УДК 532. 58. 33

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАВЕРН

А. Г. Петров

(*Москва*)

Теория обтекания тонкого тела [1] дает возможность получать для потенциала поля скорости разложения по малому параметру χ (толщина тела) с любой степенью точности. Первые шесть членов этого разложения имеют следующие порядки: 1, $\chi^2 \ln \chi$, χ^2, $\chi^4 \ln^2 \chi$, $\chi^4 \ln \chi$, χ^4. В большинстве работ по кавитационным обтеканиям расчеты выполнены с учетом лишь первых двух членов разложения (например, [2]). Задача определения свободной границы в этом приближении сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Для практических расчетов третий член разложения следует учитывать наряду со вторым, имеющим порядок, близкий к χ^2, тогда как последующие три члена разложения имеют существенно меньший порядок, близкий к χ^4. При учете члена χ^2 потенциал обтекания выражается через интегральный оператор от функции, задающей границу обтекаемого тела [1]. Поэтому уравнение свободной границы оказывается нелинейным интегродифференциальным. Работа [3] остается, по-видимому, единственной, в которой проведены расчеты в этом приближении. Решение интегродифференциального уравнения представляется в виде разложения по обратным степеням $\ln \chi$.

В настоящей работе для обтекания нетонких кавитаторов по схеме Рябушинского получено асимптотическое разложение по степеням параметра ε_1 для силы сопротивления F, первый член которого согласуется с асимптотической формулой, указанной в [4].

Для обтекания по схеме Кирхгофа ($\sigma = 0$) найдено разложение при $x \to \infty$ для границы свободной струи, главная асимптотика которого совпадает с асимптотическим законом расширения струи, полученным независимо Гуревичем и Левинсоном [5].

1. Теория безотрывного обтекания тонкого тела. Рассматривается задача обтекания тонкого тела вращения стационарным потоком невязкой несжимаемой жидкости. Пусть все длины отнесены к полудлине тела l_x, скорости — к скорости набегающего потока на бесконечности v_∞, а в меридиональной плоскости граница тела описывается уравнением

$$y = \chi f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Малый параметр $\chi \ll 1$ — мера относительной толщины обтекаемого тела, форма которого задается функцией $f(x)$. Потенциал поля скорости Φ находится из решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big/ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \chi \frac{df}{dx}, \quad |x| \leqslant 1, \quad y = \chi f(x),$$

$$\Phi \to x, \; x^2 + y^2 \to \infty.$$

В [1] изложен аналитический метод сращиваемых асимптотических разложений для решения (1.2). Следуя этому методу, можно получить разложение для потенциала Φ в окрестности тонкого тела

$$\Phi = x + L(z') + 2z' \ln \frac{y}{2} + O(\chi^4 \ln^2 \chi), \tag{1.3}$$

где функция $z(x)$ и линейный оператор L определяются с помощью формул

$$z = (1/4)\chi^2 f^2(x), \quad L(z) = -\ln(1 - x^2) z(x) + I(z); \tag{1.4}$$

$$I(z) = \int_{-1}^{1} \frac{z(x) - z(y)}{|x - y|} dy. \tag{1.5}$$

В [6] отмечается удобство формы интеграла (1.5), когда распределение площади поперечных сечений задано полиномом. В этом случае подынтегральная функция становится также полиномом.

Исходя из полученной асимптотической формулы для потенциала (1.3), нетрудно определить скорость на границе тонкого тела:

$$(1.6)\quad \frac{v^2}{v_\infty^2}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2=1+2\frac{d}{dx}L(z')+2z''\ln z+\frac{z'^2}{z}+O(\chi^4\ln^2\chi).$$

Если воспользоваться преобразованием

$$\frac{d}{dx}L(z')=\frac{z'(1)}{1-x}-\frac{z'(-1)}{1+x}-z''\ln(1-x^2)+I(z''),$$

то формула (1.6) принимает вид

$$(1.7)\qquad \frac{v^2}{v_\infty^2}=1+2z''\ln\frac{z}{1-x^2}+2I(z'')+\frac{z'^2}{z}+2\frac{z'(1)}{1-x}-2\frac{z'(-1)}{1+x}.$$

Собственные функции линейного интегрального оператора I — полиномы Лежандра $P_n(x)$, а собственные значения вычисляются по формуле

$$(1.8)\quad I(P_n)=\lambda_n P_n,\quad \lambda_0=0,\quad \lambda_n=2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right),\quad n\geqslant 1.$$

Таким образом, если граница тонкого тела $z(x)$ представляется полиномом, то скорость v по формулам (1.7) и (1.8) вычисляется вообще без квадратур.

2. Вариационная формулировка задачи кавитационного обтекания. Сила, действующая на кавитатор. Рассматривается отрывное осесимметричное обтекание произвольного тела по схеме Рябушинского. Исходя из формулы (1.6), получим уравнение свободной границы, на которой выполнено условие $v=v_k$:

$$(2.1)\qquad z''\ln z+\frac{z'^2}{2z}+\frac{d}{dx}L(z')=\frac{\sigma}{2},\quad \sigma=\frac{v_k^2}{v_\infty^2}-1$$

(σ — число кавитации).

Уравнению (2.1) можно придать вариационную формулировку, если воспользоваться вариационным принципом Рябушинского: на свободной границе функционал $V\sigma-M$ достигает экстремального значения (V и M — объем и присоединенная масса обтекаемого тела) [8].

Присоединенная масса вычисляется по известной формуле

$$M=-\int(\Phi-x)\,n_x dS,\quad n_x dS=4\pi z'dx,$$

где интеграл берется по поверхности осесимметричного тела $y=\chi f(x)$; n_x — проекция внешней нормали поверхности на ось x; dS — элемент поверхности между двумя сечениями в точках x и $x+dx$. Подставляя в интеграл выражение (1.5) для Φ, имеем

$$M=-4\pi\int_{-1}^{1}(z'\ln z+L(z'))\,z'dx.$$

Объем осесимметричного тела

$$V=4\pi\int_{-1}^{1}z\,dx.$$

Отсюда в соответствии с принципом Рябушинского функционал

$$(2.2)\qquad U=(V\sigma-M)/4\pi=\int_{-1}^{1}(\sigma z+z'^2\ln z+z'L(z'))\,dx$$

принимает экстремальное значение на свободной границе.

Нетрудно показать, что решение уравнения (2.1) — экстремаль функционала U. Уравнение (2.1) позволяет определить форму каверны с относительной погрешностью $\chi^2 \ln^2 \chi$. Однако вычислить силу, действующую на кавитатор, исходя из (2.1), непосредственно интегрируя давление по поверхности кавитатора, невозможно, так как в окрестности сингулярной точки $x = -1$ разложение (2.1) теряет смысл, а давление в этой точке имеет неинтегрируемую особенность.

Эту трудность можно преодолеть следующим образом. Оказывается, сила сопротивления выражается через экстремальное значение функционала (2.2) U_0:

$$F = 3\pi\rho v_\infty^2 l_x^2 U_0 (1 + O(l/l_x)), \tag{2.3}$$

где $2l_x$ — длина каверны; l — характерный размер кавитатора. Для конуса и диска эта формула точная и получена Гарабедяном [4, 5], в [8] показано, что погрешность ее для кавитаторов произвольной формы при $\sigma \to 0$ стремится к нулю обратно пропорционально длине каверны. Относительная погрешность формулы (2.3) l/l_x по порядку малости не превосходит относительную погрешность уравнения (2.1) $\chi^2 \ln^2 \chi$. Таким образом, в дополнение к существующим теориям [1—3] (2.3) позволяет определить также и силу, действующую на кавитатор произвольной формы, с погрешностью, диктуемой асимптотическим приближением (2.1).

3. Определение свободной границы методом сращивания асимпотических разложений. Следуя [3], можно ввести два параметра тонкости — отдельно для кавитатора χ_1 и каверны χ (для диска $\chi_1 = \infty$). Рассмотрим обтекание нетонкого кавитатора $\chi/\chi_1 \to 0$ по схеме Рябушинского. Размеры участка с большим параметром тонкости становятся в пределе бесконечно малыми, что позволяет также и в этом случае считать каверну тонким телом.

Внешнее разложение. При решении уравнения (2.1) удобно ввести малый параметр ε и неизвестную функцию ζ, связанные с числом кавитации σ и функцией z по формулам

$$\sigma = \varepsilon \ln(1/\varepsilon), \quad z = \varepsilon\zeta. \tag{3.1}$$

Тогда (2.1) запишем в виде

$$\zeta'' + \frac{1}{2} = \varepsilon_1 \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\zeta \ln \frac{\zeta}{1 - x^2} - \zeta + I(\zeta) \right) - \frac{\zeta'^2}{2\zeta} \right]. \tag{3.2}$$

Без потери точности рассматриваемого приближения на концах примем условия

$$\zeta(1) = \zeta(-1) = 0. \tag{3.3}$$

Действительно, в ε-окрестностях концевых точек 1 и —1 величина ζ, как будет видно из решения, является малой порядка ε (физически это означает, что квадрат ширины кавитатора, по крайней мере, в ε раз меньше квадрата миделя каверны). Поэтому более точные условия $\zeta(1) \sim \varepsilon$ можно заменить на (3.3) с погрешностью при определении ζ порядка ε, а погрешность для z порядка ε^2, что лежит за пределами точности рассматриваемого приближения.

Решение уравнения (3.2) можно искать в виде разложения по степеням

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon_1\zeta_1 + \varepsilon_1^2\zeta_1^2 + \ldots \tag{3.4}$$

Все члены разложения (3.4) асимптотически точные, так как погрешность порядка ε трансцендентально малая по отношению к параметру ε_1 (убывает быстрее любой степени ε_1^n при $\varepsilon_1 \to 0$).

Подставляя (3.4) в (3.2), для ζ_0 и ζ_1 получим

$$\zeta_0'' + 1/2 = 0,$$

$$\zeta_1'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(\zeta_0 \ln \frac{\zeta_0}{1 - x^2} - \zeta_0 + I(\zeta_0) \right) - \frac{\zeta_0'^2}{2\zeta_0}.$$

Решение, удовлетворяющее условиям (3.3), имеет вид

$$\zeta_0 = \frac{1}{4}(1-x^2); \tag{3.5}$$

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right)(1-x^2) - \frac{1}{4}(1+x)\ln(1+x) - \\ - \frac{1}{4}(1-x)\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln 2. \tag{3.6}$$

Уравнение нулевого приближения для ζ_0 и его решение (3.5) приведены в [2], второе приближение (3.6) найдено в [3].

Перейдем к определению силы, действующей на кавитатор, а также степени удлинения каверны. Подставляя (3.4)—(3.6) в (2.2), получим разложение по степеням ε_1 экстремального значения функционала U_0:

$$U_0 = \varepsilon^2 \ln\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{6} + \frac{1-\ln 2}{3}\varepsilon_1 + \ldots\right). \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (2.3), найдем

$$F = \pi\rho v_\infty^2 l_x^2 \varepsilon^2 \ln\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} + (1-\ln 2)\varepsilon_1 + \ldots\right). \tag{3.8}$$

Наконец, решение (3.4)—(3.6) позволяет определить отношение полуширины каверны l_y к полудлине l_x:

$$\chi^2 = l_y^2/l_x^2 = 4z(0) = \varepsilon(1 + \varepsilon_1 + \ldots). \tag{3.9}$$

Весьма важно то, что разложения (3.8), (3.9) универсальные, не зависящие от геометрических свойств кавитатора. Форма кавитатора вносит в эти разложения трансцендентально малые по отношению к ε_1 поправки.

Внутреннее разложение. В малой окрестности точки $x = -1$ удобно ввести внутренние переменные X и Z:

$$1 + x = \mu X, \quad z = \mu^2 Z. \tag{3.10}$$

В этих переменных каверна преобразуется подобно самой себе с длиной $2l_x = 2/\mu$. Малый параметр $\mu(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Конкретная зависимость $\mu(\varepsilon)$ определяется из условия сращивания.

В переменных (3.10) уравнение (2.1) приведем к виду

$$Z''\ln Z + \frac{Z'^2}{2Z} = -\frac{d^2}{dX^2}\int_0^{2l_x} Z'_Y \ln|Y-X|\,\mathrm{sgn}(Y-X)\,dY + \frac{1}{2}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Умножая обе части этого равенства на Z' и переходя к пределу $\varepsilon\to 0$, получим

$$\frac{d}{dX}(Z'^2\ln Z) = -2Z'\lim_{l_x\to\infty}\frac{d^2}{dX^2}\int_0^{l_x} Z'_Y\ln|Y-X|\,\mathrm{sgn}(Y-X)\,dY. \tag{3.11}$$

Можно показать, что интеграл уравнения (3.11) при $X \to \infty$ имеет асимптотическое представление

$$Z'^2\ln Z = 1 - \frac{9}{16(\ln X)^2} + \ldots, \tag{3.12}$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости при $X \to \infty$.

Отсюда нетрудно найти главную асимптотику для $Z(X)$ при $X \to \infty$:

$$Z' = (\ln X)^{-1/2} + \ldots, \quad Z = X(\ln X)^{-1/2}. \tag{3.13}$$

Сращивание внешнего и внутреннего разложений. Для сращивания разложений (3.4) и (3.13) в промежуточном пределе $\varepsilon \to 0$ вводятся промежуточная переменная ξ и малый параметр $\eta(\varepsilon)$ следующим образом [1]:

$$1+x=\eta\xi,\ X=\eta\xi/\mu,\ \eta\to 0,\ \eta/\varepsilon\to\infty.$$

При фиксированном ξ главные по малому параметру η члены внешнего разложения (3.4)—(3.6) имеют вид

$$z=\varepsilon\zeta_0+\varepsilon\varepsilon_1\xi_1+\ldots=\frac{1}{2}\varepsilon\eta\xi-\frac{\varepsilon}{4\ln(1/\varepsilon)}\eta\xi\ln\eta\xi,$$

а главные члены внутреннего разложения (3.13)

$$z=\eta\xi\mu\left(\ln\xi\eta+\ln\frac{1}{\mu}\right)^{-1/2}=\mu\left(\ln\frac{1}{\mu}\right)^{-1/2}\eta\xi-\frac{1}{2}\mu\left(\ln\frac{1}{\mu}\right)^{-3/2}\eta\xi\ln\eta\xi.$$

Из условия сращивания внешнего и внутреннего разложений должно выполняться равенство коэффициентов при членах $\eta\xi$ и $\eta\xi\ln\eta\xi$. Таким образом, асимптотические разложения сращиваются, если

$$\varepsilon=2\mu(\ln(1/\mu))^{-1/2}+\ldots \tag{3.14}$$

Асимптотический закон расширения струи. Нетрудно видеть, что уравнение (3.11) допускает однопараметрическую группу инвариантных преобразований $x=cX$, $z=c^2Z$. Отсюда и из формул (3.12) и (3.13) получим однопараметрическую серию геометрически подобных асимптотик свободной поверхности при

$$Z'^2\ln(Z/c^2)=c^2-(9/16)c^2(\ln(x/c))^{-2}+\ldots; \tag{3.15}$$

$$z=y^2/4=cx(\ln(x/c))^{-1/2}+\ldots \tag{3.16}$$

Длина каверны $1/\mu$ увеличится в c раз: $l_x=c/\mu$, отсюда при помощи формул (3.8) и (3.14) можно определить предельное выражение для силы F при $\mu\to 0$:

$$F=\pi\rho v_\infty^2c^2\mu^{-2}\frac{1}{2}\varepsilon^2\ln(1/\varepsilon)\to 2\pi\rho v_\infty^2c^2. \tag{3.17}$$

Полученный из теории тонкого тела асимптотический закон (3.15) помимо главной асимптотики Гуревича — Левинсона (3.17) [5, 8] позволяет определять следующие члены.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коул Дж. Д.** Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
2. **Нестерук И. Г.** О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
3. **Логвинович Г. В., Серебряков В. В.** О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн.— В кн.: Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 32.
4. **Garabedian P. R.** Calculation of axially symmetric cavities and jets.— Pacific J. Math., 1956, v. 6, N 4.
5. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости.— М.: Наука, 1979.
6. **Эшли X., Лендал М.** Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов.— М.: Машиностроение, 1969.
7. **Биркгоф Г., Сарантонелло Э.** Струи, следы и каверны.— М.: Мир, 1964.
8. **Петров А. Г.** Прямой вариационный метод расчета плоских и осесимметричных кавитационных течений.— ДАН СССР, 1981, т. 257, № 6.

Поступила 17/VI 1985 г.

УДК 532.539

УЕДИНЕННЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Гаврилов

(Новосибирск)

Теоретический анализ плоских уединенных волн на границе раздела двух жидкостей разной плотности чаще всего основан на уравнении Кортевега—де Вриза [1—3], при выводе которого кроме стандартного допущения теории длинных волн о ма-