этого следует [4, 11], что точка $(y, \mu) = (0, 0)$ — двойная особая точка, в которой происходит ветвление решений. Наличие несовершенств $\omega \neq 0$, разрушающих бифуркацию в точке $(y, \mu) = (0, 0)$, приводит к изолированным решениям уравнения $F(y, \mu, \omega) = 0$, которым точка $(y, \mu) = (0, 0)$ не принадлежит.

Условие $\langle \partial F(0,0,0)/\partial\omega,\ \varphi_1^*(x)\rangle \neq 0$ (в дальнейшем для упрощения записи принято $F(0,0,0)=F$) и теорема о неявной функции гарантируют существование решения уравнения

$$F(y(\mu,\varepsilon),\ \mu,\ z(\mu,\varepsilon))=0 \tag{3.2}$$

относительно формально введенной функции $z(\mu,\varepsilon)=\omega$.

Данное решение будет разыскиваться в виде ряда по степеням μ, ε в точке $(\mu,\varepsilon)=(0,0)$. Снова, упрощая запись обозначением $z=z(0,0)$, положим

$$z(\mu,\varepsilon)=z+\frac{\partial z}{\partial\varepsilon}\varepsilon+\frac{\partial z}{\partial\mu}\mu+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varepsilon^2}\varepsilon^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial\varepsilon}\mu\varepsilon+\frac{\partial^2 z}{\partial\mu^2}\mu^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial\varepsilon^3}\varepsilon^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial\mu\,\partial\varepsilon^2}\mu\varepsilon^2+3\frac{\partial^3 z}{\partial\mu^2\partial\varepsilon}\mu^2\varepsilon+\frac{\partial^3 z}{\partial\mu^3}\mu^3\right)+\ldots \tag{3.3}$$

С целью определения коэффициентов в разложении (3.3) для начала воспользуемся свойствами двойной точки

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial\varepsilon}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varepsilon}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial\mu}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\mu}=0.$$

Первое соотношение с учетом (2.8) дает $z=0$, а из условий разрешимости двух оставшихся

$$\left\langle\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varepsilon},\ \varphi_1^*(x)\right\rangle=\left\langle\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\mu},\ \varphi_1^*(x)\right\rangle=0$$

и неравенства $\partial F/\partial z\neq 0$ следует $\partial z/\partial\mu=\partial z/\partial\varepsilon=0$.

Вторые производные от (3.2) приводят к системе

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial\varepsilon^2}\right)+\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon},\ \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon}\right)+\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{\partial^2 z}{\partial\varepsilon^2}=0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial\mu\,\partial\varepsilon}\right)+\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial\mu\,\partial y}\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon}\right)+\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial\varepsilon}=0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial\mu^2}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}+\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{\partial^2 z}{\partial\mu^2}=0,$$

условия разрешимости которой

$$\left\langle\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial\varepsilon^2}\right),\ \varphi_1^*(x)\right\rangle=\left\langle\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial\mu\,\partial\varepsilon}\right),\ \varphi_1^*(x)\right\rangle=$$
$$=\left\langle\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\mathbf{y}}{\partial\mu^2}\right),\ \varphi_1^*(x)\right\rangle=0$$

с учетом $c_2=0$, $\partial^2F/\partial\mu^2=0$ дают

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varepsilon^2}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial\varepsilon^2}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial\mu^2}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial\mu^2}=0, \tag{3.4}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial\varepsilon}=-\left\langle\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial y\,\partial\mu}\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon}\right),\ \varphi_1^*(x)\right\rangle\left\langle\frac{\partial F}{\partial\omega},\ \varphi_1^*(x)\right\rangle^{-1}.$$

Наконец, третьи производные от (3.2), в которых опущены члены, содержащие нулевые сомножители, показывают, что система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^3\mathbf{y}}{\partial\varepsilon^3}\right)+\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{\partial^3 z}{\partial\varepsilon^3}+\frac{\partial^3\mathbf{F}}{\partial y^3}\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon},\ \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon},\ \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon}\right)=0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^3\mathbf{y}}{\partial\mu\,\partial\varepsilon^2}\right)+\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{\partial^3 z}{\partial\mu\,\partial\varepsilon^2}+2\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial\omega\,\partial y}\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial\mu\,\partial\varepsilon}=0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{y}}{\partial \mu^2 \partial \varepsilon}\right) + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial^3 z}{\partial \mu^2 \partial \varepsilon} + 2\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mu\, \partial y}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mu\, \partial \varepsilon}\right) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \mu\, \partial \omega}\frac{\partial^2 z}{\partial \mu\, \partial \varepsilon} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \mathbf{y}}{\partial \mu^3}\right) + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial^3 z}{\partial \mu^3} = 0$$

разрешима, если

(3.5) $$\frac{\partial^3 z}{\partial \varepsilon^3} = -\left\langle \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial y^3}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}\right), \varphi_1^*(x)\right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial \omega}, \varphi_1^*(x)\right\rangle^{-1},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \mu\, \partial \varepsilon^2} = -2\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \omega\, \partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial \mu\, \partial \varepsilon}, \varphi_1^*(x)\right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial \omega}, \varphi_1^*(x)\right\rangle^{-1},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \mu^2 \partial \varepsilon} = -2\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \mu\, \partial \omega}\frac{\partial^2 z}{\partial \mu\, \partial \varepsilon}, \varphi_1^*(x)\right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial \omega}, \varphi_1^*(x)\right\rangle^{-1}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial \mu^3} = 0.$$

Производные $\partial^n F/\partial y^i$ $(i \leqslant n)$ в приведенных выше выражениях следует воспринимать как матричные дифференциальные операторы (производные Фреше), так что производные, входящие в систему уравнений (3.5), запишем как

$$\frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial y^3}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}\right) = \mathbf{C}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1),$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \omega\, \partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}\right) = \lambda_1^2 \psi_1(x)\, y_1, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y\, \partial \mu}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varepsilon}\right) = \rho(x)\, y_1.$$

После подстановки выражений для коэффициентов (3.4), (3.5) в уравнение (3.3) последнее принимает вид

(3.6) $$\omega\langle \psi_0(x), \varphi_1^*(x)\rangle = -\lambda_1^{-2}\langle \rho(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle \mu\varepsilon +$$
$$+ 0{,}5\langle \rho(x)\, y_1 (dy_1/dx)^2, \varphi_1^*(x)\rangle \varepsilon^3 - \lambda_1^2\langle \psi_1(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle \langle \rho(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle \times$$
$$\times \langle \psi_0(x), \varphi_1^*(x)\rangle^{-1}\mu\varepsilon^2 + \lambda_1^{-4}\langle \rho(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle \mu^2\varepsilon.$$

Решая (3.6) методом последовательных приближений, находим связь между параметрами $\mu = \mu(\varepsilon, \omega/\varepsilon)$:

(3.7) $$\mu = \lambda_1^2\left[\frac{\langle \rho(x)\, y_1 (dy_1/dx)^2, \varphi_1^*(x)\rangle}{2\langle \rho(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle}\varepsilon^2 - \frac{\langle \psi_0(x), \varphi_1^*(x)\rangle}{\langle \rho(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle}\frac{\omega}{\varepsilon} -\right.$$
$$\left. - \frac{\langle \psi_1(x)\, y_1, \varphi^*(x)\rangle}{\langle \rho(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle}\frac{\omega}{\varepsilon}\varepsilon + \frac{\langle \psi_0(x), \varphi_1^*(x)\rangle^2}{\langle \rho(x)\, y_1, \varphi_1^*(x)\rangle^2}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2\right] + O\left(|\varepsilon| + \left|\frac{\omega}{\varepsilon}\right|\right)^3.$$

При отсутствии несовершенства $(\omega = 0)$ уравнения (3.7) и (2.12) совпадают. Подстановка в (3.7) выражения для μ (2.7) и использование

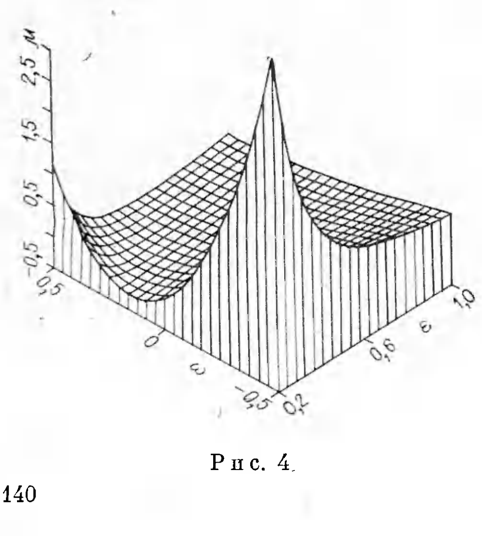

Рис. 4.

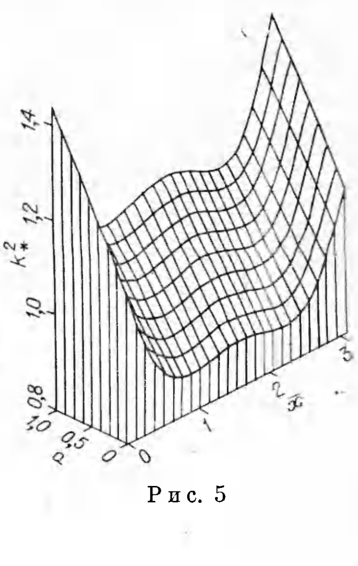

Рис. 5

условия нормировки $\varepsilon=1$ дают зависимость для критического значения k_*^2 стержня, содержащего несовершенства.

Теперь предположим, что стержень, рассмотренный в качестве примера в п. 2, содержит в точке $x=\bar{x}$ дефект, не зависящий от прогиба, и пусть $\psi_0(x)=\delta(x-\bar{x})$ — дельта-функция, $\psi_i(x)=0$, $i>0$.

После подстановки выражения для $\psi_0(x)$ в (3.7) и проведения расчетов при $\bar{x}=1{,}5$, $a=0{,}5$ найдены зависимости $\mu=\mu(\varepsilon,\ \omega/\varepsilon)$, изображенные на рис. 4, и $\mu=\mu(\varepsilon;\ 0{,}5/\varepsilon)$, $\mu=\mu(\varepsilon;\ -0{,}5/\varepsilon)$, приведенные на рис. 2 (кривые *2*, *3* соответственно).

На рис. 5 представлены результаты расчета критического значения $k_*^2=k_*^2(\bar{x},a)$ по формуле (3.7) при $\omega=1$. При $\bar{x}=0$, $\bar{x}=\pi$ расчеты по формулам (2.13), (3.7) совпадают.

В заключение следует отметить, что при рассмотрении теории устойчивости эйлерова стержня как раздела прочностных расчетов в машиностроении, особенно в случаях конструкций из тонкостенных стержней, для которых предельные нагрузки лимитируются из соображений устойчивости, результаты нелинейного анализа не лишены практической ценности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложения функционального анализа и теории операторов.— М.: Мир, 1983.
2. **Функциональный** анализ (сер. Справ. мат. б-ка)/Под ред. С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1972.
3. **Теория** ветвления и нелинейные задачи на собственные значения/Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана.— М.: Мир, 1974.
4. **Йосс Ж., Джозеф Д.** Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
5. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф.— М.: Мир, 1984.— Т. 1.
6. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.
7. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем (сер. Б-ка расчетчика).— М.: Машиностроение, 1978.
8. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем.— М.: Физматгиз, 1963.
9. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1961.
10. **Демидович Б. П., Марон М. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа.— М.: Физматгиз, 1963.
11. **Марсден Дж., Мак-Кракен М.** Бифуркация рождения цикла и ее приложение.— М.: Мир, 1980.

г. Бийск *Поступила 25/XI 1991 г., в окончательном варианте — 8/IV 1992 г.*

УДК 539.3

Т. А. Боднарь

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЙЛЕРОВА СТЕРЖНЯ

1. В [1] изучена устойчивость решений нелинейного уравнения Эйлера

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2\rho(x)\,y\left(1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{0,5}=0,\quad k^2=\frac{Pl^2}{EI\pi^2} \tag{1.1}$$

при условии, что собственные значения уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2\rho(x)\,y=0 \tag{1.2}$$

простые; тем самым из анализа выпал целый класс задач, для которых собственные значения уравнения (1.2) двукратны.

Продолжая анализ, проведенный в [1], рассмотрим уравнение (1.1) при $\rho(x)=x^\nu$, $-\infty<\nu<\infty$ и граничных условиях

$$y(x_1)=0,\quad dy(x_0)/dx=0, \tag{1.3}$$