УДК 51: 101.8
DOI:
10.15372/PS20170203

В.М. Резников

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ЮМА НА РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ

Статья исследует влияние Юма на применение и развитие теории вероятностей в контексте решения проблемы индукции. Показано прямое влияние Юма на Прайса, который был издателем трудов Байеса, а также косвенное влияние на Байеса и Лапласа. Описаны факторы, которые способствовали восприятию математиками юмовской критики теории вероятностей и решению проблемы индукции для случая равновероятных событий. Влияние Юма на теорию вероятностей рассмотрено в качестве модели, определяющей роль и место философских идей в научном исследовании.

Ключевые слова: наука, применение математики, теория вероятностей, проблема индукции, философская критика, Юм, Байес, Лаплас, Прайс

V.M. Reznikov

ON HUME'S INFLUENCE ON THE DEVELOPMENT AND APPLICATION OF MATHEMATICS

The paper studies Hume's influence on the application and development of the probability theory in the context of the induction problem. It shows Hume's direct influence on Price who published Bayes's texts, as well as his indirect influence on Bayes and Laplace. The author describes the factors which contributed to the understanding of Hume's criticism of the probability theory by mathematicians and to the solution of the induction problem for equally probable events. Hume's influence on the probability theory is considered as a model which determines the role and place of philosophical ideas in scientific research.

Keywords: science; application of mathematics; probability theory; induction problem; philosophical criticism; Hume; Bayes; Laplace; Price

Давид Юм не только был известным философом в области эпистемологии, философии религии, этики и т.д. Он также успешно занимался психологией. Так, основания его концептуального аппарата – идеи и впечатления представляют интерес для психологии. Отмечается, что эпистемология Юма интересна для современной когнитивной психологии [5]. Кроме того, известны исследования Юма в области истории, он является автором многотомной истории Англии. Причем его труды по истории получили признание задолго до того, как он был признан оригинальным философом. Влияние концепций Юма на современные философские и научные дисциплины вполне можно учесть и проследить. Его идеи получили развитие в дальнейших конструктивных критических построениях или оказывали на них стимулирующее влияние. Так, вопреки убеждению Юма о непознаваемости причинных отношений, в психологии развития на ряде экспериментов было показано, что даже младенцы отличали причинное влияние от случайного взаимодействия объектов [6]. Другая идея Юма – о том, что для целого нет впечатления, была поставлена под сомнение в физиологии. Физиологи обосновали, что люди имеют цельное впечатление о местонахождении в пространстве. Влияние новаций Юма в тех областях, которыми он занимался профессионально, вполне определимо. Однако остается вопрос, можно ли учесть влияние Юма на такие области знания, которыми он занимался, но в которых его профессиональные достижения не столь существенны, однако им был проведен философский критический анализ этих областей знания. Мы имеем в виду математику, особенно теорию вероятностей.

Наша статья посвящена вопросу о влиянии Юма на развитие и применение теории вероятностей. Исследование этого вопроса имеет значение в контексте философии Юма, истории математики и методологии науки. Почему исследования Юма, относящиеся к теории вероятностей, имеют отношение к методологии науки? Потому что эти исследования, относящиеся к теории вероятностей, являются моделью для анализа проблемы места философского сообщества в научном познании. Если философ одновременно выступает и представителем науки, как, например, Рассел, Карнап, Суппес и др., то значимость его исследований для науки не вызывает сомнений. Однако большинство философов, в том числе и Юм, не являются профессиональными учеными. Возникает вопрос о значимости их исследований для науки. Мы полагаем, что участие в научном исследовании профессиональных философов, которые разбираются в соответствующей дисциплине, но не занимаются наукой профессионально, имеет значение. Дело в том, что философы являются настоящими критиками. Во-первых, они становятся критиками в процессе изучения философии, так как практически все философские концепции получаются не на основе развития предшествующих теорий, а создаются путем критики и конструирования собственных теорий. Во-вторых, практически во всех областях знания, за исключением сугубо теоретических, ценятся положительные результаты. Отметим, что получение отрицательных результатов в философском исследовании не является свидетельством того, что последнее оказалось безуспешным. Поэтому философы оказываются, как правило, наилучшими критиками.

Почему Юм обратился к теории вероятностей? Прежде всего, это связано с популярностью книги Батлера [3]. В ней утверждается, что вероятность – это наилучшее руководство жизни. По Батлеру, высокая степень уверенности в результатах воспроизводимых экспериментов возникает в том случае, когда множество реализованных экспериментов привели к одинаковым или близким результатам. Если независимые исследователи получили схожие результаты, тогда степень уверенности в правильности этих результатов является несомненной. Коль скоро человечество в течение многих столетий после ночи наблюдает появление утра, то, по Батлеру, это несомненный факт. Далее, вероятностные рассуждения в определенной степени подходят для юмовского анализа проблемы индукции, так как они, с одной стороны, относятся к реальности, т.е. опираются на данные, а с другой – описывают гипотетическое суждение. Однако в целом Юм не считает, что теория вероятностей подходит для решения проблемы индукции. Приведем некоторые его аргументы против адекватности теории вероятностей. Во-первых, для отношений нет впечатлений, поэтому они непознаваемы. Во-вторых, объект познаваем, если возникает яркое впечатление, связанное с объектом познания. Однако при вероятностных экспериментах впечатление распределяется среди множества возможных исходов, поэтому оно не может быть ярким. В-третьих, самая высокая вероятность события не гарантирует, что событие произойдет. В-четвертых, многократное повторение даже в течение 5 тыс. лет события, состоящего в том, что после ночи наступает утро, не гарантирует, что оно наступит в следующий раз. С другой стороны, говорить лишь о вероятности того, что после ночи наступит утро, представляется слишком осторожной оценкой. Юм писал: «Нам показался бы смешным всякий, кто сказал бы, будто только вероятно, что солнце завтра взойдет» [2, с. 202]. Критика теории вероятностей, и в особенности скептическая оценка познаваемости отношения возникновения утра после ночи, оказала влияние как на математиков – современников Юма, так и на исследователей, представляющих последующее поколение. Уделим внимание влиянию Юма на Байеса, Прайса и Лапласа.

Теорема Байеса популярна как в математике, так и в ее приложениях в различных науках, в том числе в прикладной статистике, экспертных системах, и даже в философии науки. Например, на основе этой теоремы предлагается нехолистский анализ знаменитого тезиса Дюгема – Куайна. Несмотря на популярность теоремы Байеса, о самом Томасе Байесе достоверно известно немного. Точную дату его рождения мы не знаем, предполагается, что он родился в 1701 г., а умер в 1761 г. Известно, что Байес получил домашнее образование, по некоторым данным, математике он обучался у известного математика А. де Муавра. Байес стал математиком и получил признание, о чем свидетельствует избрание его в Лондонское королевское общество в возрасте до сорока лет, хотя до своей кончины он опубликовал только одну работу. Это трактат, посвященный вычислительным аспектам метода флюксий, открытого Ньютоном.

После смерти Байеса его архив был передан душеприказчику Ричарду Прайсу. Прайс был специалистом в математической статистике. К результатам в этой области относится создание таблиц продолжительности жизни в г. Нортгемптоне графства Нортгемптоншир [12]. В 1765 г. за издание работ Байеса Прайс стал членом Королевского общества.

Название «теорема Байеса» соответствует гипотезе историка С. Стиглера, согласно которой практически во всех названиях научных результатов не содержится имен первооткрывателей. Так, всем известная теорема Байеса была доказана Лапласом. Напомним некоторые используемые в теореме понятия. Гипотезами называются события, удовлетворяющие двум условиям: во-первых, сумма вероятностей всех гипотез равна единице. Во-вторых, попарное пересечение любых двух событий равняется пустому множеству.

Теорема Байеса. Пусть H_i – гипотезы. Заданы вероятности гипотез: $P(H_i)$, $I = 1, n$. Кроме того, некоторое событие A связано с гипотезами и известны условные вероятности $P(A/Hi)$, $I = 1, n$ возникновения этого события при условии реализации гипотетических событий. Тогда условные вероятности гипотез при реализации события A равны

$$P(H_i/A) = P(A/H_i) \times P(H_i) / \sum P(A/H_i) \times P(H_i).$$

Теорема имеет значение для приложений, так как позволяет по условным вероятностям $P(A/H_i)$ некоторого события A, где в качестве условий используются гипотезы H_i, определять обратные вероятности

$P(H_i/A)$, т.е. уточнять теоретические гипотезы в результате наблюдений за событием A.

Несмотря на то что известная теорема Байеса была доказана Лапласом, название «теорема Байеса» нельзя считать полностью неадекватным. Как справедливо заметил О.Б. Шейнин, термин «теорема Байеса» является исторически неопределенным [1]. Дело в том, что Байес первым доказал другую теорему, в которой на основе наблюдений определяются теоретические вероятности. Подлинная теорема Байеса мало известна. Она доказана не для вероятностей дискретных событий, а для плотностей вероятностей. По сути, это первая реверсная теорема, в ней оцениваются теоретические плотности вероятностей на основе эмпирических наблюдений. До теоремы Байеса все теоремы о связи теоретических вероятностей и частотных характеристик были прямыми теоремами. Например, теоремы Бернулли и Муавра были прямыми.

Теорема Бернулли. Проводится n независимых испытаний события A, и m экспериментов оказались успешными. Известно, что теоретическая вероятность появления события A в каждом эксперименте равняется $p(A)$, m/n – частота события A, ε – точность вычислений. Тогда при бесконечном числе экспериментов выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p(A)| < \varepsilon) = 1\,.$$

Отметим, что Бернулли полагал, что его теорема может быть модифицирована для получения теоретических вероятностей в том случае, когда они не являются известными. Однако напрямую она не адекватна ни для определения вероятности $P(A)$, если последняя неизвестна, ни для верификации этой вероятности, если она задана априори.

Теперь приведем теорему, доказанную Байесом.

Теорема Байеса (*подлинная*). Пусть в n испытаниях p раз произошло событие A и q раз оно не произошло. Тогда вероятность P того, что оценка r неизвестной вероятности успеха в единичном испытании принадлежит к интервалу (b, c) с заданными граничными точками b, c, равняется отношению следующих интегралов [1].

$$P(b \le r \le c) = \int_b^c u^p (1-u)^q\, du \div \int_0^1 u^p (1-u)^q\, du$$

Подынтегральное выражение определяет вероятность того, что осуществится p попаданий случайной величины в выделенный интеграл и q раз случайная величина не попадет в выделенный интервал. Здесь u – это вероятность того, что случайная величина один раз окажется в этом интервале. Так как математики того времени еще не умели брать аналитически интегралы, стоящие в числителе заключительного выражения теоремы, этот интеграл был вычислен на основе геометрических построений. Для того чтобы найти численное значение интеграла, Байес принял, что все исходы эксперимента одинаково вероятны. Байес первым пришел к идее равновероятных положений на основе геометрической симметрии и первым дал обобщение этого принципа для ситуаций, в которых у исследователя нет предпочтений, т.е. он первым пришел к принципу безразличия. Возможно ли использовать принцип безразличия за пределами естественной симметрии? Байес полагал, что если вероятности исходов неизвестны и отсутствуют предпочтения относительно вероятностей исходов, то события можно считать равновероятными.

Имело ли место влияние Юма на работу Байеса? Трудно говорить о прямом влиянии, Байес не торопился публиковать свой результат, так как он не был до конца уверен в универсальности открытого им принципа и, кроме того, он пытался получить предельный вариант своей теоремы. Предельный вариант теоремы, как отмечает О.Б. Шейнин, был получен Генрихом Тимердингом. Приведем предельный результат Тимердинга [1].

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{|p_0 - a|}{\sqrt{p_q / n^{3/2}}}\right\} < z = \frac{1}{2\pi}\int_0^z e^{-w^2}\,dw$$

Здесь p_0 – статистическая оценка неизвестной вероятности реализации события в единичном эксперименте,

$a = p_o/n = Ep_o$, $\sqrt{\dfrac{pq}{n^{3/2}}} = Dp_o$; E – обозначение математического ожидания; D – символ дисперсии.

Трудно говорить о степени влияния Юма на Байеса. В работах Байеса нет ссылок на Юма. При издании трудов Байеса не сохранилось его введение, Прайс написал собственное введение к ним. Байес понимал, что доказанная им теорема является обратной (реверсной) по отношению к теореме Муавра, поэтому теорема Байеса в большей мере адекватна для анализа индукции.

В отличие от влияния на Байеса, влияние Юма на Прайса было непосредственным. Прайс читал эпистемологические работы Юма, полагал, что скептические аргументы Юма являются серьезными, однако сам Прайс не был скептиком. По Прайсу, психологическая уверенность в том, что многократно повторяющаяся природная закономерность будет воспроизводиться в дальнейшем, находится в гармонии с ходом природных процессов. Он полагал, что формальный аппарат является эффективным способом получения антискептических решений поставленных Юмом вопросов. Прайс сразу понял, что теорема Байеса обеспечивает решение проблемы Юма в частном случае, когда вероятности всех возможных событий в контексте решаемой проблемы можно считать одинаковыми [10].

Следующий шаг в направлении решения проблемы индукции был сделан Пьером Симоном Лапласом. Лаплас не ссылается в своих работах на Байеса. Он получил доказательство теоремы, для дискретных вероятностей, которая под названием «теорема Байеса» стала общеизвестной. Кроме того, он осуществил аналитическое решение теоремы, которая была доказана Байесом. Лаплас применил доказанную им теорему для дискретных вероятностей к анализу предложенного Юмом примера. Он писал: «Возьмем наиболее древнюю эпоху истории – 5000 лет назад, или 1826213 дней, и солнце восходило постоянно в этот период, вращаясь постоянно 24 часа, тогда можно сделать ставку 1826214 к 1, что оно взойдет снова завтра» (Цит. по: [11, p. 74]).

Фактически пример Юма о последовательности событий, когда ночь сменяется утром, был формализован следующим образом. Пусть проведено n наблюдений над событием A, в m экспериментах произошло это событие. Какова вероятность того, что оно произойдет в n+1 испытании? В результате Лаплас получил свою знаменитую формулу: вероятность успеха в следующем опыте равна $m+1/n+2$. В случае примера Юма, поскольку всегда после ночи всегда наступает утро, формула модифицируется и вероятность следующего наступления утра равна $n+1/n+2$. Так как $n = 5000$ лет, то искомая вероятность равна величине, пренебрежимо мало отличающейся от единицы.

Имело ли место влияние Юма на Лапласа? Лаплас не ссылается на Юма, однако рассматривает его пример и предлагает первое аналитическое решение проблемы индукции, при этом, аналогично решению Байеса, решение Лапласа использует принцип индифферентности, поэтому оно адекватно для симметричных положений дел.

Правило последовательности Лапласа было получено на основе эпистемологического постулата о том, что все возможные события при условии отсутствия предпочтений о шансах их появления признаются одинаково вероятными. Другими словами, при n испытаниях число k успехов ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) является одинаково вероятным. Этот принцип, получивший впоследствии название принципа индифферентности, приводит к некоторым противоречиям, которые были исследованы в ряде работ (см., например: [7]). Однако вопрос об адекватности этого принципа проблемам индукции остается открытым.

Впервые вопрос об основательности принципа симметрии, лежащего в основе подхода Лапласа, был поднят Джорджем Булем, создателем булевой алгебры. Буль полагал, что интуитивность предположения Лапласа будет по крайней мере косвенно подтверждена, если окажется обоснованным предположение об одинаковой вероятности всех исходов. Пусть $n = 3$, тогда все возможные исходы – это все последовательности нулей и единиц от 000 до 111 включительно. Буль не занимался поставленной им проблемой, она была исследована в работах В. Джонсона и Р. Карнапа [4]. Карнап показал, что в постановке Буля все возможные результаты оказываются независимыми. Например, условная вероятность $P(00/10) = P(00)$. Другими словами, обучение с использованием симметрии этого типа оказывается невозможным, что недопустимо для проблемы индукции.

В постулатах симметрии, предназначенных для анализа проблемы индукции, имеется очевидная тенденция, заключающаяся в попытках уменьшить зависимость от степени используемой симметрии. Так, в работах Байеса и Лапласа симметрия касалась числа успехов, а именно: для каждого числа успехов имеется одна и та же вероятность реализации. В предложении Буля симметричными оказывались упорядоченные группы результатов с одним и тем же числом испытаний. Английский логик Вильям Эрнст Джонсон, с одной стороны, обобщил результаты Байеса и Лапласа. В их исследованиях результаты испытаний были двух типов, скажем при бросании монеты это орел и решка. Джонсон же рассматривал результаты t типов. С другой стороны, в его исследованиях симметрия касалась не всех результатов испытаний, а только успешных испытаний выделенного типа и общего числа испытаний. Симметрия в подходе Джонсона учитывается на основе предложенного им постулата достаточности.

Постулат Джонсона заключается в определении вероятности последующего результата типа j только на основе числа успешных результатов X_j именно этого типа j и общего числа испытаний n, но не зависит от числа успехов других типов.

Для пояснения новаций Джонсона дадим необходимые определения и покажем полученные на основе этих новаций результаты. Постулат достаточности Джонсона:

$$P[X_{n+1} = j / X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n] = f(n_j, n).$$

На основе постулата достаточности Джонсон доказал следующую теорему [12].

Теорема. Если вероятности удовлетворяют постулату достаточности, то или результаты независимы, или существует такая постоянная k, что

$$P[X_{n+1} = j / X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n] = \{j + k\} / \{n + tk\}.$$

Результат теоремы Джонсона получил критику преимущественно в работах философов, признающих, прежде всего логическую вероятность. В рамках логической концепции необходимо, чтобы вероятности описывались единственной мерой. В подходе Джонсона постоянная величина k не определяется однозначно. Позднее Карнап, в большой степени повторивший результаты Джонсона, показал, что существует континуум возможных вероятностных мер для изучаемой ситуации. Другая критика постулата Джонсона связана с тем, что его применение требует большого объема предварительной информации.

Мы показали влияние Юма на применение и развитие теории вероятностей в контексте решения проблемы индукции. Влияние связано с тем, что критика теории была осуществлена с помощью понятных и обсуждаемых учеными примеров. По мнению современников Юма, последовательность событий – наступление ночи и последующее наступление утра, наблюдаемые в течение 5 тыс. лет, являлась примером наиболее мощного массива несомненно достоверных данных. Как философ-скептик Юм не считает, что в следующий раз ночь обязательно сменится утром. Однако как здравомыслящий исследователь он не удовлетворен тем, что можно говорить лишь о вероятности наступления очередного утра после ночи. Восприятию критики и принятию вызова способствовало то, что Байесом и Лапласом были доказаны теоремы реверсного характера, определяющие условную вероятность гипотетического события, где в качестве условия берутся результаты наблюдений.

Если влияние Юма на Лапласа можно считать обоснованным, тогда можно говорить не только о его влиянии на Джонсона, Карнапа и современных исследователей проблемы индукции, но и о некотором влиянии на современную теорию информации. Важной проблемой теории информации является сжатие данных. Специалисты в теории информации отмечают, что эффективное сжатие данных основано на обнаружении в них всевозможных закономерностей. Проблема предсказания присутствия обнаруженных закономерностей в новых данных актуальна. В ряде недавних публикаций отмечается, что наилучшие современные способы предсказания вероятностей на основе частотных закономерностей являются развитием подхода, предложенного Лапласом. В этих публикациях приводится пример Юма, приписываемый Лапласу, и обсуждается подход Лапласа к его решению [11]. С позиций современной теории информации решение Лапласа в достаточной степени эффективно. Оно было усовершенствовано в трудах Р. Кричевского [8]. В простейшем случае, когда исследуется закономерность из двух событий, формула Лапласа принимает следующий вид:

$$(m+0{,}5)/n+1.$$

Итак, на примере Юма показано, что участие философов в научных исследованиях имеет прагматическую значимость. Это связано с тем, что, во-первых, философы являются профессиональными критиками, а во-вторых, часто для философов серьезная критика считается достижением, тогда как практически во всех областях знания ценятся исключительно положительные результаты.

Литература

1. *Шейнин О.Б.* К истории теоремы Байеса. – URL: http://www.sheynin.de/download/bayes.pdf – (дата обращения: 09.01.2016).

2. *Юм Д.* Трактат о человеческой природе. Книга первая: О познании. – М.: Канон, 1995.

3. *Butler J.* The Analogy of Religion, Natural and Revealed, to the Constitution and Course of Nature. – London, 1736.

4. *Carnap R.* Logical Foundations of Probability. – Chicago: The University of Chicago Press, 1950.

5. *Fodor J.* Hume Variations. – Oxford: Oxford University Press, 2003.

6. *Gurol I.* Three Dogmas of Humean Causation. – URL: http://fitelson.org/269/Irzik_TDOHC.pdf – (дата обращения: 20.12.2016).

7. *Jaynes E.* The well posed problems // Foundations of Physics. – 1973. – Vol.3. – P. 477–493.

8. *Krichevsky R.* Universal Compression and Retrival. – Kluver Academic Publishers, 1993.

9. *McGrayne S.* The Theory That Would Not Die. – Yale: Yale University Press, 2011.

10. *Ryabko B.* Applications of Kolmogorov complexity and universal codes to nonparametric estimation of characteristics of time series // Fundamenta Informaticae. – 2008. – Vol. 83. – P. 1–20.

11. *Zabell S.* Symmetry and Its Discontents. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.

References

1. *Sheinin, O.B.* K istorii teoremy Bayesa [On the history of Bayes' theorem]. Available at: http://www.sheynin.de/download/bayes.pdf (date of access: 09.01.2016).

2. *Hume, D.* (1995). Traktat o chelovecheskoy prirode. Kniga pervaya: O poznanii [A Treatise on the Human Nature. Book One: On Cognition]. Moscow, Kanon Publ. (In Russ.).

3. *Butler, J.* (1736). The Analogy of Religion, Natural and Revealed, to the Constitution and Course of Nature. London.

4. *Carnap, R.* (1950). Logical Foundations of Probability. Chicago, The University of Chicago Press.

5. *Fodor, J.* (2003). Hume Variations. Oxford, Oxford University Press.

6. *Gurol, I.* Three dogmas of humean causation. Available at: http://fitelson.org/269/Irzik_TDOHC.pdf (date of access: 20.12.2016).

7. *Jaynes, E.* (1973). The well posed problems. Foundations of Physics, 3, 477–493.

8. *Krichevsky, R.* (1993). Universal Compression and Retrival. Kluver Academic Publ.

9. *McGrayne, S.* (2011). The Theory That Would Not Die. Yale, Yale University Press.

10. *Ryabko, B.* (2008). Applications of Kolmogorov complexity and universal codes to nonparametric estimation of characteristics of time series. Fundamenta Informaticae, 83, 1–20.

11. *Zabell, S.* (2005). Symmetry and Its Discontents. Cambridge, Cambridge University Press.

Информация об авторе

Резников Владимир Моисеевич – кандидат философских наук, доцент, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН (630090, г. Новосибирск, ул. Николаева, 8); доцент кафедры логики и методологии науки Новосибирского исследовательского государственного университета (630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, e-mail: mathphil1976@gmail.com)

Information about the author

Reznikov, Vladimir Moiseevich – Candidate of Sciences (Philosophy), Associate Professor, Senior Researcher at the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia); Associate Professor at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: mathphil1976@gmail.com).

Дата поступления 17.05.2017