УДК 517.956+517.957+517.956.4

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЕСТАНДАРТНЫМ УСЛОВИЕМ РОСТА

С. Н. Антонцев, С. Е. Айтжанов*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
* Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, 050038 Алма-Ата, Казахстан
E-mails: antontsevsn@mail.ru, Aitzhanov.Serik81@gmail.com

Исследуется обратная задача определения правой части уравнения параболического типа с нестандартным условием роста и интегральным условием переопределения. Методом Галеркина доказаны существование локального и глобального по времени решений обратной задачи и их единственность. Получены достаточные условия разрушения (взрыва) локального решения за конечное время в ограниченной области с однородным условием Дирихле на ее границе. При доказательстве разрушения решения использован метод Каплана. Исследовано асимптотическое поведение решений обратной задачи при больших значениях времени. Получены достаточные условия исчезновения (обращения в тождественный нуль) решения за конечное время. Рассмотрены предельные условия, обеспечивающие соответствующее поведение решений.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное условие переопределения, параболические уравнения с нестандартным условием роста, разрешимость, разрушение решения, асимптотическое поведение решения.

DOI: 10.15372/PMTF20190208

Введение. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является интенсивно развивающейся областью математической физики, что обусловлено необходимостью разработки математических методов решения широкого класса важных прикладных задач. При исследовании проблем сейсмологии, геофизики, биологии, медицины, экологии, компьютерной томографии, диагностики плазмы, квантовой теории рассеяния, подводной акустики, квазиоптики, дифракции, управляемого термоядерного синтеза и др. возникает необходимость решения обратных задач. При решении задач, которые принято называть прямыми, для заданного дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений по дополнительным условиям находится решение этого уравнения или системы, удовлетворяющее заданным условиям. При исследовании обратных задач помимо решения требуется найти коэффициенты, правые части дифференциальных уравнений или системы дифференциальных уравнений, границы и области, граничные или начальные условия по дополнительной информации о решениях уравнений. Например, при исследовании процесса распространения тепла в физическом теле в случае прямой задачи нужно знать температуру на границе объекта, ее начальное распределение и распределение в каждый момент времени “источников” и “стоков” тепла. В случае обратной задачи какой-либо из этих па-

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (грант № 14.W03.31.0002) и Министерства образования Республики Казахстан (грант № AP05132041).

раметров может быть неизвестен. Для корректной постановки подобных задач требуется некоторая дополнительная информация о моделируемом процессе, например распределение температуры в теле или некоторые интегральные характеристики процесса распространения тепла.

Разработаны и успешно применяются различные методы решения обратных задач для дифференциальных уравнений. В большинстве работ используются функциональные методы исследования разрешимости краевых и обратных задач, основанные на теоремах разрешимости операторных уравнений, а также методы компактности. В работах [1, 2] обратные задачи исследуются методом полугрупп, при этом предполагается линейность операторов и независимость коэффициентов уравнения от времени. Методы расщепления и метод слабой аппроксимации [3–5] позволяют заменять исходные расщепленные на каждом шаге сложные задачи более простыми, решения которых можно точно записать или более точно оценить, и получать априорные оценки, которые играют важную роль при исследовании разрешимости краевых и обратных задач. В работах [6, 7] изучаются обратные задачи, которые сводятся к нелокальным краевым задачам для нелинейных нагруженных уравнений составного типа. При решении краевых задач для нагруженных уравнений используются методы срезывающих функций и продолжения по параметру.

В работе [8] рассматривается обратная задача для параболического уравнения со степенной нелинейностью, которое имеет вид

$$u_t - \Delta u - |u|^p u + b(x,t,u,\nabla u) = F(t)\omega(x), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0; \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0; \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} u\omega\,dx = 1, \qquad t > 0. \tag{4}$$

В данной работе получены условия на известные начальные данные (коэффициенты), гарантирующие отсутствие глобальных решений обратной задачи, а также устанавливается устойчивость решения в ограниченной области для обратной задачи для дифференциального уравнения, в котором слагаемое со степенной нелинейностью имеет противоположный знак:

$$u_t - \Delta u + |u|^p u = F(t)\omega(x), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

В работе [9] рассмотрена обратная задача для квазилинейного параболического уравнения со степенной нелинейностью

$$u_t - \operatorname{div}\left((k_1 + k_2|\nabla u|^{m-2})\nabla u\right) + h(u,\nabla u) - |u|^{p-2}u = f(t)\omega(x), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

для которого заданы начально-краевые условия (2), (3) и дополнительное интегральное условие (4) ($\varphi(t) = 1$ при $t > 0$). Получены условия разрушения решения этого уравнения за конечное время.

Исследованию проблемы существования и единственности решений вырождающихся параболических уравнений с постоянными показателями нелинейности посвящено большое количество работ (см. монографию [10]). В последнее время интенсивно изучаются параболические и эллиптические уравнения с переменными показателями нелинейностей, называемые уравнениями с нестандартным условием роста (см. [11–15]). Такие уравнения возникают, в частности, при математическом описании движения жидкостей со сложной реологией [16, 17].

Следует отметить, что обратная задача определения правой части с интегральным переопределением в параболическом уравнении с нестандартным условием роста ранее не изучалась. Настоящая работа посвящена получению достаточных, т. е. не обязательно минимальных, условий, обеспечивающих разрешимость обратной задачи.

Методы, предложенные в работах [15, 18], применяются для получения достаточных условий разрушения или исчезновения решения за конечное время и изучения его асимптотического поведения при $t \to \infty$.

1. Постановка задачи. Для цилиндра $Q = \{(x,t)\colon x \in \Omega,\ t > 0\}$ рассмотрим следующую обратную задачу для полулинейного уравнения с переменным показателем нелинейности $\sigma(x,t)$: определить пару функций $(u(x,t), f(t))$, удовлетворяющих уравнениям

$$u_t - \Delta u = b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u + f(t)\omega(x), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0; \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0; \tag{6}$$

$$\int\limits_\Omega u\omega\,dx = \varphi(t), \qquad t > 0. \tag{7}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^1$.

Дифференцируемая функция $\varphi(t) \in \mathbb{C}^1$ удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant N_0 < \varphi(t) < N_1, \qquad 0 \leqslant N_0 < \varphi'(t) < N_2 \tag{8}$$

с некоторыми постоянными N_0, N_1, N_2. Заданные коэффициенты $b(x,t)$, $\omega(x)$, показатель $\sigma(x,t) \in \mathbb{C}(\bar{Q})$ и $u_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ удовлетворяют условиям

$$|b(x,t)| < b^+ < \infty, \qquad \sigma(x,t): \quad Q \mapsto [\sigma^-, \sigma^+] \subset (1,\infty); \tag{9}$$

$$\int\limits_\Omega \omega^2(x)\,dx = 1, \qquad \omega(x) > 0, \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{L}^\infty(\Omega); \tag{10}$$

$$(\|\omega\|_{\infty,\Omega}, \|\nabla\omega\|_{2,\Omega}) \leqslant N_3 < \infty; \tag{11}$$

$$\int\limits_\Omega u_0\omega\,dx = \varphi(0), \qquad u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \tag{12}$$

2. Теорема существования решения. При доказательстве существования решения будем рассматривать следующие случаи:

1) существование глобального решения

$$0 < b^- \leqslant -b(x,t) \leqslant b^+ < \infty, \qquad 1 < \sigma < \infty; \tag{13}$$

2) существование глобального решения

$$0 < b^- \leqslant b(x,t) \leqslant b^+ < \infty, \qquad 1 < \sigma \leqslant 2; \tag{14}$$

3) существование локального решения

$$0 < b^- \leqslant b(x,t) \leqslant b^+ < \infty, \qquad 2 < \sigma^- \leqslant \sigma \leqslant \sigma^+ < 2 + 4/n. \tag{15}$$

Лемма. *Задача* (5)–(7) *эквивалентна следующей задаче для нелинейного параболического уравнения, содержащего нелинейный нелокальный оператор функции u:*

$$u_t - \Delta u = b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u + f(t,u)\omega(x), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0; \tag{16}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0. \tag{17}$$

Здесь

$$f(t,u) = \varphi'(t) - \int\limits_\Omega u\Delta\omega\,dx - \int\limits_\Omega b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx =$$

$$= \varphi'(t) + \int\limits_\Omega \nabla u\nabla\omega\,dx - \int\limits_\Omega b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx. \tag{18}$$

Доказательство. Действительно, из (5) следует

$$\int\limits_{\Omega} u_t\omega\,dx - \int\limits_{\Omega} \Delta u\omega\,dx = \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx + f(t)\int\limits_{\Omega} \omega^2(x)\,dx. \tag{19}$$

Тогда, в случае если выполняются условия (7), (10), имеем

$$f(t,u) = \varphi'(t) - \int\limits_{\Omega} u\Delta\omega\,dx - \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx. \tag{20}$$

Следовательно, соотношение (18) выполняется.

Рассмотрим задачу (16), (17). Если соотношение (18) выполняется, то из него следует равенство (20). Тогда

$$f(t,u) = \varphi'(t) - \int\limits_{\Omega} u\Delta\omega\,dx - \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx =$$

$$= \varphi'(t) - \int\limits_{\Omega} \Delta u\omega\,dx - \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx.$$

В силу (19) получаем

$$f(t,u) = \varphi'(t) - \int\limits_{\Omega} u_t\omega\,dx + \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx +$$

$$+ f(t)\int\limits_{\Omega} \omega^2(x)\,dx - \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u\omega\,dx,$$

или

$$\varphi'(t) - \int\limits_{\Omega} u_t\omega\,dx = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\Big(\varphi(t) - \int\limits_{\Omega} u\omega\,dx\Big) = 0.$$

Введем обозначение $v(t) = \varphi(t) - \int\limits_{\Omega} u\omega\,dx$. Тогда функция $v(t)$ может быть найдена как решение задачи Коши: $v'(t) = 0$, $v(0) = 0$ (условие $v(0) = 0$ следует из условия согласования (12)). Единственным решением задачи является функция $v(t) = 0$, следовательно, $\int\limits_{\Omega} u\omega\,dx = \varphi(t)$.

2.1. *Определение слабого и сильного решений.* Будем использовать функциональные пространства [10, 18]

$$\mathbb{W}(Q_T) = \{u\colon \quad u \in \mathbb{L}^2(Q_T) \cap \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad |\nabla u| \in \mathbb{L}^2(Q_T)\}.$$

Через $\mathbb{W}'(Q_T)$ обозначается сопряженное к $\mathbb{W}(Q_T)$ пространство.

Определение 1. Функция u есть слабое решение задачи (16), (17), если:

1) $u \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^2(\Omega)) \cap \mathbb{W}(Q_T)$, $u_t \in \mathbb{W}'(Q_T)$;

2) для любой тест-функции $\phi \in \mathbb{L}^2(Q_T) \cap \mathbb{W}(Q_T)$, $\phi_t \in \mathbb{W}'(Q_T)$ выполняется условие

$$\int\limits_{Q_T} (u_t\phi + \nabla u \nabla \phi)\, dz = \int\limits_{Q_T} f\omega\phi\, dz;$$

3) для любой функции $\phi(x) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$ выполняется условие

$$\int\limits_{\Omega} (u(x,t) - u_0(x))\phi(x)\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Определение 2. Слабое решение называется сильным, если

$$(u_t, u_{xx}) \in \mathbb{L}^2(Q_T), \qquad |\nabla u| \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (8), (11) *и*

$$u_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Тогда задача (16), (17), *а следовательно, и задача* (5)–(7) *при дополнительном условии* (13) *или* (14) *имеют, по крайней мере, одно слабое решение на интервале* $[0,T]$. *При условии* (15) *слабое решение существует на интервале* $[0, T_{\max}) \subset [0,T)$. *Если дополнительно*

$$u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,2}(\Omega), \qquad \omega \in \mathbb{W}^{2,2}(\Omega),$$

то слабое решение будет также сильным.

Решение задачи (16), (17) строится как предел приближений Галеркина

$$u^{(m)}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(m)}(t)\psi_i(x), \qquad \boldsymbol{c}^{(m)} = (c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \dots, c_m^{(m)}),$$

где коэффициенты $c_i^{(m)}$ определяются из решения задач Коши

$$\frac{dc_i^{(m)}}{dt} = G_i(t, c_1^{(m)}, \dots, c_m^{(m)}), \qquad c_i^{(m)}(0) = (u_0, \psi_i)_\Omega, \quad i = 1, \dots, m; \tag{21}$$

$$G_i(t, c_1^{(m)}, \dots, c_m^{(m)}) := -\lambda_i c_i^{(m)} + \int\limits_{\Omega} b|u^{(m)}|^{\sigma-2}u^{(m)}\psi_i\, dx + f(t, u^{(m)}) \int\limits_{\Omega} \omega(x)\psi_i\, dx.$$

Согласно теореме Коши задача (21) имеет, по крайней мере, одно решение $\boldsymbol{c}^{(m)}$ на некотором интервале времени $t \in (0, T_m)$, $T_m > 0$. Ниже получены априорные оценки для $u^{(m)}$, не зависящие от m и в некоторых случаях справедливые для любого конечного $t \in (0,T)$.

2.2. *Первая априорная энергетическая оценка.* Умножая (21) на $c_i^{(m)}$ и интегрируя по t, получаем первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\|u^{(m)}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}(s)\|_{2,\Omega}^2\, ds = \frac{1}{2}\,\|u^{(m)}(0)\|_{2,\Omega}^2 + I_1 + I_2, \tag{22}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} b|u^{(m)}(x,s)|^\sigma\, dx\, ds, \qquad I_2 = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} f(s, u^{(m)})\omega(x)u^{(m)}(x,s)\, dx\, ds.$$

Сначала рассмотрим случай

$$|b(x,t)| \leqslant b^+ < \infty, \qquad 1 < \sigma(x,t) \leqslant 2.$$

При этом

$$|I_1| \leqslant b^+ \int\limits_0^t \|u^{(m)}(x,s)\|^2_{2,\Omega}\,ds + b^+T|\Omega|. \tag{23}$$

Далее, для

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} \tag{24}$$

используем представление (18) и следующие оценки:

$$|I_{21}| = \Big|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \omega(x)u^{(m)}(x,s)\varphi'(t)\,dx\,ds\Big| \leqslant \varepsilon_1\int\limits_0^t \|u^{(m)}(s)\|^2_{2,\Omega}\,ds + \frac{N_2^2}{4\varepsilon_1}\,\|\omega\|^2_{\infty,\Omega} \quad \forall\varepsilon_1\in(0,1),$$

$$|I_{22}| = \Big|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \omega(x)u^{(m)}(x,s)\,dx\int\limits_\Omega \nabla u^{(m)}(x,s)\nabla\omega(x,s)\,dx\,ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2\int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}(s)\|^2_{2,\Omega}\,ds + \frac{N_3^4}{4\varepsilon_2}\int\limits_0^t \|u^{(m)}(s)\|^2_{2,\Omega}\,ds \quad \forall\varepsilon_2\in(0,1); \tag{25}$$

$$|I_{23}| = \Big|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \omega(x)u^{(m)}(x,s)\,dx\int\limits_\Omega |b|\,|u^{(m)}(\xi,s)|^{\sigma(\xi,s)-1}\omega(\xi)\,d\xi\,ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \Big((b^+N_3^2+\varepsilon_3)\|u^{(m)}\|^2_{2,\Omega} + \frac{b^+N_3^2|\Omega|^2}{4\varepsilon_3}\Big)\,ds. \tag{26}$$

С учетом (22), (24)–(26), выбирая соответствующие параметры ε_1, ε_2 и используя соотношение $\|u^{(m)}(0)\|^2_{2,\Omega} \leqslant \|u(0)\|^2_{2,\Omega}$, получаем неравенство

$$\|u^{(m)}(t)\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}(s)\|^2_{2,\Omega}\,ds \leqslant C_1\int\limits_0^t \|u^{(m)}(s)\|^2_{2,\Omega}\,ds + C_2(\|u(0)\|^2_{2,\Omega}+1),$$

где $C_i = C_i(\|\omega\|^2_{2,\Omega}, \|\nabla\omega\|^2_{2,\Omega}, \|\varphi'\|^2_{2,[0,T]}, b^+, T, |\Omega|)$, $i=1,2$. Применяя лемму Гроноула для функции $\|u^{(m)}(t)\|^2_{2,\Omega}$, имеем неравенство

$$\|u^{(m)}(t)\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}(s)\|^2_{2,\Omega}\,ds \leqslant C_2(\mathrm{e}^{C_1t}+1)(\|u(0)\|^2_{2,\Omega}+1)$$

и оценку

$$\sup_{[0,T]}\|u^{(m)}(t)\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_0^T \|\nabla u^{(m)}(s)\|^2_{2,\Omega}\,ds \leqslant \bar C_2(\mathrm{e}^{C_1T}+1)(\|u(0)\|^2_{2,\Omega}+1) = M_1. \tag{27}$$

Рассмотрим также случай 3 (см. (15)). Оценки (23), (25) остаются без изменений. Получим оценку слагаемого I_{23}. Пусть $3 < \sigma^+$, случай $3 \geqslant \sigma^+$ является более простым. Применяя теорему вложения

$$\Big(\int\limits_\Omega |u|^{\sigma^+-1}\,dx\Big)^{1/(\sigma^+-1)} \leqslant C\Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\theta/2}\Big(\int\limits_\Omega |u|^2\,dx\Big)^{(1-\theta)/2},$$

$$\theta = \frac{n(\sigma^+-3)}{2(\sigma^+-1)} < 1 \quad \leftrightarrow \quad \sigma^+ < 3 + \frac{2}{n}, \quad \sigma^+ > 3$$

и неравенство Юнга, имеем

$$|I_{23}| \leqslant b^+ N_3^2 \int\limits_0^t \|u^{(m)}\|_{2,\Omega}\Big(\int\limits_\Omega |u^{(m)}(\xi)|^{2\sigma^+-2}\,d\xi + |\Omega|\Big)^{1/2} ds \leqslant$$

$$\leqslant b^+ N_3^2 \int\limits_0^t \|u^{(m)}\|_{2,\Omega}\big(C\big(\|\nabla u^{(m)}\|_{2,\Omega}\big)^{2\theta(\sigma^+-1)}\big(\|u^{(m)}\|_{2,\Omega}\big)^{2(1-\theta)(\sigma^+-1)} + |\Omega|\big)^{1/2} ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}\|_{2,\Omega}^2\,ds + C(\varepsilon)\big((\|u^{(m)}\|_{2,\Omega}^2)^\lambda + 1\big) \quad \forall \varepsilon \in (0,1),$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{1-\mu} > 1, \qquad \gamma = 1 + (1-\theta)(\sigma^+-3),$$

$$\mu = \frac{\theta}{2}(\sigma^+-3) = \frac{n}{2}(\sigma^+-3) < 1 \quad \leftrightarrow \quad \sigma^+ < 3 + \frac{2}{n}.$$

Выбирая соответствующим образом ε, объединяя (22), (23)–(25) и учитывая, что $\|\nabla u^{(m)}(s)\|_{2,\Omega}^2 \leqslant C(\|\nabla u^{(m)}(s)\|_{2,\Omega}^{2\lambda} + 1)$, после ряда вычислений получаем неравенство

$$\|u^{(m)}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}\|_{2,\Omega}^2\,ds := Y(t) + \int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}\|_{2,\Omega}^2\,ds \leqslant C_1 \int\limits_0^t Y^\lambda(s)\,ds + \bar{Y}(0),$$

$$\bar{Y}(0) = C_2(\|u(0)\|_{2,\Omega}^2 + 1), \qquad \lambda > 1.$$

Из анализа этого неравенства следуют оценки

$$Y(t) \leqslant \bar{Y}(0)\big(1 - t(\lambda-1)\bar{Y}(0)^{\lambda-1}\big)^{1/(\lambda-1)}, \qquad t \leqslant T_{\max} < \frac{\bar{Y}(0)^{1-\lambda}}{\lambda-1}; \tag{28}$$

$$\|u^{(m)}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \int\limits_0^t \|\nabla u^{(m)}\|_{2,\Omega}^2\,ds \leqslant C(T_{\max}, \bar{Y}(0)), \tag{29}$$

где постоянная C не зависит от m. Далее нетрудно получить оценку (см. [15. Гл. 4])

$$\|u_t^{(m)}\|_{L^2(0,t;W^{-1}(\Omega))} \leqslant C, \tag{30}$$

которая справедлива при постоянной C, не зависящей от m, для $t \in [0,T]$ в случаях 1, 2 (см. (13), (14)) и для $t \in [0, T_{\max}]$ в случае 3. Согласно [15. Гл. 4] оценки (29), (30) позволяют осуществить предельный переход при $m \to \infty$ и доказать существование слабого решения задачи (16), (17) (а значит, в силу леммы 1, и задачи (5)–(7)) в смысле определения 1.

2.3. *Вторая энергетическая оценка.* Умножая (21) сначала на $dc_i^{(m)}/dt$, затем на $\lambda_i c_i^{(m)}$, интегрируя по t и складывая эти равенства, получаем второе энергетическое равенство

$$\Lambda = \|u_t^{(m)}\|^2_{2,Q_t} + \|\Delta u^{(m)}\|^2_{2,Q_t} + \|\nabla u^{(m)}(t)\|^2_{2,\Omega} =$$
$$= \|\nabla u_0^{(m)}\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_{Q_t} \big(b^+|u^{(m)}|^{\sigma-2}u^{(m)} + f\omega\big)\big(u_t^{(m)} + \Delta u^{(m)}\big)\,dx\,ds.$$

Применяя неравенство Коши и формулу (18), нетрудно получить неравенства

$$\Lambda \leqslant \frac{1}{2}\big(\|u_t^{(m)}\|^2_{2,Q_t} + \|\Delta u^{(m)}\|^2_{2,Q_t}\big) + C\int\limits_{Q_t}\big(|u^{(m)}|^{2\sigma-2} + f^2\big)\,dx\,ds,$$

$$\|f(t,u^{(m)})\omega\|^2_{2,\Omega} \leqslant C\Big(1 + \|u^{(m)}\|^2_{2,\Omega} + \Big(\int\limits_{\Omega}|u^{(m)}|^{\sigma-1}\,dx\Big)^2\Big).$$

Используя эти неравенства, находим

$$\Lambda \leqslant C\Big(\|\nabla u_0\|^2_{2,\Omega} + \|u^{(m)}\|^2_{2,Q_t} + \int\limits_0^t\Big(\int\limits_{\Omega}|u^{(m)}|^{\sigma^+-1}\Big)^2\,ds + 1\Big),$$
$$C = C(N_2, \|\Delta\omega\|_{2,\Omega}, b^+, T, |\Omega|).$$

Используя оценки (29), (30), имеем:

— в случае 2 (см. (14))

$$\Lambda \leqslant C\Big(\|\nabla u_0\|^2_{2,\Omega} + \|u^{(m)}\|^2_{2,Q_t} + \int\limits_0^t\Big(\int\limits_{\Omega}|u^{(m)}|^{\sigma^+-1}\Big)^2\,ds + 1\Big);$$

— в случае 3

$$\Lambda \leqslant C_2, \qquad t \in [0, T_{\max}]$$

при постоянных C_1, C_2, не зависящих от m. Следовательно, указанные выше оценки будут верны и для предельной функции u, а слабое решение будет сильным. Таким образом, теорема 1 доказана.

3. Теорема единственности. Докажем теорему единственности.

Теорема 2. 1. *Пусть выполнены условия*

$$b(x,t) \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant \sigma(x,t) < \infty. \tag{31}$$

Тогда слабое решение задачи (5)–(7), *такое что* $|u|^{\sigma(x,t)} \in \mathbb{L}^1(Q_T)$, $u \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$, $|\nabla u| \in \mathbb{L}^2(Q_T)$, *будет единственным глобально по времени.*

2. *Пусть выполнены условия* (15). *Тогда слабое решение задачи* (5)–(7), *такое что* $|u|^{\sigma(x,t)} \in \mathbb{L}^1(Q_T)$, $u \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$, $|\nabla u| \in \mathbb{L}^2(Q_T)$, *будет единственным на интервале времени* $(0, T_{\max})$, *где* $T_{\max}$ *определено в* (28).

Доказательство. Допустим, что задача (5)–(7) имеет два решения u_1, u_2 и $u = u_1 - u_2$. Тогда u удовлетворяет задаче

$$u_t - \Delta u = I_1 + I_2, \qquad x \in \Omega, \quad t > 0; \tag{32}$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0,$$

где

$$I_1 = b(x,t)(|u_1|^{\sigma(x,t)-2}u_1 - |u_2|^{\sigma(x,t)-2}u_2),$$

$$I_2 = \omega\Big(\int\limits_\Omega \nabla u\,\nabla\omega\,dx - \int\limits_\Omega b(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma(x,t)-2}u_2)\,dx\Big),$$

$$\int\limits_\Omega u(t)I_2(t)\,dx = 0.$$

Умножая (32) на u и интегрируя по Ω, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u^2\,dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int\limits_\Omega I_1 u\,dx, \qquad t>0. \tag{33}$$

В случае (31) с учетом монотонности функции $|u|^{\sigma(x,t)-2}u$ имеем

$$I_1 u = b(x,t)(|u_1|^{\sigma(x,t)-2}u_1 - |u_2|^{\sigma(x,t)-2}u_2)(u_1-u_2) \leqslant 0.$$

Тогда из (33) следует

$$\int\limits_\Omega u^2(t)\,dx + 2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dt \leqslant 0 \quad\to\quad u(x,t)=0, \quad t>0.$$

Рассмотрим случай 3 (см. (15)). Применяя теорему Лагранжа и неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_\Omega |I_1 u|\,dx \leqslant A\Big(\int\limits_\Omega |u|^{2\lambda}\,dx\Big)^{1/\lambda}, \qquad \lambda>1, \tag{34}$$

где

$$A = C(b^+,\sigma^+)\Big(\int\limits_\Omega (|u_1|+|u_2|)^{(\sigma(x,t)-2)\lambda/(\lambda-1)}\,dx\Big)^{(\lambda-1)/\lambda}.$$

Далее, используем интерполяционное неравенство [18. Лемма 3.2]

$$\Big(\int\limits_\Omega |u|^{2\lambda}\,dx\Big)^{1/\lambda} \leqslant C\Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\theta}\Big(\int\limits_\Omega |u|^2\,dx\Big)^{1-\theta}, \tag{35}$$

где $\theta = n(\lambda-1)/(2\lambda) < 1$.

Учитывая (34), (35) и применяя неравенство Юнга, получаем

$$\int\limits_\Omega |I_1 u|\,dx \leqslant C\Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{\theta}\Big(\int\limits_\Omega |u|^2\,dx\Big)^{1-\theta}A \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big) + C\Big(\int\limits_\Omega |u|^2\,dx\Big)A^{1/(1-\theta)},$$

где $C = (1-\theta)(2\theta)^{\theta/(1-\theta)}$. Подставляя последнее неравенство в (33), находим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u^2\,dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leqslant 2C\Big(\int\limits_\Omega |u|^2\,dx\Big)A^{1/(1-\theta)}.$$

Как следствие, для функции $Y(t) = \int\limits_\Omega u^2\,dx$ получаем задачу Коши

$$\frac{dY}{dt} \leqslant 2CYA^{1/(1-\theta)}, \qquad Y(0) = 0. \tag{36}$$

Нетрудно показать, что неравенства

$$(\sigma(x,t) - 2)\,\frac{\lambda}{\lambda - 1} \leqslant \sigma(x,t), \qquad \frac{\lambda - 1}{\lambda(1-\theta)} \leqslant 1$$

выполнены при $1 < \lambda \leqslant 1 + 2/n$. Тогда, применяя неравенство Юнга, получаем

$$A^{1/(1-\theta)} = \Big(\int\limits_\Omega (|u_1| + |u_2|)^{(\sigma(x,t)-2)\lambda/(\lambda-1)}\,dx\Big)^{(1-\theta)^{-1}(\lambda-1)/\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\int\limits_\Omega (|u_1| + |u_2|)^{\sigma(x,t)}\,dx + 1\Big) := \tilde{A} \in L^1(0,T).$$

Таким образом, задача (36) имеет только тривиальное решение $Y(t) \equiv 0$, т. е. $u = 0$. Следовательно, решение задачи (5)–(7) единственно.

Теорема единственности доказана.

4. Разрушение решения за конечное время. Используя метод собственных функций Каплана [19], докажем разрушение решения за конечное время, т. е. обращение в бесконечность определенных норм решения за конечное время (см. [11, 12]). Пусть $\lambda > 0$ и $\Phi(x) \geqslant 0$ — первое собственное число и собственная функция для оператора Лапласа Δ области Ω:

$$\Delta\Phi = -\lambda\Phi \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \Phi\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \int\limits_\Omega \Phi^2\,dx = 1.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mu(t) = \int\limits_\Omega u\Phi\,dx, \qquad \mu'(t) = \int\limits_\Omega u_t\Phi\,dx,$$

$$\alpha(t) = (1 - C_2)\Big(\int\limits_\Omega b^{1/(2-\sigma^-)}\Phi\,dx\Big)^{2-\sigma^-}, \qquad C_1 = \sup_{\bar\Omega} \frac{|\Delta\omega|}{\Phi}, \qquad C_2 = \sup_{\bar\Omega} \frac{\omega}{\Phi}, \tag{37}$$

$$\beta(t) = (1 - C_2)\int\limits_\Omega b\Phi\,dx, \qquad \lambda_1 = \lambda + C_1.$$

Теорема 3. *Пусть данные задачи* (5)–(7) *в дополнение к* (8)–(12), (15) *удовлетворяют условиям*

$$C_2 < 1, \qquad 0 < \alpha^- \leqslant \alpha(x,t) < \infty, \qquad \beta \leqslant \beta^+ < \infty; \tag{38}$$

$$-\lambda_1\mu(0) + \beta^-\mu^{\sigma^- - 1}(0) - \beta^+ > 0, \qquad -\lambda_1 + \beta^-(\sigma^- - 1)\mu^{\sigma^- - 1}(0) > 0. \tag{39}$$

Тогда любое неотрицательное слабое решение задачи (5)–(7) *разрушается в следующем смысле: существует конечное значение* $t^* < \infty$, *такое что* $\mu(t) \to \infty$ *при* $t \to t^*$. (*Условия* (39) *заведомо выполняются для достаточно больших* $\mu(0)$.)

Доказательство. Умножая уравнение (16) на функцию $\Phi(x)$ и интегрируя по Ω, получаем

$$\mu'(t) + \lambda\mu(t) = \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2} u\Phi\,dx + f(t)\int\limits_{\Omega} \omega\Phi\,dx = I_1 + I_2, \tag{40}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\Omega} b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2} u\Phi\,dx, \qquad I_2 = f(t)\int\limits_{\Omega} \omega\Phi\,dx.$$

С учетом неотрицательности решения, (18) и (8) ($\varphi'(t) \geqslant 0$) из (40) следует

$$\mu'(t) \geqslant -\lambda_1\mu(t) + (1 - C_2)I_1. \tag{41}$$

Используя представление

$$I_1 = \Big(\int\limits_{\Omega\,\cap\,(u\geqslant 1)} + \int\limits_{\Omega\,\cap\,(u<1)}\Big) b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-1}\Phi\,dx,$$

оценим I_1 следующим образом:

$$I_1 \geqslant \int\limits_{\Omega\,\cap\,(u\geqslant 1)} bu^{\sigma^- -1}\Phi\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega} bu^{\sigma^- -1}\Phi\,dx - \int\limits_{\Omega} b\Phi\,dx. \tag{42}$$

Применяя обратное неравенство Гельдера

$$\int\limits_{\Omega} |u|\,|v|\,dx \geqslant \Big(\int\limits_{\Omega} |u|^q\,dx\Big)^{1/q}\Big(\int\limits_{\Omega} |v|^{q/(q-1)}\,dx\Big)^{(q-1)/q}, \qquad q = \frac{1}{\sigma^- - 1} \in (0,1),$$

получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega} bu^{\sigma^- -1}\Phi\,dx \geqslant \Big(\int\limits_{\Omega} b^{1/(2-\sigma^-)}\Phi\,dx\Big)^{2-\sigma^-}\Big(\int\limits_{\Omega} u\Phi\,dx\Big)^{\sigma^- -1} = \frac{\alpha(t)}{1 - C_2}\,\mu^{\sigma^- -1}(t). \tag{43}$$

С учетом (41)–(43) имеем неравенство

$$\mu'(t) \geqslant -\bar{\lambda}\mu(t) + \alpha^-\mu^{\sigma^- -1}(t) - \beta^+. \tag{44}$$

Согласно [15. С. 242–247] существует конечное значение $t^* < \infty$, такое что любое неотрицательное решение последнего неравенства $\mu(t) \to \infty$. Теорема доказана.

Выясним, с какой скоростью коэффициент $b(x,t) \geqslant 0$ может обращаться в нуль и с какой предельной скоростью показатель нелинейности $\sigma(x,t)$ может стремиться к двум, для того чтобы решение разрушалось.

Замечание 1. Второе условие в (38) выполняется, если коэффициент $b(x,t)$ может обращаться в нуль, но при этом

$$\int\limits_{\Omega} b^{1/(2-\sigma^-)}\Phi\,dx \leqslant C < \infty, \qquad 2 < \sigma^-.$$

Действительно, в этом случае с учетом (37) получаем

$$\alpha \geqslant (1 - C_2)C^{2-\sigma} = \alpha^- > 0.$$

Следовательно, коэффициент $b(x,t)$ не может обращаться в нуль на множестве $\Omega_0 \subset \Omega$, имеющем положительную меру.

Представляет интерес вопрос, будет ли происходить разрушение решения, в случае если $\sigma^-(t) = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} \sigma(x,t)$ является пределом сверху к двум при $t \to \infty$. Согласно [15. С. 250–251] достаточным условием для того, чтобы любое неотрицательное решение $\mu(t)$

неравенства (44) разрушалось за конечное время, является следующее: $\sigma^-(t)$ — монотонно убывающая функция и

$$\int\limits_1^\infty \mathrm{e}^{-(t(\sigma^-(t)-2))}\,dt < \infty. \tag{45}$$

Простейшим примером функции, удовлетворяющей условию (45), является функция

$$\sigma^-(t) - 2 = \alpha t^{-1}\ln t, \qquad \alpha > 1, \quad t \gg \mathrm{e}\,.$$

5. Асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$. Исследуем асимптотическое поведение решения задачи (5)–(7) при $t \to \infty$ в случае 1 (см. (13)), а также обращение в тождественный нуль (исчезновение) решения за конечное время.

5.1. *Убывание решения по экспоненциальному закону.* Умножая (16) на u и интегрируя по области Ω, получаем интегральное соотношение

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u^2\,dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_\Omega |b(x,t)|\,|u|^{\sigma(x,t)}\,dx = I; \tag{46}$$

$$I := \int\limits_\Omega uf(t,u)\omega(x)\,dx = \varphi(t)f(t,u).$$

Применяя неравенство Коши и Юнга, получаем оценку

$$|I| \leqslant \varphi(t)\Big(\varphi'(t) + \frac{N_1}{2}\Big(\|\nabla u\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_\Omega |b(x,t)|\,|u|^{\sigma(x,t)}\,dx\Big)\Big) + \\ + C\varphi(t)\Big(\|\nabla\omega\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_\Omega |b(x,t)|\,|\omega|^{\sigma(x,t)}\,dx\Big).$$

Подставляя ее в (46) с учетом (8), (11), (13), имеем неравенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u^2 dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Omega |u|^{\sigma(x,t)} dx \leqslant C\varphi(t). \tag{47}$$

Далее будем использовать неравенство

$$C_e\|u\|^2_{2,\Omega} \leqslant \|\nabla u\|^2_{2,\Omega} \qquad \forall u \in \mathbb{W}_0^{1,2}(\Omega). \tag{48}$$

Сначала, используя только второе слагаемое в левой части (47), рассмотрим простой случай

$$\varphi(t) \leqslant C_\varphi\,\mathrm{e}^{-\mu t}, \qquad \mu \geqslant C_e. \tag{49}$$

При этом, используя (48), получаем обыкновенное дифференциальное неравенство для функции $Y(t) = \|u(t)\|^2_{2,\Omega}$

$$Y' + C_eY \leqslant C_\varphi\,\mathrm{e}^{-\mu t},$$

анализ которого приводит к оценкам

$$Y(t) \leqslant \mathrm{e}^{-C_et}\Big(Y(0) + \frac{C_\varphi}{\mu - C_e}\Big), \qquad \mu > C_e; \tag{50}$$

$$Y(t) \leqslant \mathrm{e}^{-C_et}(Y(0) + tC_\varphi), \qquad \mu = C_e. \tag{51}$$

Следовательно, доказано, что решение убывает по экспоненциальному закону.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (13)*,* $u(0) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *и* (49)*. Тогда любое слабое решение задачи* (5)–(7) *удовлетворяет оценке* (50) *или* (51)*.*

5.2. *Исчезновение (обращение в тождественный нуль) решения за конечное время.* Рассмотрим случай

$$1 < \sigma^- \leqslant \sigma(x,t) \leqslant \sigma^+ < 2, \quad \varphi \leqslant C_\varphi(1 - t/t_\varphi)_+^{\mu/(1-\mu)}, \quad \mu \in (0,1), \quad v_+ = \max(0, v), \tag{52}$$

где постоянные $C_\varphi, t_\varphi, \mu$ определены ниже. Учитывая оценку (27), без ограничения общности будем считать, что $\|u(t)\|_{\sigma^-,\Omega} \leqslant C\|u(t)\|_{2,\Omega} \leqslant CM_1 \leqslant 1$. Тогда, используя формулы (1.6) [15. С. 8] и (2.45) [18. С. 8], получаем следующие неравенства:

$$\int\limits_\Omega |u|^\sigma \geqslant \min\left(\|u\|_{\sigma,\Omega}^{\sigma^+}, \|u\|_{\sigma,\Omega}^{\sigma^-}\right) \geqslant C\min\left(\|u\|_{\sigma^-,\Omega}^{\sigma^+}, \|u\|_{\sigma^-,\Omega}^{\sigma^-}\right) \geqslant C\left(\|u\|_{\sigma^-,\Omega}^{2}\right)^{\sigma^+/2}. \tag{53}$$

Далее будем использовать следующий вариант неравенства (2.45) [18. С. 84]:

$$\left(\|u\|_{2,\Omega}^2\right)^\mu \leqslant C\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{\sigma^-,\Omega}^{\sigma^+/\sigma^-}\right). \tag{54}$$

Здесь

$$\mu = \frac{\sigma^+}{2(1-\theta) + \theta\sigma^+} \in (0,1), \qquad \theta = \frac{(2-\sigma^-)n}{2d - \sigma^-(n-2)} \in (0,1).$$

С учетом (47), (52)–(54) получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное неравенство для функции $Y(t) = \|u(t)\|_{2,\Omega}^2$

$$\frac{d}{dt}Y(t) + C_0 Y^\mu(t) \leqslant C_\varphi\Big(1 - \frac{t}{t_\varphi}\Big)_+^{\mu/(1-\mu)}. \tag{55}$$

Согласно формуле (1.28) в [18. С. 76–77] любое неотрицательное решение неравенства (55) удовлетворяет оценке

$$Y(t) \leqslant Y(0)(1 - t/t_\varphi)_+^{1/(1-\mu)},$$

если выполнено условие

$$-\frac{Y(0)}{t_\varphi(1-\mu)} + C_0 Y^\mu(0) \leqslant C_\varphi. \tag{56}$$

Следовательно, при этом условии решение задачи исчезает (обращается в тождественный нуль) за конечное время $t_\varphi < \infty$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (13), (52), (56) *и* $u(0) \in L^2(\Omega)$. *Тогда любое слабое решение задачи* (5)–(7) *исчезает за конечное время.*

Замечание 2. При заданных значениях $\sigma^\pm$ условие (56) связывает три параметра задачи: норму начальных данных $Y(0)$, интенсивность C_φ и время исчезновения решения t_φ. Если $C_\varphi = 0$, то при заданном начальном условии $Y(0)$ простое интегрирование (55) определяет единственный момент исчезновения решения $t_\varphi^* = Y_0^{1-\mu}/[C_0(1-\mu)]$. В общем случае ($C_\varphi > 0$), задав в (56) один из трех параметров ($t_\varphi > t_\varphi^*$), можно добиться выполнения условия (56) за счет выбора двух других параметров.

Заключение. В работе доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения обратной задачи с нелокальным условием переопределения для уравнения параболического типа с нестандартным условием роста. Получены условия для данных задач, обеспечивающие локальную и глобальную разрешимость в слабом и сильном смыслах. Выведены достаточные условия для указанных задач, обеспечивающие разрушение (взрыв) локального решения и исчезновение (обращение в нуль) решения за конечное время. Рассмотрены случаи, когда коэффициент $b(x,t)$ при нелинейном члене может обращаться в нуль или показатель нелинейности $\sigma(x,t)$ стремится к двум. Исследовано также асимптотическое поведение глобального решения при $t \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прилепко А. И., Орловский Д. Г.** Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1343–1353.
2. **Прилепко А. И., Орловский Д. Г.** О полугрупповом подходе к задаче определения неоднородного члена в эволюционных уравнениях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. С. 1045–1049.
3. **Belov Yu. Ya.** Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
4. **Белов Ю. Я.** Метод слабой аппроксимации / Ю. Я. Белов, С. А. Кантор. Красноярск: Издат. центр Краснояр. гос. ун-та, 1999.
5. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.
6. **Kozhanov A. I.** Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
7. **Кожанов А. И.** Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
8. **Eden A., Kalantarov V. K.** On global nonexistence of solutions to an inverse problem for semilinear parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 307. P. 120–133.
9. **Gur S., Yaman M., Yilmaz Y.** Finite time blow up of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearity // J. Nonlinear Sci. Appl. 2016. V. 9. P. 1902–1910.
10. **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. М.: Наука, 1967.
11. **Antontsev S. N., Shmarev S. I.** Blow-up of solutions to parabolic equations with non-standard growth conditions // J. Comput. Appl. Math. 2010. V. 234. P. 2633–2645.
12. **Antontsev S. N., Shmarev S. I.** On the blow-up of solutions to anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity // Tr. Mat. Inst. Steklova. 2010. V. 270. P. 33–48.
13. **Жиков В. В.** О плотности гладких функций в пространстве Соболева — Орлича // Зап. науч. семинара С.-Петерб. отд-ния Мат. ин-та РАН. 2004. Т. 310. С. 67–81.
14. **Diening L.** Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents / L. Diening, P. Hästö, S. Harjulehto, M. Rúžička. Berlin: Springer: Atlantis Press, 2011. (Lecture Notes Math.; V. 2017).
15. **Antontsev S. N.** Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: Existence, uniqueness, localization, blow-up / S. N. Antontsev, S. Shmarev. P.: Atlantis Press, 2015. (Atlantis Studies Different. Equat.; V. 4).
16. **Ruzicka M.** Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Berlin: Springer-Verlag, 2000. (Lecture Notes Math.; V. 1748).
17. **Acerbi A., Mignione G., Seregin G.** Regularity results for a class of parabolic systems related to a class of non-Newtonian fluids // Ann. Inst. H. Poincare. 2004. V. 21, N 6. P. 25–60.
18. **Antontsev S. N.** Energy methods for free boundary problems: Progress in nonlinear differential equations and their applications / S. N. Antontsev, J. I. Díaz, S. Shmarev. Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 2002.
19. **Kaplan S.** On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16. P. 305–330.

Поступила в редакцию 22/X 2018 г.,
после доработки — 22/X 2018 г.
Принята к публикации 29/X 2018 г.