УДК 551.466.3

К ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ С ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

А. А. Зайцев, А. И. Руденко*

Атлантическое отделение Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН, 236000 Калининград

* Калининградский государственный технический университет, 236000 Калининград

E-mail: rudenko1975@bk.ru

В рамках двумерной теории и эйлерова подхода изучаются строение и характеристики нелинейных стационарных волн на поверхности горизонтального сдвигового течения идеальной однородной несжимаемой жидкости конечной глубины с линейным профилем скорости. Волновые движения предполагаются безвихревыми. Предложена модификация первого метода Стокса, позволяющая алгебраическими средствами вычислять члены рядов теории возмущений. Получены и проанализированы нелинейные дисперсионные соотношения для волн, бегущих вверх, и для волн, бегущих вниз по потоку.

Ключевые слова: стационарные нелинейные волны, идеальная жидкость, сдвиговое течение, первый метод Стокса, нелинейные дисперсионные соотношения.

Введение. В настоящее время имеется большое количество публикаций, посвященных анализу нелинейных, в том числе стационарных волн на сдвиговых течениях (см., например, работу [1] и приведенную в ней библиографию). Однако представляющие наибольший интерес вывод и анализ нелинейного дисперсионного соотношения отсутствуют даже для простейшего случая волн на течении с линейным профилем скорости. Точнее, в [1] такое соотношение приведено для более общего случая в виде громоздкой интегральной формулы, но получение по ней конкретного результата представляется не менее сложной задачей, чем исходная.

Цель данной работы — в рамках эйлерова подхода изучить двумерные волновые движения жидкости конечной глубины с линейным профилем средней скорости, при котором становится возможным, как и в отсутствие среднего течения (т. е. в задаче Стокса), существование безвихревых волновых движений. Для решения поставленной задачи используется модификация первого метода Стокса [2–5]. Особенностью нашего подхода является приведение двумерной задачи к одномерной. Упрощает эту процедуру введение вспомогательных функций. Кроме того, используются ряды теории возмущений, аналогичные рядам Стокса. Для низших приближений получены и решены линейные уравнения. Ранее эта задача рассматривалась в работе [6], в которой значительное место уделено преобразованиям нелинейных граничных условий, а изложение процедуры решения практически полностью отсутствует, что делает невозможным ее анализ. К тому же автор работы [6] игнорирует факт существования двух типов волн: бегущих вверх и бегущих вниз по потоку, которые имеют различную структуру. Поэтому данную задачу требуется решить заново.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда INTAS (код проекта 01-460).

Постановка задачи. Рассмотрим горизонтальное течение идеальной несжимаемой однородной жидкости конечной глубины h с линейным профилем средней скорости: $\bar{u} = by$, $\bar{v} = 0$, $b = \mathrm{const}$. Предположим, что на свободной поверхности сформировалась система стационарных нелинейных волн, движущихся с постоянной скоростью c. Используется прямоугольная система координат (x, y), где ось x совмещена со средним горизонтальным уровнем, а ось y направлена вертикально вверх. Горизонтальную и вертикальную компоненты скорости частиц жидкости обозначим $\bar{u} + u$ и v, где u и v — значения этих компонент, обусловленные волновым движением. Давление, плотность и профиль свободной поверхности обозначим через p, ρ и η соответственно. В случае стационарных волн динамические переменные зависят от координат и времени следующим образом: $\eta = \eta(x - ct)$, $(u, v, p) = (u, v, p)(x - ct, y)$. Выбор горизонтальной оси ведет к условию нулевого среднего для профиля волны: $\langle \eta(x) \rangle = 0$.

Уравнения Эйлера динамики идеальной несжимаемой однородной жидкости, дополненные условием потенциальности волнового движения, имеют вид

$$\begin{gathered} \rho((u + by - c)u_x + v(b + u_y)) + p_x = 0, \\ \rho((u + by - c)v_x + vv_y + g) + p_y = 0; \end{gathered} \tag{1}$$

$$u_x + v_y = 0, \qquad u_y - v_x = 0. \tag{2}$$

Здесь и далее $\eta = \eta(x)$, $(u, v, p) = (u, v, p)(x, y)$, т. е. сделано переобозначение $x - ct \to x$.

На свободной поверхности $y = \eta(x)$ имеют место два граничных условия: $(u^s + b\eta - c)\eta' - v^s = 0$, $p^s = 0$; здесь и далее индекс s указывает, что берутся значения на свободной поверхности, например $p^s = p(x, \eta(x))$. Граничным условием на дне служит условие непротекания $v(x, -h) = 0$.

Кроме того, принимаем условия периодичности

$$\eta(x + L) = \eta(x), \qquad u(x + L, y) = u(x, y), \qquad v(x + L, y) = v(x, y)$$

(L — длина волны) и нулевого среднего (по x): $\langle \eta(x) \rangle = 0$.

Введем функцию тока $\psi = \psi(x, y)$, определив ее равенствами $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Тогда уравнения (2) сводятся к уравнению Лапласа

$$\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0.$$

Для функции тока также выполняются условия периодичности и нулевого среднего.

Уравнения (1), (2) допускают первый интеграл, который выражается через функцию тока следующим образом:

$$P = \rho(-V(x, y) + b(y\psi_y - \psi) + gy) + p = \mathrm{const},$$

где $V(x, y) = c\psi_y - 2^{-1}(\psi_x^2 + \psi_y^2)$. Этот интеграл является обобщением интеграла Бернулли на случай течений с постоянной завихренностью. Величина $\Psi(x, y) = \psi(x, y) - cy + 2^{-1}by^2$ — полная функция тока в системе координат, движущейся вместе с волной. В этой системе координат движение будет установившимся, поэтому на свободной поверхности величина Ψ принимает постоянное значение:

$$\Psi^s = \psi^s(x) - c\eta(x) + 2^{-1}b\eta^2(x) = Q = \mathrm{const}\,.$$

В силу изложенного для граничных условий имеем

$$\begin{gathered} -c\eta(x) + \psi^s(x) + 2^{-1}b\eta^2(x) = Q, \\ -V^s(x) + b(\eta(x)\psi_y(x, \eta(x)) - \psi^s(x)) + g\eta(x) = P, \qquad P = \mathrm{const}, \\ \psi(x, -h) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Несложно получить решение рассматриваемой задачи в линейном приближении:

$$\eta(x) = a\cos(kx), \qquad \psi(x,y) = \mathrm{sh}^{-1}(kh)\, c_0 a\cos(kx)\,\mathrm{sh}\,(k(y+h)), \qquad k = 2\pi/L,$$

где c_0 — фазовая скорость линейных волн, которая удовлетворяет уравнению

$$k\,\mathrm{cth}\,(kh)c_0^2 + bc_0 - g = 0.$$

Это уравнение имеет два действительных корня с противоположными знаками. Им соответствуют две синусоидальные волны, бегущие вниз и вверх по потоку.

Приведение к одномерной задаче. Введем новые вспомогательные функции $\psi(x) = \psi(x,0)$, $\xi(x) = \psi_y(x,0)$, $H(x) = \eta^2(x)$, $V(x) = V_y(x,0)$, используя которые можно перейти от исходной двумерной задачи к одномерной и, кроме того, упростить процедуру расчета последовательных приближений. Сделаем некоторые замечания:

1. Обозначение $\psi(x)$ совпадает с обозначением функции тока, но это не должно приводить к недоразумению, так как далее функция тока не рассматривается.

2. Соответствие $\psi(x) \to \xi(x)$ является линейной операцией W, которая позволяет однозначно определить $\xi(x)$ по $\psi(x)$: $\xi(x) = W\psi(x)$; в частности, при $\psi(x) = \cos(kx)$ получаем $\xi(x) = k\,\mathrm{cth}\,(kh)\cos(kx)$. В силу линейности из этого частного случая легко получить значение $\xi(x)$ для любого тригонометрического многочлена.

Используя новые функции и оператор W, получаем уравнения одномерной задачи (с точностью до 3-го приближения)

$$\begin{gathered}
\xi(x) = W\psi(x),\\
g\eta(x) - b\psi(x) - c\xi(x) + 2^{-1}(\xi^2(x) + (\psi'(x))^2) - \eta(x)V(x) + 2^{-1}cH(x)\xi''(x) = P,\\
-c\eta(x) + \psi(x) + \eta(x)\xi(x) + 2^{-1}H(x)(b - \psi''(x)) = Q,\\
H(x) = \eta^2(x), \qquad V(x) = (\xi(x) - c)\psi''(x) - \psi'(x)\xi'(x).
\end{gathered} \tag{4}$$

При выводе этих уравнений использованы разложения уравнений (3) в ряды Тейлора по степеням $\eta(x)$.

Вывод и решение систем уравнений последовательных приближений. Приближенное решение одномерной задачи ищется в виде

$$\begin{gathered}
c = c_0(1 + c_1(ka)^2), \qquad Q = k^{-1}c_0Q_1(ka)^2, \qquad P = k^{-1}c_0P_1(ka)^2,\\
\eta(x) = k^{-1}(\eta_1(x)(ka) + \eta_2(x)(ka)^2 + \eta_3(x)(ka)^3), \qquad \eta_1(x) = \cos(kx),\\
\psi(x) = k^{-1}c_0(\psi_1(x)(ka) + \psi_2(x)(ka)^2 + \psi_3(x)(ka)^3),\\
\xi(x) = c_0(\xi_1(x)(ka) + \xi_2(x)(ka)^2 + \xi_3(x)(ka)^3),\\
H(x) = k^{-2}H_2(x)(ka)^2 + k^{-2}H_3(x)(ka)^3,\\
V(x) = kc_0^2(V_1(x)(ka) + V_2(x)(ka)^2)
\end{gathered}$$

(a — амплитуда основной гармоники в профиле волны). Здесь учтено решение линейной задачи. После подстановки этих соотношений в уравнения (4) и расщепления по степеням ka получаем системы трех низших приближений:

— систему уравнений 1-го приближения

$$\begin{gathered}
\xi_1(x) = k^{-1}W\psi_1(x), \qquad (Rkc_0 + b)\eta_1(x) - b\psi_1(x) - kc_0\xi_1(x) = 0,\\
-\eta_1(x) + \psi_1(x) = 0, \qquad \eta_1(x) = \cos(kx), \qquad R = \mathrm{cth}\,(kh);
\end{gathered}$$

— систему уравнений 2-го приближения

$$\xi_2(x) = k^{-1}W\psi_2(x), \qquad (Rkc_0 + b)\eta_2(x) - b\psi_2(x) - kc_0\xi_2(x) = A_2(x) + P_1,$$
$$-\eta_2(x) + \psi_2(x) = B_2(x) + Q_1, \qquad H_2(x) = \eta_1^2(x), \qquad V_1(x) = -k^{-2}\psi_1''(x),$$

где

$$A_2(x) = -2^{-1}kc_0(\xi_1^2(x) + k^{-2}(\psi_1'(x))^2) + kc_0\eta_1(x)V_1(x),$$
$$B_2(x) = -\eta_1(x)\xi_1(x) - 2^{-1}(kc_0)^{-1}bH_2(x);$$

— систему уравнений 3-го приближения

$$\xi_3(x) = k^{-1}W\psi_3(x), \qquad (Rkc_0 + b)\eta_3(x) - b\psi_3(x) - kc_0\xi_3(x) - kc_0c_1\xi_1(x) = A_3(x),$$
$$-\eta_3(x) + \psi_3(x) - c_1\eta_1(x) = B_3(x), \qquad V_2(x) = k^{-2}(-\psi_2''(x) - \psi_1'(x)\xi_1'(x) + \psi_1''(x)\xi_1(x)),$$

где

$$A_3(x) = -kc_0(\xi_1(x)\xi_2(x) + k^{-2}\psi_1'(x)\psi_2'(x)) + kc_0(\eta_2(x)V_1(x) + \eta_1(x)V_{12}(x)) -$$
$$- 2^{-1}k^{-1}c_0H_2(x)\xi_1''(x) + 2^{-1}k^{-2}bH_2(x)\psi_1''(x),$$
$$B_3(x) = -\eta_2(x)\xi_1(x) - \eta_1(x)\xi_2(x) + 2^{-1}k^{-2}H_2(x)\psi_1''(x).$$

Основные неизвестные функции в каждой из этих систем уравнений должны удовлетворять условиям периодичности и нулевого среднего. Решение системы уравнений 1-го приближения находится по формулам

$$\eta_1(x) = \cos(kx), \qquad \psi_1(x) = \cos(kx), \qquad \xi_1(x) = R\cos(kx).$$

Перейдем к изложению процедуры решения систем последовательных приближений. Решение систем уравнений 2-го и 3-го приближений начинается с определения функций $H_2(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$.

В случае 2-го приближения получаем тригонометрические представления

$$H_2(x) = 2^{-1} + 2^{-1}\cos(2kx), \qquad V_1(x) = \cos(kx),$$
$$A_2(x) = 2^{-1}A_{20} + A_{21}\cos(2kx), \qquad B_2(x) = 2^{-1}B_{20} + B_{21}\cos(2kx), \tag{5}$$

где

$$A_{20} = -2^{-2}(R^2 - 1)kc_0, \qquad A_{21} = -2^{-2}(R^2 - 3)kc_0,$$
$$B_{20} = -2^{-1}(kc_0)^{-1}(2Rkc_0 + b), \qquad B_{21} = 2^{-1}B_{20}. \tag{6}$$

Решение уравнений 2-го приближения ищется в аналогичной форме:

$$\eta_2(x) = \eta_{21}\cos(2kx), \qquad \psi_2(x) = \psi_{21}\cos(2kx), \qquad \xi_2(x) = \xi_{21}\cos(2kx). \tag{7}$$

Тогда условия периодичности и нулевого среднего выполняются автоматически. После подстановки (5), (7) в систему уравнений 2-го приближения для коэффициентов этих представлений и P_1, Q_1 получаем алгебраическую систему, решая которую находим

$$P_1 = -2^{-1}A_{20}, \qquad Q_1 = -2^{-1}B_{20}, \qquad \eta_{21} = -(kc_0)^{-1}R(A_{21} + (Rkc_0 + b)B_{21}) - B_{21},$$
$$\psi_{21} = \eta_{21} + B_{21}, \qquad \xi_{21} = 2\,\mathrm{cth}\,(2kh)\psi_{21}.$$

Используя равенства (6), вычисляем значения констант P_1, Q_1 и коэффициентов тригонометрических многочленов:

$$P_1 = 2^{-2}(R^2 - 1)kc_0, \qquad Q_1 = 2^{-2}(kc_0)^{-1}(2Rkc_0 + b),$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{21} &= 2^{-2}(kc_0)^{-2}(R(3R^2-1)(kc_0)^2 + (3R^2+1)bkc_0 + Rb^2),\\
\psi_{21} &= 2^{-2}(kc_0)^{-2}R(3(R^2-1)(kc_0)^2 + 3Rbkc_0 + b^2),\\
\xi_{21} &= 2^{-1}(kc_0)^{-2}(R^2+1)(3(R^2-1)(kc_0)^2 + 3Rbkc_0 + b^2).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Аналогично получаем решение системы уравнений для 3-го приближения. Находим тригонометрические представления

$$
A_3(x) = A_{30}\cos(kx) + A_{31}\cos(3kx), \qquad B_3(x) = B_{30}\cos(kx) + B_{31}\cos(3kx),
$$
$$
\eta_3(x) = \eta_{31}\cos(3kx),
$$
$$
\psi_3(x) = \psi_{30}\cos(kx) + \psi_{31}\cos(3kx), \qquad \xi_3(x) = \xi_{30}\cos(kx) + \xi_{31}\cos(3kx).
$$

Расчетные формулы для c_1 и для коэффициентов этих представлений следующие:

$$
c_1 = -(2Rkc_0 + b)^{-1}(A_{30} + (Rkc_0 + b)B_{30}),
$$
$$
A_{30} = 2^{-3}(8kc_0\psi_{21} - 5Rkc_0 + 4kc_0\eta_{21} - 4Rkc_0\xi_{21} - 3b),
$$
$$
A_{31} = 2^{-3}(4kc_0\eta_{21} + 24kc_0\psi_{21} - 4Rkc_0\xi_{21} + R - b),
$$
$$
B_{30} = -2^{-3}(3 + 4(R + (kc_0)^{-1}b)\eta_{21}), \qquad B_{31} = B_{30} + 2^{-2},
$$
$$
\psi_{30} = c_1 + B_{30}, \qquad \xi_{30} = R\psi_{30},
$$
$$
\eta_{31} = -(kc_0)^{-1}D_3^{-1}(A_{31} + (Rkc_0 + b)B_{31}) - B_{31},
$$
$$
\psi_{31} = \eta_{31} + B_{31}, \qquad \xi_{31} = 3\,\mathrm{cth}\,(3kh)\psi_{31}, \qquad D_3 = 2^3R(3R^2+1)^{-1}.
$$

С помощью равенств (6), (8) находим величину c_1 и значения коэффициентов тригонометрических многочленов:

$$
\begin{aligned}
c_1 = 2^{-3}(2R + b_0)^{-1}(R(9R^4 - 10R^2 + 9) + 2(9R^4 - 2R^2 + 1)b_0 +\\
+ 3R(5R^2+1)b_0^2 + 2(3R^2+1)b_0^3 + Rb_0^4),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $b_0 = b/(kc_0)$.

Используя формулу (9), получаем нелинейные дисперсионные соотношения для обоих типов волн:

$$
\begin{aligned}
c^{(i)} = c_0^{(i)}(1 + 2^{-3}(2R + b_0)^{-1}(R(9R^4 - 10R^2 + 9) + 2(9R^4 - 2R^2 + 1)b_0 +\\
+ 3R(5R^2+1)b_0^2 + 2(3R^2+1)b_0^3 + Rb_0^4)(ka)^2)
\end{aligned}
$$

(при $i = 1$ волна движется вверх по потоку, при $i = 2$ — вниз по потоку). В случае $b = 0$ эти соотношения переходят в дисперсионное соотношение Стокса [5]

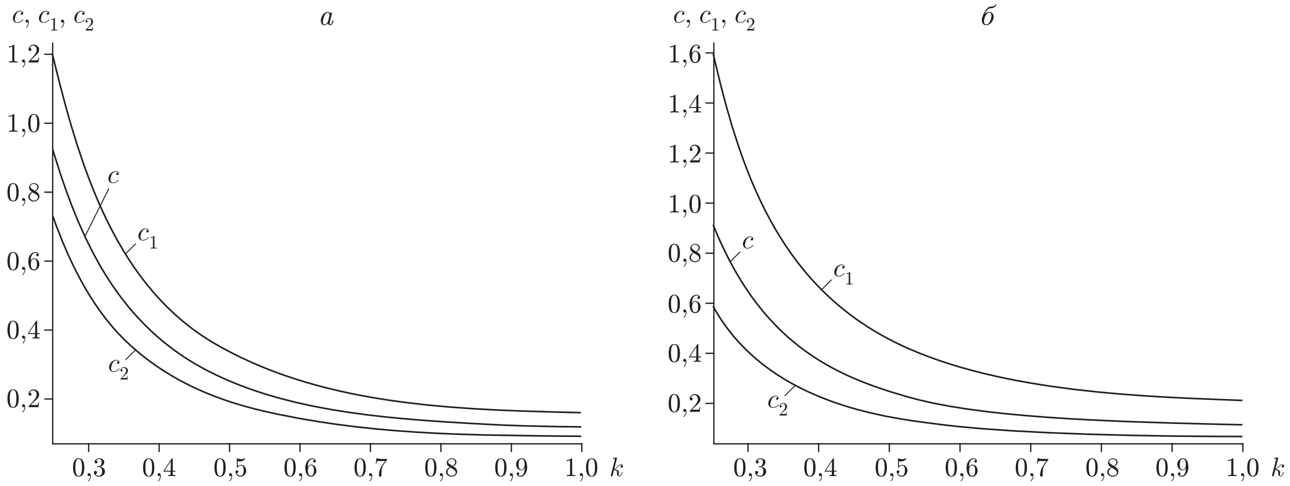
$$
c = \sqrt{g(kR)^{-1}}\,(1 + 2^{-4}(9R^4 - 10R^2 + 9)(ka)^2).
$$

Результаты расчета нелинейной поправки к скорости стационарных волн на течении и сравнения ее с поправкой для скорости волн Стокса, представленные на рисунке, позволяют сделать следующие выводы:

— в присутствии сдвигового течения абсолютные значения скорости обеих волн (бегущих вниз и бегущих вверх по потоку) возрастают;

— увеличение градиента течения ведет к росту абсолютных значений скорости волн;

— влияние течения растет в длинноволновой области и уменьшается в коротковолновой.



Зависимости нелинейной поправки к скорости волны от волнового числа k для волн Стокса (c) и волн на течении, бегущих вниз (c_1) и бегущих вверх (c_2) по потоку:
а — $b = 0{,}5$; *б* — $b = 1{,}0$

Заключение. Отметим особенности использованной методики. Исходная математическая постановка задачи сформулирована с помощью динамической функции тока, а не через потенциал скоростей, как это делалось прежде (начиная со Стокса), что упрощает граничные условия. Сведение двумерной задачи к одномерной позволило существенно упростить процедуру решения и придать основным результатам компактную форму.

Предложенным способом можно решать задачи о строении и характеристиках стационарных нелинейных поверхностных и внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости, в которой слои движутся в горизонтальном направлении, причем в каждом слое профиль средней скорости линейный.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрашкин А. А., Зенькович Д. А.** Вихревые стационарные волны на сдвиговом потоке // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. № 1. С. 35–45.
2. **Stokes G. G.** On the theory of oscillatory waves // Cambridge Trans. 1847. V. 8. P. 441–473.
3. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
4. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
5. **Уизем Дж. Б.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. **Сунь Цао.** Поведение поверхностных волн на линейно изменяющемся течении // Исследование по механике. № 3. М.: Оборонгиз, 1959. С. 66–84.

Поступила в редакцию 27/VII 2004 г.,
в окончательном варианте — 20/VII 2005 г.