УДК 539.3

А.Е. Алексеев

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СЛОЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА

Уравнения деформирования упругого слоя переменной толщины при малых удлинениях, сдвигах и углах поворота в общем случае представляют собой трехмерные уравнения линейной теории упругости. С использованием малости толщины слоя по сравнению с другими линейными размерами применяются различные подходы к понижению размерности исходной задачи. Одним из них является метод разложения искомых величин в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра (например, [1]). В [2] изложен метод понижения размерности задач упругого деформирования пластин и оболочек постоянной толщины с произвольными условиями для перемещений и напряжений на лицевых поверхностях. В основе этого подхода лежит использование нескольких аппроксимаций одних и тех же неизвестных функций в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра. В [3] на основе развития той же методики получены уравнения деформирования слоя переменной толщины в произвольной криволинейной системе координат.

Ниже излагается методика сведения трехмерных уравнений теории упругости к последовательности двумерных задач теории упругого слоя, которая является развитием результатов [2, 3].

1. Определение слоя. В механике сплошной среды оболочками принято называть тела, ограниченные двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами тела. Обозначим через V область трехмерного пространства R^3, которую занимает оболочка. Определим положение лицевых поверхностей S^+ и S^- заданием радиусов-векторов $\mathbf{R}^+$ и $\mathbf{R}^-$ как функций одних и тех же гауссовых координат ξ^α:

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+(\xi^\alpha),\ \mathbf{R}^- = \mathbf{R}^-(\xi^\alpha),\ \{\xi^\alpha\} \in S_\xi \subset R^2.$$

Здесь и в дальнейшем греческие индексы пробегают значения 1, 2, а латинские — 1, 2, 3.

Функции $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ отображают плоскую область S_ξ с контуром L_ξ пространства R^2 на лицевые поверхности S^+, S^- соответственно. Положение любой внутренней точки оболочки V определяется вектор-функцией криволинейных координат ξ^k:

$$\mathbf{R}(\xi^k) = \mathbf{r}_0(\xi^\alpha) + \xi^3 \Delta\mathbf{r}(\xi^\alpha),\ \{\xi^k\} \in V_\xi \subset R^3. \tag{1.1}$$

Здесь

$$V_\xi = \{\xi^k | \xi^\alpha \in S_\xi \subset R^2,\ \xi^3 \in [-1, 1]\}, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{r}_0 = 0{,}5(\mathbf{R}^+(\xi^\alpha) + \mathbf{R}^-(\xi^\alpha)),\ \Delta\mathbf{r} = 0{,}5(\mathbf{R}^+(\xi^\alpha) - \mathbf{R}^-(\xi^\alpha)).$$

При этом вектор-функция $\mathbf{R}$ отображает область V_ξ на V, а вектор-функция $\mathbf{r}_0$ отображает плоскую область S_ξ на поверхность S_0 трехмерного пространства, которую в дальнейшем будем называть срединной поверхностью.

Обозначим через h половину толщины слоя в направлении ξ^3. Из (1.2) получим

$$h = (\Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r})^{0,5},\ \Delta\mathbf{r} = h\mathbf{n}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении ξ^3).

Пусть Σ — боковая поверхность оболочки, L — линия пересечения Σ и S_0. Тогда, согласно (1.1), Σ — линейчатая поверхность, образованная семейством прямых линий, проходящих через точки контура L в направлении вектора $\mathbf{n}$. Зафиксируем в области S_ξ некоторую точку с координатами $\{\xi_0^\alpha\}$. Тогда вектор-функция $\mathbf{R}$ по (1.1) сопоставит этой точке отрезок прямой в трехмерном пространстве, концы которого лежат на лицевых поверхностях. Кроме того, если эта точка лежит на контуре L, то весь отрезок будет принадлежать боковой поверхности Σ.

Таким образом, задание вектор-функций $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ полностью определяет геометрию оболочки переменной толщины. При этом вектор $\mathbf{n}$ может не быть нормалью к поверхности S_0, а боковая поверхность Σ и срединная поверхность S_0 могут пересекаться не под прямым углом. В дальнейшем оболочку переменной толщины, геометрия которой определяется на основе выражения (1.1), будем называть слоем переменной толщины или просто слоем.

2. Локальные базисы координатной системы слоя. Согласно (1.1), в качестве координат любой точки слоя V можно взять тройку чисел $\{\xi^k\}$, где $\{\xi^\alpha\}$ — гауссовы координаты срединной поверхности S_0, а $\xi^3 \in [-1, 1]$ — координата в направлении вектора $\mathbf{n}$. Такую криволинейную систему координат будем называть координатной системой слоя.

Дифференцируя обе части равенства (1.1) по переменным ξ^k, получим вектор-функции

$$\text{(2.1)} \qquad \mathbf{э}_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} = \left(\mathbf{R}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\alpha}\right) = \mathbf{r}_{0,\alpha} + \Delta \mathbf{r}_{,\alpha}\xi^3,$$

$$\mathbf{э}_3 = \mathbf{R}_{,3} = \Delta \mathbf{r} = h\mathbf{n},$$

составляющие ковариантный локальный базис координатной ситемы слоя. Соответствующий биортогональный (контравариантный) локальный базис, состоящий из вектор-функций $\mathbf{э}^i$, определяется из условий

$$\mathbf{э}^i \cdot \mathbf{э}_j = \delta^i_j$$

(δ^i_j — дельта Кронекера) в виде

$$\text{(2.2)} \qquad \mathbf{э}^1 = \frac{\mathbf{э}_2 \times \mathbf{э}_3}{J}, \; \mathbf{э}^2 = \frac{\mathbf{э}_3 \times \mathbf{э}_1}{J}, \; \mathbf{э}^3 = \frac{\mathbf{э}_1 \times \mathbf{э}_2}{J},$$

$$J = \mathbf{э}_1 \cdot (\mathbf{э}_2 \times \mathbf{э}_3).$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{э}^0_\alpha = \mathbf{r}_{0,\alpha} = \mathbf{э}_\alpha(\xi^\rho, 0), \; \mathbf{э}^0_3 = \mathbf{э}_3(\xi^\alpha), \; \mathbf{э}^{0i} = \mathbf{э}^i(\xi^\alpha, 0).$$

Тройки векторов $\mathbf{э}^0_i$ и $\mathbf{э}^{0i}$ образуют локальные базисы срединной поверхности слоя. В произвольной точке слоя эти локальные базисы определяются параллельным переносом из соответствующей точки срединной поверхности.

В каждой точке слоя определим тройку векторов $\mathbf{a}_i$

$$\text{(2.3)} \qquad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{n} \times (\mathbf{э}^0_\alpha \times \mathbf{n}), \; \mathbf{a}_3 = \mathbf{n},$$

которую в дальнейшем будем рассматривать как основной локальный базис слоя (ковариантный). Следуя известной формуле векторной алгебры, из (2.3) находим

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{э}^0_\alpha - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{э}^0_\alpha \cdot \mathbf{n}),$$

т.е. вектор $\mathbf{a}_\alpha$ — проекция $\mathbf{э}^0_\alpha$ на плоскость, ортогональную единичному вектору $\mathbf{n}$. Соответствующий биортогональный (контравариантный) базис находится из условий

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta^j_i$$

и имеет вид

$$\mathrm{a}^\alpha = \text{э}^{0\alpha},\ \mathrm{a}^3 = \mathrm{n}.$$

Из (2.3) очевидным образом следует, что вектор n ортогонален базисным векторам a^α, a_α.

Таким образом, для криволинейной координатной системы слоя можно описанным выше способом ввести три вида локальных базисов: э_i, э^0_i, a_i. Каждый из векторов одного базиса можно разложить по векторам другого. Обозначим

$$g_{ij} = \text{э}_i \cdot \text{э}_j,\ g^0_{ij} = \text{э}^0_i \cdot \text{э}^0_j,\ a_{ij} = \mathrm{a}_i \cdot \mathrm{a}_j, \tag{2.4}$$

где g_{ij} — компоненты метрического тензора системы координат ξ^i. Из (2.1), (2.4) следует

$$g_{33} = h^2,$$

а из (2.3)

$$a_{33} = 1,\ a_{3\alpha} = 0.$$

С учетом обозначений

$$g_\alpha = g_{\alpha 3}/h,\ b^\beta_\alpha = -(\mathrm{a}_{3,\alpha} \cdot \mathrm{a}^\beta)$$

формулы (2.1) можно записать в виде

$$\text{э}_\alpha = m^\beta_\alpha \mathrm{a}_\beta + g_\alpha \mathrm{a}_3,\ \text{э}_3 = h\mathrm{a}_3, \tag{2.5}$$

где

$$m^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - b^\beta_\alpha h\xi^3. \tag{2.6}$$

Соответственно для компонент метрического тензора g_{ij} имеем

$$g_{\alpha\beta} = m^\gamma_\alpha m^\lambda_\beta a_{\gamma\lambda} + g_\alpha g_\beta,\ g_{\alpha 3} = hg_\alpha,\ g_{33} = h^2. \tag{2.7}$$

Из (2.7) получаем формулы, связывающие определители g, g^0, a матриц $\|g_{ij}\|$, $\|g^0_{ij}\|$, $\|a_{ij}\|$:

$$g = h^2m^2a,\ g^0 = h^2a$$

($m = m^1_1m^2_2 - m^2_1m^1_2$ — определитель матрицы $\|m_{\alpha\beta}\|$). Следуя [4], выражение для m можно, используя (2.6), записать в виде полинома второй степени по переменной ξ^3:

$$m = 1 - 2Hh\xi^3 + Kh^2(\xi^3)^2$$
$$(2H = b^\alpha_\alpha,\ K = b^1_1b^2_2 - b^2_1b^1_2).$$

Связь между контравариантным базисом пространства слоя э^i и основным локальным базисом a_i имеет вид

$$\text{э}^\beta = \mathrm{a}_\alpha(m^{-1})^{\alpha\beta},\ \text{э}^3 = (\mathrm{a}^3 - g_\gamma \mathrm{a}_\alpha(m^{-1})^{\alpha\gamma})/h \tag{2.8}$$

($\|(m^{-1})^{\alpha\beta}\|$ — матрица, обратная матрице $\|m^{\alpha\beta}\|$).

Справедливость равенств (2.8) можно проверить, используя соотношения (2.2) и формулы (2.5). Компоненты обратной матрицы $\|(m^{-1})^{\alpha\beta}\|$ представим в форме [4]

$$(m^{-1})^\beta_\alpha = (\delta^\beta_\alpha + h\xi^3(b^\beta_\alpha - 2H\delta^\beta_\alpha))/m.$$

3. Уравнения линейной теории упругости в произвольной криволинейной системе координат. Рассмотрим произвольную криволинейную систему координат ξ^i. Уравнения равновесия сплошной среды в векторной форме записываются в виде [1]

$$\hat{\mathrm{t}}^i_{,i} + \hat{\mathrm{f}} = 0,\ \hat{\mathrm{t}}^i = J\,\mathrm{t}^i,\ \hat{\mathrm{f}} = J\,\mathrm{f},\ \mathrm{t}^i = \sigma^{ij}\text{э}_j; \tag{3.1}$$

(3.2) $$э_i \times \hat{t}^i = 0,$$

где J — якобиан преобразования координат; σ^{ij} — компоненты тензора напряжений; $\mathbf{f}$ — вектор объемных сил. Равенство (3.2) является условием симметрии тензора напряжений.

Поскольку в дальнейшем рассматривается случай малых удлинений, сдвигов и углов поворота, для компонент тензора деформаций ε_{ij} ограничимся использованием линейных соотношений, выражающих их через вектор перемещений $\mathbf{u}$:

(3.3) $$2\varepsilon_{ij} = (э_i \cdot \mathbf{u}_{,j}) + (э_j \cdot \mathbf{u}_{,i}).$$

Обобщенный закон Гука, связывающий напряжения и деформации, имеет вид

(3.4) $$\sigma^{ij} = C^{ijks}\varepsilon_{ks}$$

(C^{ijks} — контравариантные компоненты тензора 4-го ранга, определяющего свойства упругой среды).

Соотношения (3.4) удобно записать в векторной форме

(3.5) $$\hat{t}^i = J\tilde{C}^{ij} \cdot \mathbf{u}_{,j}.$$

Здесь $\tilde{C}^{ij}$ — оператор, определяемый по формуле

$$\tilde{C}^{ij} = C^{ijks}(э_k * э_s),$$

где $*$ — символ тензорного произведения.

Для простоты изложения в дальнейшем ограничимся случаем краевых условий, когда граница S деформируемого тела состоит из двух частей: S_u (заданы перемещения):

(3.6) $$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{u}_*;$$

S_σ (заданы напряжения):

(3.7) $$\hat{t}^i\nu_i|_{S_\sigma} = \mathbf{P}_*$$

(ν_i — косинусы вектора внешней нормали к границе S, а $\mathbf{u}_*$, $\mathbf{P}_*$ — заданные вектор-функции на S).

Уравнения (3.1), (3.5) совместно с граничными условиями (3.6), (3.7) определяют краевую задачу линейной теории упругости.

4. Разложение функций по полиномам Лежандра. В качестве криволинейной системы координат выберем координатную систему слоя ξ^k. При этом координата $\xi^3 \in [-1, 1]$, и неизвестные функции $\mathbf{u}$, $\hat{t}^i$ можно представить в виде рядов по полиномам Лежандра:

(4.1) $$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{u}]^k P_k, \quad \hat{t}^i = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{t}^i]^k P_k.$$

Здесь $P_k(\xi^3)$ — ортогональные полиномы Лежандра; $[\mathbf{u}]^k$, $[\hat{t}^i]^k$ — коэффициенты разложений, зависящие от гауссовых координат $\{\xi^\alpha\} \in S_\xi \subset R^2$:

$$[\mathbf{u}]^k = \frac{(1+2k)}{2}\int_{-1}^{1} \mathbf{u}P_k d\xi^3, \quad [\hat{t}^i]^k = \frac{(1+2k)}{2}\int_{-1}^{1} \hat{t}^i P_k d\xi^3.$$

Разложим величины $\hat{t}^i$ по основному локальному базису $\mathbf{a}_i$. Согласно (2.5), (3.1), имеем

$$\hat{t}^i = J\sigma^{ij}э_j = \sqrt{a}mh(\sigma^{i\alpha}э_\alpha + \sigma^{i3}э_3) = \sqrt{a}mh(\sigma^{i\alpha}m^\beta_\alpha \mathbf{a}_\beta + \sigma^{ik}g_{k3}\mathbf{a}_3),$$

откуда, используя известное правило понижения индекса, получим

(4.2) $$\hat{t}^i = \sqrt{a}mh(\sigma^{i\alpha}m^\beta_\alpha \mathbf{a}_\beta + \sigma^i_3\mathbf{n}/h).$$

Подставим (4.2) в формулы (4.1) разложений $\hat{\mathbf{t}}^i$ по полиномам Лежандра и после простых преобразований имеем

$$\hat{\mathbf{t}}^i = \sqrt{a}h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+2k}{2} (\overset{(k)}{M^{i\gamma}} \mathbf{a}_\gamma + \overset{(k)}{Q^i} \mathbf{n}) P_k, \tag{4.3}$$

где

$$\overset{(k)}{M^{i\gamma}} = \int_{-1}^{1} m m^\gamma_\beta \sigma^{i\beta} P_k d\xi^3; \quad \overset{(k)}{Q^i} = \int_{-1}^{1} m \sigma^i_3 P_k d\xi^3 / h.$$

Величины $\overset{(k)}{M^{\alpha\beta}}$ будем называть моментами тангенциальных напряжений k-порядка, а $\overset{(k)}{Q^\alpha}$ — моментами поперечных (перерезывающих) сил k-порядка.

Обозначим через $\mathbf{N}^\alpha$ и $\mathbf{M}^\alpha$ векторы усилий и моментов, действующих на площадку $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ и отнесенных к толщине слоя $2h$. По определению

$$\mathbf{N}^\alpha = \int_{-1}^{1} \hat{\mathbf{t}}^\alpha d\xi^3 / 2J^0, \quad \mathbf{M}^\alpha = \int_{-1}^{1} (\mathbf{э}_3 \times \hat{\mathbf{t}}^\alpha) \xi^3 d\xi^3 / 2J^0. \tag{4.4}$$

Подставляя (4.3) в (4.4), находим

$$2\mathbf{N}^\alpha = \overset{(0)}{M^{\alpha\gamma}} \mathbf{a}_\gamma + \overset{(0)}{Q^\alpha} \mathbf{n}, \quad 2\mathbf{M}^\alpha = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_\gamma) h \overset{(1)}{M^{\alpha\gamma}}. \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что первые члены в разложении напряжений в ряды по полиномам Лежандра обладают важным свойством — имеют смысл усилий и моментов, действующих на элемент слоя.

Подобно усилиям разложим вектор перемещений $\mathbf{u}$ в (4.1) по основному базису:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} (\overset{(k)}{U^\gamma} \mathbf{a}_\gamma + \overset{(k)}{W} \mathbf{n}) P_k. \tag{4.6}$$

Здесь

$$\overset{(k)}{U^\gamma} = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}^\gamma) P_k d\xi^3, \quad \overset{(k)}{W} = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) P_k d\xi^3 \tag{4.7}$$

— моменты тангенциальных и поперечных перемещений k-порядка.

Обозначим через $\mathbf{u}_*$ произвольное жесткое перемещение. Тогда для произвольной точки слоя с радиусом-вектором $\mathbf{R}$ в случае малых смещений справедливо равенство [5]

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{v}_0 + \mathbf{R} \times \omega_0, \tag{4.8}$$

где $\mathbf{v}_0$, ω_0 — произвольные постоянные, характеризующие перемещение точки отсчета и поворот.

По определению геометрии слоя радиус-вектор $\mathbf{R}$ вычисляется по формуле (1.1). Подставляя это выражение в (4.8), получим

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{v}_* + h(\mathbf{n} \times \omega_0)\xi^3, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \times \omega_0. \tag{4.9}$$

Определим, в какие члены разложения (4.6) входит жесткое перемещение. Для этого подставим (4.9) в формулы (4.7). После интегрирования с учетом свойств полиномов Лежандра имеем

$$\overset{(0)}{U^\gamma} = \mathbf{v}_* \cdot a^\gamma, \quad \overset{(1)}{U^\gamma} = (\mathbf{n} \times \omega_0), \quad \overset{(k)}{U^\gamma} = 0 \ (k = \overline{2, \infty}), \tag{4.10}$$

$$\overset{(0)}{W} = \mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}, \quad \overset{(k)}{W} = 0 \ (k = \overline{1, \infty}).$$

Таким образом, из (4.10) следует, что произвольное жесткое перемещение слоя содержится в первых членах $\overset{(0)}{U^\alpha}$, $\overset{(1)}{U^\alpha}$, $\overset{(0)}{W}$ разложений перемещений по полиномам Лежандра. Это обстоятельство имеет не только важный физический смысл, но и накладывает естественное ограничение на минимальное количество членов в аппроксимирующих отрезках ряда (4.1). Так, при учете моментного состояния количество членов в аппроксимирующих отрезках ряда (4.1) для перемещений не может быть меньше двух для тангенциальных смещений и не меньше одного для поперечных.

При аппроксимации величин $\mathbf{t}^i$, $\mathbf{u}$ в виде рядов (4.1) в качестве неизвестных выступают коэффициенты разложений, которые зависят от двух переменных — гауссовых координат срединной поверхности. Однако уменьшение числа независимых переменных достигнуто ценой увеличения количества неизвестных до бесконечности. Поэтому следующий шаг состоит в урезании рядов (4.1) и сведении исходной дифференциальной задачи к решению конечной системы уравнений с двумя независимыми переменными.

5. Аппроксимации напряжений. Рассмотрим уравнения равновесия сплошной среды, которые представим в эквивалентной (3.1) форме

$$\text{(5.1)}\qquad \mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{t}}^i_{,i} + \hat{\mathbf{f}}) = 0,\ \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{t}}^i_{,i} + \hat{\mathbf{f}}) = 0,$$

где, как и ранее, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси ξ^3.

Вектор $\mathbf{n}$ не зависит от переменной ξ^3. Поэтому, разлагая равенства (5.1) в ряды по полиномам Лежандра, получим для любого $N \geqslant 0$ систему уравнений

$$\text{(5.2)}\qquad \mathbf{n} \times ([\hat{t}^\alpha]^k_{,\alpha} + [\hat{t}^3_{,3}]^k + [\hat{f}]^k) = 0\ (k = \overline{0, N+1}),$$
$$\mathbf{n} \cdot ([\hat{t}^\alpha]^k_{,\alpha} + [\hat{t}^3_{,3}]^k + [\hat{f}]^k) = 0\ (k = \overline{0, N}).$$

Для каждого k умножим равенства (5.2) на P_k и просуммируем. В результате

$$\text{(5.3)}\qquad \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{T}}'^\alpha_{,\alpha} + \mathbf{n} \times \sum_{k=0}^{N+1} [\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k P_k + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{F}} = 0,$$
$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}''^\alpha_{,\alpha} + \mathbf{n} \cdot \sum_{k=0}^{N} [\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k P_k + \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{F}} = 0.$$

Здесь величины $\hat{\mathbf{T}}'^\alpha$, $\hat{\mathbf{T}}''^\alpha$, $\hat{\mathbf{F}}$ отвечают отрезкам рядов

$$\text{(5.4)}\qquad \hat{\mathbf{T}}'^\alpha = \sum_{k=0}^{N+1} [\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k P_k,\ \hat{\mathbf{T}}''^\alpha = \sum_{k=0}^{N} [\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k P_k,$$
$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{n} \times (\sum_{k=0}^{N+1} [\hat{\mathbf{f}}]^k \times \mathbf{n} P_k) + \mathbf{n} \cdot (\sum_{k=0}^{N} [\hat{\mathbf{f}}]^k \cdot \mathbf{n} P_k).$$

Рассмотрим функцию $a(\xi)$ и соответствующий ей некоторый отрезок ряда $A(\xi) = \sum_{k=0}^{Q} [a]^k P_k(\xi)$. Тогда для производной $A_{,\xi}$ справедливо равенство

$$A_{,\xi} = \sum_{k=0}^{Q-1} [a_{,\xi}]^k P_k.$$

Используя это свойство, из (5.3) окончательно находим

$$\text{(5.5)}\qquad \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{T}}'^i_{,i} + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{F}} = 0,\ \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}''^i_{,i} + \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{F}} = 0,$$

где для компактности записи введены следующие обозначения:

$$\text{(5.6)}\qquad \hat{\mathbf{T}}'^3 = \hat{\mathbf{T}}''^3 = \hat{\mathbf{T}}^3 = \mathbf{n} \times (\sum_{k=0}^{N+2} \{[\hat{\mathbf{t}}^3]^k P_k\} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot (\sum_{k=0}^{N+1} \{[\hat{\mathbf{t}}^3]^k P_k\} \cdot \mathbf{n}).$$

Таким образом, в уравнениях (5.5) для одних и тех же величин $\hat{\mathbf{t}}^\alpha$ имеем два вида аппроксимаций $\mathbf{T}'^\alpha$ и $\mathbf{T}''^\alpha$, отличающихся только количеством удерживаемых членов в рядах.

Если в формулы (5.4), (5.6) подставить выражения (4.3), получим окончательный вид аппроксимаций напряжений:

$$\hat{\mathbf{T}}'^\alpha = \sqrt{a}h\sum_{k=0}^{N+1}\frac{1+2k}{2}(\overset{(k)}{M}{}^{\alpha\gamma}\mathbf{a}_\gamma + \overset{(k)}{Q}{}^\alpha\mathbf{n})P_k,$$

$$\hat{\mathbf{T}}''^\alpha = \sqrt{a}h\sum_{k=0}^{N}\frac{1+2k}{2}(\overset{(k)}{M}{}^{\alpha\gamma}\mathbf{a}_\gamma + \overset{(k)}{Q}{}^\alpha\mathbf{n})P_k,$$

$$\hat{\mathbf{T}}^3 = \sqrt{a}h(\sum_{k=0}^{N+2}\frac{1+2k}{2}\overset{(k)}{M}{}^{3\gamma}\mathbf{a}_\gamma P_k + \sum_{k=0}^{N+1}\frac{1+2k}{2}\overset{(k)}{Q}{}^3\mathbf{n}P_k).$$

6. Аппроксимации деформаций и перемещений. Рассмотрим произвольный вектор перемещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющий условиям (3.6) на границе S_u. Для простоты изложения ограничимся случаем нулевых объемных сил ($\hat{\mathbf{F}} = 0$).

Из уравнений (5.5) следует

$$\int_{V_\xi}\{(\hat{\mathbf{T}}''^i_{,i}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{n}) + (\hat{\mathbf{T}}''^i_{,i}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\}dV_\xi = 0, \tag{6.1}$$

$$dV_\xi = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3.$$

Интегрируя (6.1) по частям, находим

$$\int_{V_\xi}\{[\hat{\mathbf{T}}''\cdot(\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n}))]_{,i} + [(\hat{\mathbf{T}}''^i\cdot\mathbf{n})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})]_{,i}\}dV_\xi = \tag{6.2}$$

$$= \int_{V_\xi}\{\hat{\mathbf{T}}''\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n})]_{,i} + \hat{\mathbf{T}}''^i\cdot[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})]_{,i}\}dV_\xi.$$

Преобразуем правую часть (ПЧ) (6.2):

$$\text{ПЧ} = \int_{V_\xi}\{\hat{\mathbf{T}}''\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n})]_{,i} + \hat{\mathbf{T}}''^i\cdot[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})]_{,i}\}dV_\xi = \tag{6.3}$$

$$= \int_{V_\xi}\{\hat{\mathbf{T}}'^\alpha\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n})]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{T}}''^\alpha\cdot[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{T}}^3\cdot\mathbf{u}_{,3}\}dV_\xi =$$

$$= \int_{V_\xi}\{\hat{\mathbf{t}}^\alpha\cdot[\mathbf{n}\times(\sum_{k=0}^{N+1}[u]^k P_k\times\mathbf{n})]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^\alpha\cdot[\mathbf{n}\cdot(\sum_{k=0}^{N}[\mathbf{u}]^k P_k\cdot\mathbf{n})]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^3\cdot\mathbf{U}''_{,3}\}dV_\xi =$$

$$= \int_{V_\xi}\{\hat{\mathbf{t}}^\alpha\cdot\mathbf{U}'_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^3\cdot\mathbf{U}''_{,3}\}dV_\xi.$$

Здесь

$$\mathbf{U}' = \sum_{k=0}^{N+1}(\mathbf{n}\times([\mathbf{u}]^k\times\mathbf{n}))P_k + \sum_{k=0}^{N}(\mathbf{n}\cdot([\mathbf{u}]^k\cdot\mathbf{n}))P_k;$$

$$\mathbf{U}'' = \sum_{k=0}^{N+3}(\mathbf{n}\times([\mathbf{u}]^k\times\mathbf{n}))P_k + \sum_{k=0}^{N+2}(\mathbf{n}\cdot([\mathbf{u}]^k\cdot\mathbf{n}))P_k).$$

Подставляя в (6.3) выражения (3.1) для $\hat{\mathbf{t}}^i$ и пользуясь симметрией тензора напряжений, проведем дальнейшее преобразование:

$$\text{ПЧ} = \int_{V_\xi}\{\hat{\mathbf{t}}^\alpha\cdot\mathbf{U}'_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^3\cdot\mathbf{U}''_{,3}\}dV_\xi = \int_V\{\sigma^{\alpha k}\mathbf{э}_k\cdot\mathbf{U}'_{,\alpha} + \sigma^{3k}\mathbf{э}_k\cdot\mathbf{U}''_{,3}\}dV =$$

$$= \int_V \{\sigma^{\alpha\beta} 0{,}5[\text{э}_\beta \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}'_{,\beta}] + \sigma^{3\alpha}[\text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}''_{,3} + \text{э}_3 \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha}] + \sigma^{33}[\text{э}_3 \cdot \mathbf{U}''_{,3}]\} dV$$

$$(dV = J d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3).$$

Обозначая выражения в квадратных скобках через E_{ij}

(6.4)
$$2E_{\alpha\beta} = \text{э}_\beta \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}'_{,\beta},\ 2E_{3\alpha} = \text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}''_{,3} + \text{э}_3 \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha},$$
$$E_{33} = \text{э}_3 \cdot \mathbf{U}''_{,3},$$

окончательно получим

(6.5)
$$\text{ПЧ} = \int_V \sigma^{ij} E_{ij} dV.$$

Сопоставляя (6.4) с выражениями деформаций через перемещения (3.3), полагаем, что величины E_{ij} являются аппроксимациями деформаций ε_{ij} в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра, а векторы $\mathbf{U}'$ и $\mathbf{U}''$ соответственно представляют две аппроксимации вектора перемещений $\mathbf{u}$: одна отвечает производным по координатам ξ^α, а другая — производной по координате ξ^3.

7. **Аппроксимация граничных условий.** В левой части (ЛЧ) (6.2) проведем операцию интегрирования:

(7.1)
$$\text{ЛЧ} = \int_\Sigma \{\hat{\mathbf{T}}'^1 \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})) + (\hat{\mathbf{T}}''^1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\} d\xi^2 d\xi^3 +$$
$$+ \int_\Sigma \{\hat{\mathbf{T}}'^2 \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})) + (\hat{\mathbf{T}}''^2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\} d\xi^1 d\xi^3 +$$
$$+ \int_{S^+} \hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u} d\xi^1 d\xi^2 - \int_{S^-} \hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u} d\xi^1 d\xi^2.$$

Оценим сумму первых двух интегралов в (7.1). Для этого, пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, заменим вектор $\mathbf{u}$ на соответствующий отрезок ряда $\mathbf{U}'$. Далее, поскольку Σ — линейчатая поверхность, имеют место равенства

$$d\xi^1 d\xi^3 = \nu_2^0 / J^0 d\sigma^0,\ d\xi^2 d\xi^3 = \nu_1^0 / J^0 d\sigma^0.$$

Здесь ν_α^0 — косинусы внешней нормали ν^0 к боковой поверхности Σ в точках контура L; $J^0 = \text{э}_1^0 \cdot (\text{э}_2^0 \times \text{э}_3^0)$; $d\sigma^0 = |d\mathbf{L} \times \text{э}_3| d\xi^3$; $d\mathbf{L}$ — приращение единичного вектора, касательного к кривой L, при движении вдоль контура против часовой стрелки. В результате для суммы первых двух интегралов в (7.1) получим выражение

$$\int_\Sigma \hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}' \nu_\alpha^0 / J^0 d\sigma^0$$

$$(\hat{T}^\alpha = \mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{T}}'^\alpha \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{T}}''^\alpha \cdot \mathbf{n})).$$

В последних двух интегралах в (7.1), относящихся к лицевым поверхностям S^+ и S^-, заменим произведение $d\xi^1 d\xi^2$ по формулам

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left[\frac{\nu_3 dS}{J}\right]^+ = -\left[\frac{\nu_3 dS}{J}\right]^-,$$

где $\nu_3 = \nu \cdot \text{э}_3$; ν — внешняя нормаль к поверхности S; знаки + и − соответствуют поверхностям S^+ и S^-.

Проведя перечисленные выше преобразования, равенство (7.1) можно привести к виду

$$\text{ЛЧ} = \int\limits_{\Sigma} \frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}'}{J^0} \nu^0_\alpha d\sigma^0 + \int\limits_{S^+} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}}{J} \nu_3 dS^+ + \int\limits_{S^-} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}}{J} \nu_3 dS^-. \tag{7.2}$$

Из первого интеграла в (7.2) естественным образом следует аппроксимация граничных условий (3.6), (3.7) отрезками рядов:

$$\mathbf{U}'|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}'_*; \tag{7.3}$$

$$\frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \nu^0_\alpha}{J^0} |_{\Sigma_\sigma} = \mathbf{P}'_* \, (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma). \tag{7.4}$$

Здесь

$$\mathbf{u}'_* = \sum_{k=0}^{N+1} (\mathbf{n} \times ([\mathbf{u}_*]^k \times \mathbf{n})) P_k + \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{n} \cdot ([\mathbf{u}_*]^k \cdot \mathbf{n})) P_k;$$

$$\mathbf{P}'_* = \sum_{k=0}^{N+1} (\mathbf{n} \times ([\mathbf{P}_*]^k \times \mathbf{n})) P_k + \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{n} \cdot ([\mathbf{P}_*]^k \cdot \mathbf{n})) P_k.$$

Рассмотрим далее лицевые поверхности S^+ и S^-. Согласно граничным условиям (3.6), (3.7), на части поверхностей S^+_u и S^-_u заданы перемещения

$$\mathbf{u}|_{S^+_u} = \mathbf{u}_*, \; \mathbf{u}|_{S^-_u} = \mathbf{u}_*,$$

а на S^+_σ и S^-_σ — напряжения

$$\mathbf{t}^3 \nu_3|_{S^+_\sigma} = \mathbf{P}_*, \; \mathbf{t}^3 \nu_3|_{S^-_\sigma} = \mathbf{P}_*. \tag{7.5}$$

В последних двух интегралах правой части (7.2) в качестве поверхностных сил выступает величина $\hat{\mathbf{T}}^3 \nu_3 / J$. Поэтому естественно потребовать на S^+_σ и S^-_σ вместо (7.5) граничные условия

$$\frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \nu_3}{J} \Big|_{S^+_\sigma} = \mathbf{P}_*, \; \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \nu_3}{J} \Big|_{S^-_\sigma} = \mathbf{P}_*. \tag{7.6}$$

Пользуясь произволом в выборе вектора $\mathbf{u}$, потребуем, чтобы на лицевых поверхностях S^+_u и S^-_u выполнялись граничные условия

$$\mathbf{U}''|_{S^+_u} = \mathbf{u}_*, \; \mathbf{U}''|_{S^-_u} = \mathbf{u}_*. \tag{7.7}$$

Окончательно с учетом (7.3), (7.4), (7.6), (7.7) равенство (7.2) записывается в виде

$$\text{ЛЧ} = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{U}' d\sigma^0 + \int\limits_{\Sigma_u} \frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}'_*}{J^0} \nu^0_\alpha d\sigma^0 + \int\limits_{S^+_\sigma} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}'' dS^+ + \tag{7.8}$$

$$+ \int\limits_{S^-_\sigma} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}'' dS^- + \int\limits_{S^+_u} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}_*}{J} \nu_3 dS^+ + \int\limits_{S^-_u} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot u_*}{J} \nu_3 dS^-.$$

Сопоставляя левые и правые части равенства (6.2), которые вычисляются по формулам (6.5) и (7.8), получим

$$\int\limits_V \sigma^{ij} E_{ij} dV = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{U}' d\sigma^0 + \int\limits_{\Sigma_u} \frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}'_*}{J^0} \nu^0_\alpha d\sigma^0 + \int\limits_{S^+_\sigma} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}'' dS^+ + \tag{7.9}$$

$$+ \int_{S_\sigma^-} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}''dS^- + \int_{S_u^+} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}_*}{J} \nu_3 dS^+ + \int_{S_u^-} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}_*}{J} \nu_3 dS^- .$$

Соотношение (7.9) является условием равенства (баланса) работ внешних и внутренних сил.

8. Аппроксимация закона Гука. Закон Гука (3.4) аппроксимируем в виде соотношений

$$\sigma^{ij} = C^{ijks}E_{ks}, \tag{8.1}$$

где E_{ks} — аппроксимации тензора деформаций ε_{ks} (6.4):

$$2E_{\alpha\beta} = \text{э}_\beta \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}'_{,\beta}, \quad 2E_{3\alpha} = \text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}''_{,3} + \text{э}_3 \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha},$$
$$E_{33} = \text{э}_3 \cdot \mathbf{U}''_{,3}.$$

Представим (8.1) в векторной форме подобно равенствам (3.5):

$$\hat{\mathbf{t}}^i = J\sigma^{ij}\text{э}_j = J(\tilde{C}^{i\alpha} \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \tilde{C}^{i3} \cdot \mathbf{U}''_{,3}).$$

Отсюда для коэффициентов рядов (5.4), (5.6) находим

$$[\hat{\mathbf{t}}^i]^k = \frac{1 + 2k}{2} \int_{-1}^{1} J(\tilde{C}^{i\alpha} \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \tilde{C}^{i3} \cdot \mathbf{U}''_{,3})P_k d\xi^3. \tag{8.2}$$

9. Система уравнений для N-приближения. На основе изложенных выше результатов сформулируем систему двумерных уравнений. Длины соответствующих отрезков рядов определяются заданием числа N. Поэтому в дальнейшем получаемую систему двумерных уравнений будем называть N-приближением исходной трехмерной задачи теории упругости.

Двумерная система уравнений N-приближения состоит из:

1) уравнений равновесия (5.5), записанных в компактной форме:

$$\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{T}}'^i_{,i} \times \mathbf{n}) + \text{п} \cdot (\hat{\mathbf{T}}''^i_{,i} \cdot \text{п}) = 0; \tag{9.1}$$

2) уравнений закона Гука (8.2) в виде рядов (5.4):

$$\hat{\mathbf{T}}'^\alpha = \sum_{k=0}^{N+1} P_k \frac{1 + 2k}{2} \int_{-1}^{1} J(\tilde{C}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{\alpha 3} \cdot \mathbf{U}''_{,3})P_k d\xi^3, \tag{9.2}$$

$$\hat{\mathbf{T}}''^\alpha = \sum_{k=0}^{N} P_k \frac{1 + 2k}{2} \int_{-1}^{1} J(\tilde{C}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{\alpha 3} \cdot \mathbf{U}''_{,3})P_k d\xi^3,$$

$$\hat{\mathbf{T}}'^3 = \hat{\mathbf{T}}''^3 = \hat{\mathbf{T}}^3 =$$

$$= \mathbf{n} \times (\sum_{k=0}^{N+2} P_k \frac{1 + 2k}{2} \int_{-1}^{1} J(\tilde{C}^{3\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{33} \cdot \mathbf{U}''_{,3}) \times \mathbf{n}P_k d\xi^3) +$$

$$+ \text{п} \cdot (\sum_{k=0}^{N+1} P_k \frac{1 + 2k}{2} \int_{-1}^{1} J(\tilde{C}^{3\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{33} \cdot \mathbf{U}''_{,3}) \cdot \mathbf{n}P_k d\xi^3);$$

3) условий на лицевых поверхностях S^+ и S^- (формулы (7.6), (7.7)):

$$\mathbf{U}''|_{S_u^+} = \mathbf{u}_*, \ \mathbf{U}''|_{S_u^+} = \mathbf{u}_*, \ \frac{\hat{\mathbf{T}}^3\nu_3}{J}|_{S_\sigma^+} = \mathbf{P}_*, \ \frac{\hat{\mathbf{T}}^3\nu_3}{J}|_{S_\sigma^-} = \mathbf{P}_*. \tag{9.3}$$

Чтобы определить дифференциальный порядок системы уравнений в частных производных (9.1)—(9.3), проведем следующие рассуждения. В соотношения деформации — перемещения (6.4) коэффициенты ряда $\mathbf{U}'$ входят вместе со своими частными производными 1-го порядка относительно гауссовых координат ξ^α срединной поверхности S^0, а коэффициенты ряда $(\mathbf{U}'' - \mathbf{U}')$ входят без производных. Соответственно первую группу неизвестных коэффициентов назовем основными, а вторую — дополнительными.

Дополнительные неизвестные определяются из уравнений (9.3), которые являются граничными условиями на лицевых поверхностях. Эти уравнения представляют собой систему алгебраических уравнений относительно дополнительных неизвестных, решая которую находим выражения дополнительных неизвестных через основные.

Далее, если внести эти выражения в (9.2), получим формулы, связывающие вектор-функции $\mathbf{T}'^{\alpha}$, $\mathbf{T}''^{\alpha}$, $\mathbf{T}^3$ и основные неизвестные — коэффициенты ряда $\mathbf{U}'$. Эти формулы представляют собой линейные формы относительно коэффициентов ряда $\mathbf{U}'$ и их первых производных.

Если внести выражения для $\mathbf{T}'^{\alpha}$, $\mathbf{T}''^{\alpha}$, $\mathbf{T}^3$ в уравнения равновесия (9.1), то получим систему, состоящую из $2(N + 2) + N + 1$ скалярных уравнений, каждое из которых содержит $2(N + 2) + N + 1$ скалярных функций $(\mathbf{n} \times ([\mathbf{u}]^k \times \mathbf{n})$ $(k = \overline{0, N + 1})$, $([\mathbf{u}]^k \cdot \mathbf{n})$ $(k = \overline{0, N}))$ и их частные производные до второго порядка включительно. Таким образом, будем иметь систему $2n$-порядка для определения n функций, где

$$n = 2(N + 2) + N + 1. \tag{9.4}$$

Особо отметим, что дифференциальный порядок системы для N-приближения не зависит от вида граничных условий на лицевых поверхностях: могут задаваться как напряжения, так и перемещения.

При $N = 0$ получаем первое приближение. В этом случае из (9.4) следует, что $n = 5$, т.е. количество основных неизвестных равно пяти: трем перемещениям срединной поверхности и двум углам поворота. Соответствующий дифференциальный порядок системы (9.1)—(9.3) равен десяти.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Векуа И.Н.** Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. — М.: Наука, 1982.
2. **Иванов Г.В.** Теория пластин и оболочек. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1980.
3. **Алексеев А.Е.** Уравнения деформирования упругого слоя переменной толщины // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1987. — Вып. 81.
4. **Naghdy P.M.** Foundation of elastic shell theory // Progress in Solid Mechanics. — 1963. — Т. 4, N 2. — P. 1—90.
5. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т. 1.

г. Новосибирск *Поступила 30/IX 1993 г.*

УДК 535.529:541.64

Г.В. Пышнограй

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ МАКРОМОЛЕКУЛЯРНЫХ КЛУБКОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

В настоящее время наибольшие трудности при математическом моделировании течений растворов и расплавов линейных полимеров вызывают нелинейные эффекты. При этом нередко адекватной признается теория, лишь качественно описывающая поведение объекта исследования. Одна из причин такого положения дел, возможно, кроется в недостаточно изученной структуре измеряемых на опыте величин. Поясним сказанное на примере стационарной вязкости при растяжении.