УДК532.595.2+135

О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ «СТЕПЕННЫХ» И НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕД В ТРУБАХ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Р. М. Саттаров

(*Баку*)

Выведены дифференциальные уравнения и проанализирован процесс гидравлического удара «степенных» и нелинейно-вязкоупругих сред в трубах из вязкоупругого материала.

Вопросы гидравлического удара реальных сред в трубах неоднократно рассматривались в литературе [1–4]. В этих работах изучался гидравлический удар вязкой и линейно-вязкопластичной сред в трубах из упругого и вязкоупругого материалов. Известно [5], что в области низких и умеренных скоростей сдвига многие среды обнаруживают нелинейность кривой течения (нефть, нефтебуровые растворы, растворы и расплавы полимеров, наполненные топлива, топливные смеси, кровь и т. д.).

Следует отметить, что нежесткие трубы из реальных материалов (ствол скважины трубы из полимерных материалов, оболочка кровеносных сосудов и др.) описываются сложными реологическими уравнениями состояния для вязкоупругих сред.

В связи с этим учет влияния нелинейности рассматриваемых сред и вязкоупругих свойств материала трубы на процесс гидравлического удара представляет теоретический и практический интерес во многих инженерных задачах.

1. Одномерное движение капельной сжимаемой жидкости в трубе переменного сечения описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial x}=-f\frac{\partial p}{\partial x}-\tau\chi-\gamma f\frac{\partial z}{\partial x}; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (f\rho)}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}=0; \tag{1.2}$$

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{p-p_0}{K_ж}\right),$$

где $M=\int\limits_{(f)}\rho_i v_i df=\rho v f$ — массовый расход; $I=\int\limits_{(f)}\rho_i v_i^2 df=(1+\beta)\rho f v^2$ — проекция на ось x количества движения массы M; f— площадь поперечного сечения трубы; v_i, ρ_i — скорость и плотность в данной точке жидкости; v, ρ, p — средние в сечении скорость, плотность, давление;

z — превышение центра тяжести сечения трубы над горизонтальной плоскостью; τ — касательное напряжение; χ — смоченный периметр; γ — средний удельный вес жидкости; p_0, ρ_0, f_0 — значение p, ρ, f при установившемся движении; E — модуль упругости жидкости.

Зависимость площади поперечного сечения трубы от времени определяется следующим образом.

Обозначив внутренний радиус круглой трубы через R, а перемещение радиуса через u, получим

$$f=f_0+2\pi Ru+\pi u^2\approx f_0(1+2u/R).$$

Принимаем, что труба тонкостенная, тогда

$$\varepsilon = \frac{u}{R}; \quad \sigma \frac{p - p_0}{\delta} R,$$

где σ — напряжение; δ — толщина стенок трубы.

Воспользовавшись обобщенным реологическим уравнением вязкоупругой среды [6]

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} \sigma = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d^i}{dt^i} \varepsilon,$$

получим следующее соотношение для закона изменения f во времени:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{R}{\delta} a_i \frac{\partial^i (p - p_0)}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{2f_0} \frac{\partial^i (f - f_0)}{\partial t^i}. \tag{1.3}$$

Параметры a_i и b_i определяют свойства материала. Ниже рассматривается случай, когда $\frac{p - p_0}{K_ж} \ll 1$, тогда уравнения (1.1), (1.2) приводятся к виду

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (1 + \beta) \frac{M^2}{\rho_0 f_0} = - \gamma_0 f_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p - p_0}{\gamma_0} + z \right) - \tau \chi; \tag{1.4}$$

$$\rho_0 \frac{\partial f}{\partial t} + f_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0. \tag{1.5}$$

Принимая во внимание равенство $\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\rho_0}{K_ж} \frac{\partial p}{\partial t}$ и уравнение (1.3), из (1.5) получим

$$\sum_{i=0}^{n} \left[\left(\frac{R}{\delta} a_i + \frac{b_i}{2K_ж} \right) \frac{\partial^{i+1} p}{\partial t^{i+1}} + \frac{b_i}{2\rho_0 f_0} \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right) \right] = 0. \tag{1.6}$$

В задачах гидравлического удара касательное напряжение принимается в виде

$$\tau = \frac{C_f}{2} \rho v^2 = \frac{C_f M^2}{2 \rho_0 f_0^2},$$

где C_f — коэффициент сопротивления трения. Если пренебречь в уравнении (1.4) конвективными членами, то оно приводится к виду [1]

$$\frac{1}{f_0} \frac{\partial M}{\partial t} = - \frac{\partial (p - p_0 - \gamma_0 z)}{\partial x} - m M^2, \tag{1.7}$$

где

$$m = \frac{1}{\rho_0 f_0^2} \left[\frac{C_f}{2r} - (1 + \beta) \frac{d \ln f_0}{dx} \right]; \tag{1.8}$$

$r=\frac{f_0}{\chi}$ — гидравлический радиус.

Известно, что при ламинарном движении коэффициент сопротивления трения обратно пропорционален числу Рейнольдса и имеет вид в случае движения «степенной» жидкости [7].

$$C_f=\frac{A}{\mathrm{Re}}\left(\frac{3n+1}{4n}\right)=\frac{A\eta_a}{2\rho_0 vR}\left(\frac{3n+1}{4n}\right), \tag{1.9}$$

а в случае движения нелинейно-вязкопластичной среды [5]

$$C_f=\frac{A_1}{\mathrm{Re}'}\left[\left(\frac{4}{3\sigma}\right)^{1/n}+1\right]^n=\frac{A_1\eta_p}{2\rho_0 Rv}\left[\left(\frac{4}{3\sigma}\right)^{1/n}+1\right]^n, \tag{1.10}$$

где A, A_1 — постоянные числа; η_a — кажущаяся вязкость; η_p — аналог пластической вязкости;

$$\beta_0=\frac{r_0}{R},\quad \sigma=\frac{1}{\beta_0}\left[1-\left(\frac{4}{3}\beta_0\right)^{1/n}\right].$$

Постоянные величины A и A_1 для нестационарного режима движения должны определяться при условиях неустановившегося движения. Однако в дальнейшем в целях упрощения изложения принимается, что C_f для неустановившегося движения является той же функцией Рейнольдса, что и для установившегося.

Подставив (1.9), (1.10) в (1.8), а полученное выражение в (1.7), получим

$$\frac{1}{f_0}\frac{\partial M}{\partial t}=-\frac{\partial(p-p_0+\gamma_0 z)}{dx}-m_jM+qM^2, \tag{1.11}$$

при $j=1$ уравнение (1.11) описывает движение «степенной» жидкости, при $j=2$ уравнение (1.11) описывает движение нелинейно-вязкопластичной среды:

$$m_1=\frac{16\eta_a}{4\rho_0 f_0 Rr}\left(\frac{3n+1}{4n}\right);$$

$$m_2=\frac{16\eta_p}{4\rho_0 f_0 Rr}\left[\left(\frac{4}{3\sigma}\right)^{1/n}+1\right]^n;$$

$$q=\frac{1+\beta}{\rho_0 f_0^2}\frac{d\ln f_0}{\partial x}.$$

Введем в рассмотрение разность $P=p-p_0$, тогда дифференциальные уравнения (1.6), (1.11) запишутся

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{R}{\delta}a_i+\frac{b_i}{2K_{ж}}\right)\frac{\partial^{i+1}P}{\partial t^{i+1}}+\frac{b_i}{2\rho_0 f_0}\frac{\partial^i}{\partial t^i}\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)\right]=0;\\ \frac{1}{f_0}\frac{\partial M}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial x}-m_jM+qM^2.\end{cases} \tag{1.12}$$

Система уравнений (1.12) описывает гидравлический удар при движении «степенной» ($j=1$) и нелинейно-вязкопластичной ($j=2$) сред в трубах из вязкоупругого материала.

Для таких задач начальные и граничные условия могут быть записаны в виде

$$(1.13)\qquad \begin{aligned} & p(x,0)=0; \\ & \frac{\partial p}{\partial t}(x,0)=0; \quad \frac{\partial^n p}{\partial t^n}=0; \\ & M(x,0)=0; \ p(0,t)=\varphi(t); \\ & M(l,t)+h\frac{\partial M}{\partial x}(l,t)=F(t), \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$, $F(t)$ — заданные функции; h — постоянная.

В случае постоянного поперечного сечения трубы, т. е. при $q=0$, система (1.12) относительно $M(x, t)$ запишется в виде

$$(1.14)\qquad \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{b_i}{2\rho_0 f_0}\frac{\partial^i}{\partial t^i}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{R}{\delta}a_i+\frac{b_i}{2K_{\text{ж}}}\right)\frac{\partial^{i+1}}{\partial t^{i+1}}\left(\frac{1}{f_0}\frac{\partial M}{\partial t}+m_j M\right)\right]=0.$$

Решение дифференциального уравнения (1.14) при начальных и граничных условиях (1.13) может быть осуществлено численными методами или, например, методом преобразования Лапласа.

Отметим, что полученная система дифференциальных уравнений (1.12) в частных случаях сводится к известным в литературе задачам гидравлического удара [1-4].

2. Рассмотрим неустановившееся движение жидкости в вязкоупругой трубе постоянного сечения, когда расход жидкости M представляет собой гармоническую функцию времени заданной частоты в начале трубы; при этом на конце трубы давление постоянно. В момент, достаточно удаленный от начального, влияние начальных условий практически не сказывается на распределении расхода и давления. Поставим задачу об отыскании решения уравнения (1.14), удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$(2.1)\qquad M(0,t)=M_0 e^{i\omega t};\quad \frac{\partial M}{\partial x}(l,t)=0.$$

Решение уравнения (1.14) при граничных условиях (2.1) имеет вид

$$(2.2)\qquad M(x,\ t)=X_1(x)\cos\omega t+X_2(x)\sin\omega t,$$

где $X_1(x)=\operatorname{Re}\{X(x)\}$; $X_2(x)=\operatorname{Im}\{X(x)\}$;

$$X(x)=\frac{M_0}{\exp(\alpha l)+\exp(-\alpha l)}\{\exp[-\alpha(l-x)]+\exp[\alpha(l-x)]\};$$

$$\alpha^2=\frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{R}{\delta}a_k+\frac{b_k}{2K_{\text{ж}}}\right)\left(\frac{1}{f_0}i^{k+2}\omega^{k+2}+i^{k+1}\omega^{k+1}m_j\right)}{\sum_{k=0}^{n} i^k\omega^k\frac{b_k}{2\rho_0 f_0}}.$$

Имея конкретное значение n, можно выражения $X_1(x)$ и $X_2(x)$ представить в явном виде. Используя полученное решение (2.2), можно выяснить влияние вязкоупругих свойств материала трубы, а также физико-механических свойств движущейся среды на затухание гидравлического удара.

3. Для выяснения влияния физико-механических свойств движущейся среды, а также вязкости материала на затухание гидравлического удара рассмотрим частный случай реологического уравнения вязкоупругой среды, когда $a_0=1$; $a_1 = \frac{2}{3}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\mu'$; $b_0=E$; $b_1=2\mu'(1+\nu)$; $a_i=b_i=0$ при $i \geqslant 2$, где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; μ' — коэффициент вязкости.

Тогда дифференциальное уравнение (2.1) после несложных преобразований представится в виде

$$L\frac{\partial^3 M}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}\left(1 + \frac{a}{rf_0}L\right) + m_j f_0 \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + K_2\frac{\partial^3 M}{\partial x^2 \partial t}, \tag{3.1}$$

где

$$L = \frac{2\mu'(1+\nu)}{E}\,\frac{1 + \frac{2}{3}\frac{R}{\delta}\frac{(1-2\nu)}{E}K_ж}{1 + \frac{2R}{\delta}\frac{K_ж}{E}},$$

$$a = \sqrt{\frac{K_1}{\rho_0}};\quad \frac{1}{K_1} = \frac{1}{K_ж} + \frac{2R}{E\delta};$$

$$K_2 = \frac{2\mu'(1+\nu)}{E}.$$

Предположим, что расход жидкости M в некотором сечении представляет собой периодическую функцию во времени, тогда решение дифференциального уравнения (3.1) можно искать в виде

$$M = Ae^{i\omega t + \alpha x}.$$

Подставив последнее выражение в уравнение (3.1), для определения α получим соотношение

$$-L\omega^3 i - \left(1 + \frac{a}{rf_0}L\right)\omega^2 + m_j f_0 i\omega = \alpha^2 + K_2\alpha\lambda i,$$

откуда имеем

$$\alpha = i\omega\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{a}{rf_0}L\right) + Li\omega - m_j f_0\frac{i}{m}}{1 + iK_2\lambda}}.$$

Если L, K_2, f_0, m_j малы, то приближенно получим

$$\frac{\alpha}{\omega} = i\left\{1 + i\omega L - \frac{im_j f_0}{2\omega} - \frac{iK_2\omega}{2}\right\}. \tag{3.2}$$

Анализ параметра m_1 в зависимости от n показывает, что при прочих равных условиях в случае $n < 1$ значение m_1 всегда больше своего ньютоновского аналога, в случае $n > 1$ — меньше. Значение m_2 с увеличением β_0 и n увеличивается относительно бингамовского аналога.

Из (3.2) видно следующее: а) при движении «степенной» жидкости для псевдопластичных сред ($n < 1$) затухание удара происходит значительно быстрее, чем для ньютоновской жидкости $n=1$, а тем более, чем для дилантного материала $n > 1$;

б) при движении нелинейно-вязкопластичной среды затухание удара происходит быстрее для тех сред, у которых выше предел текучести $\tau_0(\beta_0)$ и параметр нелинейности n.

Коэффициент затухания пропорционален для «степенной» жидкости

$$\frac{m_1 f_0}{2\omega} = \frac{16\eta_a}{8\rho_0\omega Rr}\left(\frac{3n+1}{4n}\right),$$

для нелинейно-вязкопластичной среды

$$\frac{m_2 f_0}{2\omega} = \frac{16\eta_p}{8\rho_0\omega Rr}\left[\left(\frac{4}{3\sigma}\right)^{1/n} + 1\right]^n.$$

Отметим также, что наличие вязкости материала трубы приводит к затуханию удара. В этом случае коэффициент затухания будет пропорционален

$$(K_2 - L)\,\omega = \omega\,\frac{4\mu'(1+\theta)^2}{E^2}\,\frac{\frac{2R}{\delta}K_{ж}}{1+\frac{2R}{\delta}\frac{K_{ж}}{E}}.$$

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы при решении отдельных конкретных задач, связанных с бурением нефтяных скважин, транспортом неньютоновских сред в трубах из полимерного материала, и, по всей вероятности, при изучении особенности кровообращения в организме человека, подвергающегося действию длительных или кратковременных (ударных) перегрузок [8].

Поступила 19 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., Гостехиздат, 1951.
2. *Гинзбург И. П., Гриб А. А.* Гидравлический удар реальных жидкостей в сложных трубопроводах.— «Вестн. ЛГУ», 1954, вып. 8.
3. *Гинзбург И. П.* Гидравлический удар в трубах из упруговязкого материала.— «Вестн. ЛГУ», 1956, вып. 3, № 13.
4. *Гасанов Г. Т.* О гидравлическом ударе при движении вязкопластичной среды.— «Прикладная механика», 1970, т. VI, вып. 10.
5. *Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориславец В. М.* Реодинамика и теплообмен нейлинейно-вязкопластичных материалов. Минск, «Наука и техника», 1970.
6. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
7. *Weltmann R. N.* Correlation of friction factors in non-Newtonian fluids.— «Industr. and eng. Chem.», N. Y., 1956, vol. 48, p. 386.
8. *Вольмир А. С., Герштейн М. С.* Проблемы динамики оболочек кровеносных сосудов. Механика полимеров, 1970, № 2.