

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ В ГАЗОВЗВЕСИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ.

I. ОДНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Ю. А. Гостеев, А. В. Федоров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск, gosteev@itam.nsc.ru

Проведен анализ и обобщены опытные данные по горению частиц магния в кислородсодержащих газовых смесях, что позволило разработать полуэмпирическую математическую модель, которая интегрально учитывает влияние на горение начального размера частицы, давления и скорости окисляющего потока. В одномерном приближении исследован процесс распространения пламени в аэрозвеси мелких частиц магния. Для этой цели развита дискретно-континуальная модель распространения пламени в газовзвеси металлических частиц. Численно определено существование пределов распространения пламени в сосуде, обусловленных теплотерями в окружающую среду и пространственной неоднородностью распределения частиц дисперсной фазы, исследовано влияние неравномерности и бидисперсности одномерного ансамбля частиц на характеристики пламени.

Ключевые слова: металлические частицы, газовзвесь, пламя, дискретно-континуальная модель, математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическому изучению распространения пламени в аэродисперсных системах, содержащих горючие частицы, посвящен ряд исследований (см., например, [1–4]). Большинство из них базируется на континуальном одномерном подходе к количественному описанию характеристик дисперсной фазы. Достигнуты успехи в предсказании нормальной скорости стационарного пламени с применением радиационных [2] и смешанных, кондуктивно-радиационных, моделей [3]. Проведены исследования нестационарных режимов горения смесей горючих газов и горючих частиц [4].

В то же время существует и развивается дискретный подход к описанию характеристик твердой фазы. Применительно к обсуждаемой проблеме привлекательность дискретно-континуальных моделей состоит в том, что распространение пламени в газовзвеси изучается путем исследования характеристик волны горения в системе конечных тел, образованной частицами и стенками сосуда. В данной работе развита одна из подобных моделей и показана

ее применимость к описанию волн горения в аэрозвесах частиц магния.

1. О МОДЕЛИ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ МЕТАЛЛА

При математическом моделировании процессов горения в газовзвесах частиц металлов возникает ряд проблем, одной из которых является обоснованный выбор определяющих соотношений, в частности — кинетической модели гетерогенных и гомогенных химических реакций, протекающих на межфазных поверхностях и в объеме смеси. Как известно, эта проблема решается в каждом конкретном случае построением либо подробной (многостадийной), либо упрощенной (приведенной, глобальной) кинетической схемы.

В [5] изложена математическая модель движения газовзвеси реагирующих металлических частиц и предложено ее замыкание для стадии предпламенного окисления (воспламенения) частиц на основе приведенной кинетики. Конкретизируем источниковый член в модели [5] для стадии горения частиц.

Следуя [5], рассмотрим смесь частиц металла и газа, состоящего из окислителя (индекс 11), инертного компонента (12) и газообразных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 03-01-00453).

продуктов горения (13). Частицы имеют сферическую форму и состоят из металлического ядра (индекс 22) радиуса r_p и оксидной оболочки (23) с внешним радиусом R_p , при этом толщина оксидной пленки $h_p = R_p - r_p$. На межфазной поверхности последовательно протекают реакции воспламенения и горения в соответствии с общим стехиометрическим уравнением

$$\hat{\nu}_{11} + \hat{\nu}_{22} = \hat{\nu}_{13} + \hat{\nu}_{23}, \quad (1)$$

где $\hat{\nu}_{ij} = \nu_{ij}\mu_{ij}$, ν_{ij} и μ_{ij} — стехиометрический коэффициент и молекулярная масса ij -го компонента.

Напомним некоторые свойства модели [5]. С использованием законов сохранения массы металла

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} + \text{div} \rho_{22} \vec{U}_2 = -\hat{\nu}_{22} J,$$

твердого оксида

$$\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} + \text{div} \rho_{23} \vec{U}_2 = \hat{\nu}_{23} J$$

и числа частиц n в единице объема смеси

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} n \vec{U}_2 = 0,$$

где ρ_{2i} — средние плотности компонентов, \vec{U}_2 — скорость дисперсной фазы, можно получить связь между R_p и r_p в виде

$$R_p^3 - R_{p,0}^3 = a(r_p^3 - r_{p,0}^3),$$

а также выражение для обменного члена J :

$$J = -\frac{3\rho_{22}}{\hat{\nu}_{22}r} \frac{d_2 r_p}{dt}, \quad \frac{d_2}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}_2 \cdot \nabla.$$

Здесь параметр $a = 1 - (\hat{\nu}_{23}/\hat{\nu}_{22})(\rho_{22}^0/\rho_{23}^0)$ определяет уменьшение полного объема частицы в ходе выгорания металлического ядра: в конечном состоянии (при $r_p = r_{p,fin} = 0$) радиус оксидного остатка $R_{p,fin} \approx \sqrt[3]{1-a} r_{p,0}$ (при условии, что начальная толщина пленки $h_{p,0}$ много меньше начального полного радиуса $R_{p,0}$); ρ_{22}^0 и ρ_{23}^0 — плотности металла и оксида; нижний индекс 0 относится к начальному состоянию газозвеси.

Для замыкания модели следует задать величину $d_2 r_p/dt$ как функцию средних параметров смеси. Формулировке определяющих соотношений в случае окисления частицы магния посвящен следующий параграф.

2. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ОКИСЛЕНИЯ ЧАСТИЦЫ МАГНИЯ

Перейдем к построению математической модели окисления частицы магния в динамических условиях в кислородсодержащих газовых смесях, которая учитывает влияние концентрации кислорода, давления и скорости газового потока на скорость выгорания металла. При этом будем использовать данные [6] (крупные частицы диаметром $d_{p,0} = 3 \div 6$ мм, скорость окисляющего потока $0 \div 90$ м/с) и [7] ($d_{p,0} = 100 \div 1000$ мкм, горение в неподвижном воздухе).

Стехиометрические коэффициенты

Для коэффициентов исходных веществ из уравнения (1) имеем

$$\hat{\nu}_{11} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\hat{\nu}_{22} = 48 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

1. На стадии воспламенения продукты реакции остаются в конденсированном виде на частице:

$$\hat{\nu}_{13} = 0, \quad \hat{\nu}_{23} = 80 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

2. На стадии горения предполагаем, что обобщенный продукт реакции MgO состоит из твердой (массовая доля $0 < \eta < 1$) и газообразной $(1-\eta)$ частей. Последняя в действительности представляет собой конгломерат субмикронных частиц оксида [6]. Тогда

$$\hat{\nu}_{13} = (1-\eta)80 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\hat{\nu}_{23} = \eta 80 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

В работе [6] приведены данные по влиянию относительного массового содержания кислорода в среде ξ_{11} на величину η (часть из них помещена в табл. 1). Аппроксимацией этих данных получаем эмпирическую зависимость

$$\eta = 0,276 + 0,211\xi_{11} - 7,024\xi_{11}^2 + 14,543\xi_{11}^3.$$

Кинетические функции

1. На стадии предпламенного окисления, протекающего при относительно низких температурах частицы, задается закон нарастания оксидной пленки [8]

Таблица 1
Влияние относительного массового содержания кислорода в среде на относительную массовую долю твердых продуктов при горении частицы магния (данные [6])

ξ_{11}	η
0,102	0,24
0,23 (воздух)	0,13
0,38	0,14
0,53	0,58

Таблица 2
Критическая температура воспламенения частиц магния согласно [9]

$d_{p,0}$, мкм	T_{ign} , К
15	1 053
20	1 030
30	990
40	960
50	940
60	920
70	912

$$\frac{d_2 h_p}{dt} = K_m \xi_{11}^\alpha h_p^{-m} \exp\left(-\frac{E}{R_\mu T_2}\right),$$

где K_m , α и E — подлежащие определению константы, $m = 0$ для Mg и 1 — для Al, R_μ — универсальная газовая постоянная. В качестве критерия воспламенения могут быть использованы критерий теплового взрыва либо условие достижения частицей некоторого критического значения температуры воспламенения T_{ign} [8]. Для частиц магния величина T_{ign} зависит от начального размера частицы согласно эмпирической формуле, полученной обработкой опытных данных [9]:

$$\begin{aligned} T_{ign}(d_{p,0}) = & 1203,9394 - 20,9751d_{p,0} + \\ & + 1,3057d_{p,0}^2 - 0,0539d_{p,0}^3 + 1,2157 \cdot 10^{-3}d_{p,0}^4 - \\ & - 1,3723 \cdot 10^{-5}d_{p,0}^5 + 6,0702 \cdot 10^{-8}d_{p,0}^6, \end{aligned}$$

где $d_{p,0}$ измеряется в микрометрах. Часть этих данных представлена в табл. 2.

2. После воспламенения частицы начинается стадия горения. Предполагаем, что процесс горения магния протекает в диффузионно-кинетическом режиме. При этом уменьшение радиуса частицы описывается уравнением

$$\frac{d_2 r_p}{dt} = -\frac{K_D}{1 + K_D/K_B} \xi_{11} r_p, \quad (2)$$

где K_D и $K_B = k_B \exp(-E_B/R_\mu T_2)$ — диффузионная и кинетическая константы скорости горения, k_B и E_B — соответствующие предэкспонент и энергия активации. Выражение для константы K_D определяем следующим образом. Уравнение (2) в диффузионном режиме ($K_D \ll K_B$) приобретает вид

$$\frac{d_2 r_p}{dt} = -K_D \xi_{11} r_p \equiv -\frac{r_p}{t_r},$$

где $t_r = t_r(d_{p,0}, Re_0, \xi_{11}, p)$ — характерное время горения, зависящее в общем случае от начального диаметра частицы $d_{p,0}$, числа Рейнольдса обтекания частицы газовым потоком $Re_0 = \rho_1 |\vec{U}_1 - \vec{U}_2| d_{p,0} / \mu_1$, концентрации окислителя ξ_{11} и давления газа p . Таким образом,

$$K_D = \frac{1}{\xi_{11} t_r},$$

где значение t_r выбирается в дальнейшем в соответствии с экспериментальными данными.

(а) Случай постоянного давления среды. При стандартном давлении газа согласно [6]

$$t_r^{(1)} = \frac{d_{p,0}^2}{K_r^{(1)} \xi_{11} (1 + 0,217\sqrt{Re_0})}, \quad (3)$$

где $K_r^{(1)} = 3,24 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Зависимость (3) построена авторами [6] для диапазона $Re_0 \approx 0 \div 3,4$. Путем сравнения с данными других экспериментальных работ в [6] показана применимость данной формулы и для расчетов времени горения более мелких частиц (диаметром $d_{p,0} = 60 \div 1500 \text{ мкм}$).

(б) Случай переменного давления среды. Данные по влиянию давления газа на время горения частиц магния получены в [7]. Обработка этих данных позволяет построить единую эмпирическую формулу для расчета времени горения, основанную на выражении (3) и пригодную для использования в широких диапазонах давления среды ($10^5 \div 22 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и выше) и начального размера частиц (от 60 мкм до 6 мм):

$$t_r^{(2)} = \frac{d_{p,0}^{l(p)}}{K_r^{(2)}(p)\xi_{11}(1 + 0,217\sqrt{\text{Re}_0})},$$

где

$$l(p) = \begin{cases} 10p^{-0,14}, & 10^5 \leq p \leq 22 \cdot 10^5 \text{ Па}, \\ 1,29, & p > 22 \cdot 10^5 \text{ Па}; \end{cases}$$

$$K_r^{(2)}(p) = \begin{cases} 3,079 \cdot 10^{-10} p^{0,83}, & 10^5 \leq p \leq 22 \cdot 10^5 \text{ Па}, \\ 5,658 \cdot 10^{-5}, & p > 22 \cdot 10^5 \text{ Па}. \end{cases}$$

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАМЕНИ В ОБЛАКЕ ЧАСТИЦ МАГНИЯ

В качестве приложения рассмотрим задачу о распространении пламени в газозвеси частиц магния. Отметим, что по данной проблеме имеются теоретические работы, выполненные на основе континуального приближения в описании изучаемого явления (см., например, [3], где предложена математическая модель, учитывающая в стационарном приближении кондуктивный и радиационный перенос тепла). Представляется интересным при теоретическом анализе использовать нестационарный дискретно-континуальный подход, в котором частицы моделируются дискретным набором источников тепла (массы) конечной протяженности, что больше соответствует реальной физической ситуации. Такой подход не является новым. Однако до сих пор мало исследовалось распространение пламени в полидисперсных и пространственно-неоднородных облаках частиц.

Заметим также, что в настоящее время проявляется интерес к проблемам микромеханики, в частности к изучению горения реагирующих смесей в микрососудах. Развиваемая авторами математическая модель может применяться в подобного рода исследованиях.

Основные уравнения

Рассмотрим реакционный сосуд в виде цилиндрической трубы длиной L и радиусом R , которая заполнена покоящейся взвесью частиц магния в окисляющем газе. По боковой и торцевым поверхностям сосуда осуществляется теплообмен с окружающей средой.

Свяжем с сосудом цилиндрическую систему координат (x, r) . Совокупность частиц будем моделировать дискретной цепочкой частиц конечного размера, расположенных по оси трубы в точках $(x_{p,i}, 0)$, что позволяет перейти к одномерному описанию процессов тепло- и массопереноса в системе, если пренебречь переносом тепла в радиальном направлении сосуда. Данное условие выполняется при $R \ll L$.

При расчете теплового состояния газа частицы заменяются распределенными источниками тепла постоянной линейной плотности, что согласуется со следующим допущением. При расчете теплового состояния частиц пренебрегается градиентом температуры внутри частиц, причем в соответствующий обменный член входит «точечная» температура газа $T(x_{p,i}, t)$. Данное условие справедливо для достаточно мелких частиц магния ($d_{p,0,i} \lesssim 100$ мкм [10]).

Полагаем, что теплофизические свойства газовых компонентов (окислитель, инертная часть и продукты горения) близки; в сосуде поддерживается постоянное содержание окислителя.

Осредним уравнение подвода тепла к газовой фазе по поперечному сечению трубы. Получим начально-краевую задачу для поля температуры газа:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F(x, \vec{\Phi}) + F_e,$$

$$0 < x < L, \quad t > 0, \quad T = T^0(x) \quad \text{при } t = 0, \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_l(T - T_l) \quad \text{при } x = 0,$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k_r(T - T_r) \quad \text{при } x = L.$$

Здесь $\vec{\Phi} = (T(x, t), \{T_{p,i}(t)\}, \{r_{p,i}(t)\})$ — вектор решения,

$$F = \sum_{i=1}^{N_p} f_i \varphi(x - x_{p,i}),$$

$$\varphi(x - x_{p,i}) = \begin{cases} 1, & |x - x_{p,i}| \leq R_{p,i}, \\ 0, & |x - x_{p,i}| > R_{p,i}, \end{cases}$$

$$f_i = \frac{2R_{p,i}}{R^2} \left\{ q_b \rho_{22}^0 \left[-\frac{dr_{p,i}}{dt} \right] + Q_i \right\},$$

$$F_e = \frac{4k_e}{R}(T_e - T),$$

$$Q_i = \begin{cases} k_i(T_{p,i} - T(x_{p,i}, t)), & \chi_i = 0, 1, 3, \\ 0, & \chi_i = 2, \end{cases}$$

где ρ — плотность, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, T — температура, λ — теплопроводность газовой фазы; $k_i = \lambda \text{Nu} / 2R_{p,i}$, $k_e = \lambda \text{Nu}_e / 2R$ и $k_{l,r} = \lambda \text{Nu}_{l,r} / 2R$ — коэффициенты теплообмена соответственно между частицей и газом, газом и стенками сосуда, имеющими температуру T_e (боковая поверхность), T_l (левый торец) и T_r (правый торец); $\text{Nu} = 2$, Nu_e и $\text{Nu}_{l,r}$ — соответствующие числа Нуссельта. Источник тепла F состоит из вкладов f_i отдельных частиц, каждый из которых обусловлен выделением теплоты при химической реакции (первое слагаемое) и межфазным конвективным теплообменом (второе). При этом суммарный тепловой поток от распределенного источника F на отрезке $[x_{p,i} - R_{p,i}, x_{p,i} + R_{p,i}]$ совпадает с потоком тепла от частицы, рассматриваемой как точечный источник в точке $x_{p,i}$:

$$S \int_{x_{p,i} - R_{p,i}}^{x_{p,i} + R_{p,i}} F dx = S \int_{x_{p,i} - R_{p,i}}^{x_{p,i} + R_{p,i}} f_i dx = S_{p,i} \left\{ q_b \rho_{22}^0 \left[-\frac{dr_{p,i}}{dt} \right] + Q_i \right\},$$

где $S_{p,i} = 4\pi R_{p,i}^2$ и $S = 4\pi R^2$ — площадь соответственно поверхности частицы и поперечного сечения сосуда, q_b — теплота реакции горения.

В дальнейшем считаем, что число Прандля газовой фазы $\text{Pr} = \lambda c_p / \mu = 1$ и теплоемкость c_p не зависят от температуры. Тогда с учетом степенной зависимости вязкости газа μ от температуры получаем для теплопроводности газовой фазы представление $\lambda = \lambda_0 (T/T_0)^\beta$, где в случае воздуха $\beta = 0,76$.

Для частицы магния примем описанную выше модель окисления с феноменологическим критерием воспламенения частицы по достижении температуры воспламенения $T_{ign,i}$. Считаем, что процесс горения частицы протекает в диффузионном режиме ($K_{B,i} \rightarrow \infty$), при этом все тепло химической реакции выделяется в газе. Температура горячей частицы не может превысить температуру кипения металла $T_{boil} = 1410$ К.

С учетом сказанного запишем уравнение притока тепла к i -й частице:

$$c_2 M_{p,i} \frac{dT_{p,i}}{dt} = -S_{p,i} Q_i, \quad (5)$$

где $T_{p,i}$, $M_{p,i}$ и c_2 — температура, масса и удельная теплоемкость частицы, $i = 1, \dots, N_p$. Значение параметра χ_i определяет режим реагирования:

$$\chi_i = \begin{cases} 0, & \text{инертный режим} \\ & (T_{p,i} < T_{ign,i}, r_{p,i} = r_{p,0,i}); \\ 1, & \text{нестационарное горение} \\ & (T_{ign,i} \leq T_{p,i} \leq T_{boil}, \\ & 0 < r_{p,i} \leq r_{p,0,i}); \\ 2, & \text{стационарное горение} \\ & (T_{p,i} = T_{boil}, 0 < r_{p,i} \leq r_{p,0,i}); \\ 3, & \text{инертный режим} (r_{p,i} = 0). \end{cases}$$

Радиус металлического ядра уменьшается в соответствии с уравнением

$$\frac{dr_{p,i}}{dt} = \begin{cases} -r_{p,i}/t_{r,i}, & \chi_i > 0, \\ 0, & \chi_i = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь

$$R_{p,i} = \left[R_{p,0,i}^3 + a(r_{p,i}^3 - r_{p,0,i}^3) \right]^{1/3},$$

$$R_{p,i} = r_{p,i} + h_{p,i}, t_{r,i} = \frac{4R_{p,0,i}^2}{K_{r,i} \xi_{11}},$$

$$c_2 M_{p,i} = \frac{4}{3} \pi \left[r_{p,i}^3 \rho_{22}^0 c_{22} + (R_{p,i}^3 - r_{p,i}^3) \rho_{23}^0 c_{23} \right],$$

где c_{22} и c_{23} — удельные теплоемкости металла и оксида соответственно. Уравнения (5), (6) дополняются начальными условиями:

$$T_{p,i} = T_0, r_{p,i} = r_{p,0,i}, h_{p,i} = h_{p,0,i} \quad (7)$$

при $t = 0, i = 1, \dots, N_p$.

Безразмерные параметры и характерные времена

Для дальнейшего анализа удобно представить уравнения (4)–(7) в безразмерном виде, используя масштабы длины $x_* = 2r_* = 2r_{p,0} = d_{p,0}$, времени $t_* = \rho c_p d_{p,0}^2 / \lambda_0$, температуры $T_* = T_0$, радиуса $r_* = r_{p,0}$ и теплопроводности $\lambda_* = \lambda_0$. В случае полидисперсной смеси

$d_{p,0}$ — некоторое характерное значение начального диаметра (например, $d_{p,0} = \min_{1 \leq i \leq N_p} d_{p,0,i}$).

Выбранный масштаб времени t_* характеризует время релаксации тепла посредством кондуктивного теплопереноса в локальном очаге с линейным размером $d_{p,0}$.

В итоге получаем безразмерную систему уравнений:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{F} + \bar{F}_e, \quad \bar{t} > 0, \quad 0 < \bar{x} < \bar{L},$$

$$\bar{T} = \bar{T}^0(\bar{x}) \quad \text{при } \bar{t} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\text{Nu}_l}{2\bar{R}} (\bar{T}_l - \bar{T}), \quad \bar{x} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\text{Nu}_r}{2\bar{R}} (\bar{T}_r - \bar{T}), \quad \bar{x} = \bar{L};$$

$$\frac{d\bar{T}_{p,i}}{d\bar{t}} = - \frac{Q_i}{\tau_T \bar{R}_{p,i}^2 [\bar{r}_{p,i}^3 / \bar{R}_{p,i}^3 + (1 - \bar{r}_{p,i}^3 / \bar{R}_{p,i}^3) \hat{\rho}_{23}^0]},$$

$$\frac{d\bar{r}_{p,i}}{d\bar{t}} = \begin{cases} -\bar{r}_{p,i} / \tau_{r,i}, & \chi_i > 0, \\ 0, & \chi_i = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{T}_{p,i} = \bar{T}_{p,0} = 1, \quad \bar{r}_{p,i} = \bar{r}_{p,0,i}, \quad \bar{h}_{p,i} = \bar{h}_{p,0,i} \\ \text{при } \bar{t} = 0, \quad i = 1, \dots, N_p.$$

Здесь

$$\bar{\lambda} = \bar{T}^\beta, \quad \bar{F} = \sum_{i=1}^{N_p} \bar{f}_i \varphi(\bar{x} - \bar{x}_{p,i}),$$

$$\bar{F}_e = \frac{\bar{\lambda}(\bar{T}_e - \bar{T})}{\tau_e},$$

$$\bar{f}_i = \frac{1}{\tau} \left[-\bar{q} \bar{R}_{p,i} \frac{d\bar{r}_{p,i}}{d\bar{t}} + \bar{Q}_i \right],$$

$$\bar{Q}_i = \begin{cases} \bar{\lambda}(\bar{T}_{p,i} - \bar{T}(\bar{x}_{p,i}, \bar{t})), & \chi_i = 0, 1, 3, \\ 0, & \chi_i = 2, \end{cases}$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2\text{Nu}} \frac{\rho_{22}^0}{\rho} \frac{q_b}{c_p T_0}, \quad \text{Nu}_{l,r} = \frac{k_{l,r} d_{p,0}}{\lambda_0},$$

$$\bar{R}_{p,i}^3 - \bar{R}_{p,0}^3 = a(\bar{r}_{p,i}^3 - \bar{r}_{p,0,i}^3), \quad \hat{\rho}_{23}^0 = \frac{\rho_{23}^0 c_{23}}{\rho_{22}^0 c_{22}},$$

$$\tau_T = \frac{1}{6} \frac{\rho_{22}^0 c_{22}}{\rho c_p},$$

т. е. появляются параметры

$$\tau, \tau_e, \text{Nu}_{l,r}, \bar{L}, \tau_{r,i}, \bar{r}_{p,0,i}, \bar{x}_{p,0,i}, N_p,$$

где

$$\tau = \frac{R^2}{\text{Nu} d_{p,0}^2} = \frac{\bar{R}^2}{\text{Nu}}, \quad \tau_e = \frac{\bar{R}^2}{2\text{Nu}_e},$$

$$\tau_{r,i} = \frac{\lambda_0}{\rho c_p K_{r,i} \xi_{11}} (1 + 2\bar{h}_{p,0,i})^2.$$

Как видно, решение нестационарной задачи зависит от числа частиц N_p и следующих безразмерных параметров:

1) геометрических — относительного радиуса $\bar{R} = R/d_{p,0}$ и относительной длины $\bar{L} = L/d_{p,0}$ сосуда, начальных относительных толщин оксидной пленки на частицах $\bar{h}_{p,0,i} = h_{p,0,i}/d_{p,0}$, радиусов металлического ядра $\bar{r}_{p,0,i} = r_{p,0,i}/d_{p,0}$ и координат частиц $\bar{x}_{p,0,i} = x_{p,0,i}/d_{p,0}$;

2) теплофизических — чисел Нуссельта, характеризующих внешний теплообмен по боковой поверхности (Nu_e) и по торцевым стенкам трубы ($\text{Nu}_{l,r}$);

3) физико-химических — $\tau_{K,i} = \frac{\lambda_0}{\rho c_p K_{r,i} \xi_{11}}$ и \bar{q} .

В рамках данной модели при заданном материале частиц параметр \bar{q} становится постоянной величиной. В случае монодисперсной смеси становятся постоянными $\tau_{K,i}$ и $\bar{r}_{p,0,i}$ и множество параметров сокращается до \bar{R} , \bar{L} , $\bar{h}_{p,0}$, $\text{Vi}_{l,r} = \text{Nu}_{l,r}/2\bar{R}$, $\bar{x}_{p,0,i}$ и N_p . В соответствии с известными положениями теории горения можно ожидать, что влияние $\text{Vi}_{l,r}$ и $\bar{h}_{p,0}$ на характеристики стационарного пламени слабое, и поэтому наиболее существенными будут параметры \bar{R} , \bar{L} и, возможно, $\bar{x}_{p,0,i}$ и N_p .

Из приведенных выше уравнений следует, что интенсивность выделения тепла в газе за счет межфазного теплообмена и горения определяется величиной τ . В то же время в

сосуде конечной длины будет происходить выравнивание температурного поля, обусловленное кондуктивным теплопереносом и теплообменом с окружающей средой и характеризующееся некоторым (безразмерным) временем τ_L . При $\tau \sim \tau_L$ можно ожидать возникновения в системе стационарных волн горения.

Для оценки τ_L в случае сосуда с адиабатическими торцами ($Bi_l = Bi_r = 0$) воспользуемся решением «инертного» варианта системы уравнений (8) с «замороженной» зависимостью теплопроводности от температуры, т. е. при $F = 0$, $\lambda(\bar{T}) = \bar{\lambda}_m$, где $\bar{\lambda}_m$ — некоторое среднее значение теплопроводности. Данное решение ищем в виде разложения по собственным функциям $\cos(n\pi\bar{x}/\bar{L})$ ($n = 1, 2, \dots$) адиабатической ($\tau_e \rightarrow \infty$) задачи [11]. Приходим к набору характерных времен τ_n , описывающих затухание тепловых возмущений в сосуде, причем

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}}{\bar{L}^2} + \frac{\bar{\lambda}}{\tau_e}$$

(внутреннее и внешнее тепловые сопротивления суммируются). Полагая $n = 1$, что соответствует наиболее медленно затухающему возмущению, получаем приближенную оценку $\tau_L \approx (\bar{L}^2/\bar{\lambda}_m)/(\pi^2 + \bar{L}^2/\tau_e)$.

Для перехода в расчетных данных к континуальным величинам необходимо оценить объемную долю дисперсной фазы m_2 , которая характеризует степень заполнения сосуда частицами. Для оценки m_2 в начальном состоянии используем формулу

$$m_{2,0} = \frac{4}{3R^2\bar{L}} \sum_{i=1}^{N_p} R_{p,0,i}^3$$

которая для монодисперсной смеси принимает вид

$$m_{2,0} = \frac{4N_p R_{p,0}^3}{3R^2\bar{L}} \approx \frac{4N_p}{3\bar{R}^2\bar{L}}$$

или, через относительное расстояние между центрами частиц $\Delta\bar{x}_p \approx \bar{L}/N_p$,

$$m_{2,0} \approx \frac{4}{3\bar{R}^2\Delta\bar{x}_p}$$

Тогда средняя плотность дисперсной фазы равна $\rho_{2,0} \approx m_{2,0}\rho_{22}^0$ и в расчетах может контролироваться заданием соответствующего межчастичного расстояния.

Численный метод

Для численного решения задачи (8) использовался метод прямых с дискретизацией пространственных производных по методу конечных объемов на неравномерной в общем случае сетке [12]. N_p узлов сетки помещались в точки расположения частиц, остальная часть узлов равномерно покрывала межчастичные интервалы таким образом, чтобы на участок, занимаемый частицей, приходилось не менее 6–8 ячеек сетки. Система уравнений для параметров частиц (9) решалась совместно с уравнениями для параметров газа. Результирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась с помощью неявного метода. Сходимость численного решения проверялась расчетами на последовательности сгущающихся сеток. Минимальный шаг сетки подбирался также таким образом, чтобы величина относительной невязки, с которой на всем отрезке интегрирования по времени выполняется баланс тепла для газовой фазы

$$\int_0^{\bar{L}} (\bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{T}^0(\bar{x})) d\bar{x} = \int_0^{\bar{t}} \left[Bi_r(\bar{T}_r - \bar{T}(\bar{L}, \bar{t})) - \right. \\ \left. - Bi_l(\bar{T}_l - \bar{T}(0, \bar{t})) + 2 \sum_{i=1}^{N_p} \bar{R}_{p,i} \bar{f}_i \right] d\bar{t} + \\ \left. + \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{L}} \bar{F}_e d\bar{x} d\bar{t}, \right.$$

не превышала $2 \div 3 \%$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проводилось численное моделирование инициирования волны горения в сосуде с переменным или фиксированным числом частиц. Для этого в начальный момент времени на левом конце трубы задавался участок нагретого до температуры $T_{ini} \geq T_{ign}$ газа протяженностью x_{ini} — очаг первичного горения. Тем самым в систему вкладывалась энергия

$$E_{ini} = \pi R^2 \rho c_v \int_0^L (T^0(x) - T_0) dx = \\ = \pi R^2 x_{ini} \rho c_v (T_{ini} - T_0).$$

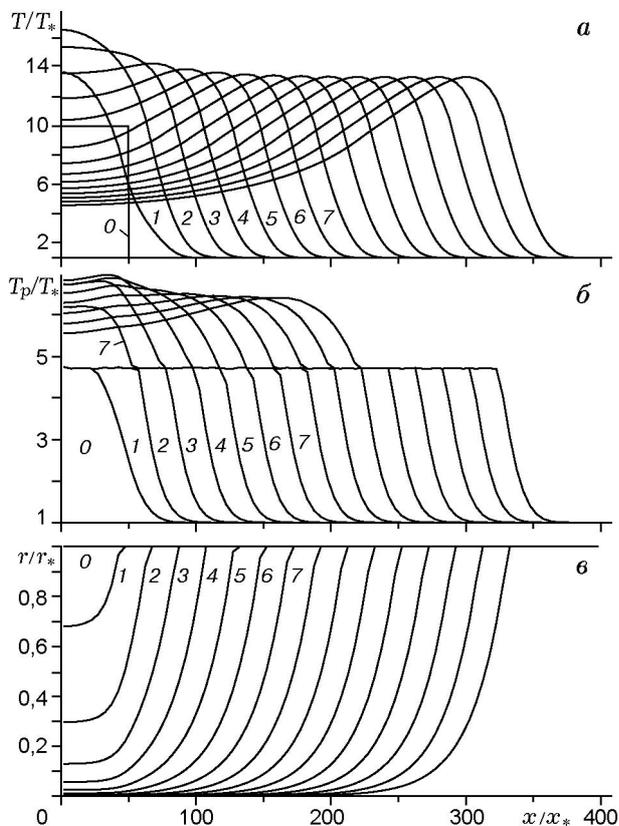


Рис. 1. Распространение пламени в равномерной цепочке частиц магния ($\Delta\bar{x}_p = 5$, $d_{p,0} = 35$ мкм, $m_{2,0} = 1,552 \cdot 10^{-4}$):

a — температура газа, *б* — температура частиц, *в* — радиус металлического ядра частиц; цифры около кривых — соответствующие моменты времени \bar{t}_i

Здесь c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Оказалось, что существует критическое значение энергии $E_{ini,cr}$, ниже которого инициирование стационарной волны горения не происходит. В случае успешного инициирования скорость пламени u_b не зависела от энергии E_{ini} . Значение u_b оценивалось по скорости перемещения точки максимума градиента на профиле $T(x, t)$ (точки, в которой расположен «центр» волны).

Начальный размер частиц $d_{p,0,i}$ менялся в диапазоне $15 \div 70$ мкм. При расчетах принималось $N_p = 50 \div 300$, $Nu_e = 0,1 \div 1,0$, $Nu_l = Nu_r = 0$, $K_m = 0$, $c_p = 1000$ Дж/(кг·К), $\rho = 1,17$ кг/м³, $T_0 = 300$ К, $\lambda_0 = 2,62 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К), $\xi_{11} = 0,23$, $c_{22} = 1100$ Дж/(кг·К), $c_{23} = 930$ Дж/(кг·К), $\rho_{22}^0 = 1740$ кг/м³, $\rho_{23}^0 = 3580$ кг/м³, $q_b = 2,47 \times$

Таблица 3

Влияние числа частиц на характеристики пламени

N_p	u_f , м/с	T_{max}/T_0
50	0,1394	15,072
100	0,1344	15,056
200	0,1346	15,057
300	0,1347	15,054

Примечание. $d_{p,0} = 35$ мкм, $m_{2,0} = 1,552 \cdot 10^{-4}$, $\Delta\bar{x}_p = 5$, $\bar{x}_{ini} = 0,1$, $\bar{T}_{ini} = 10$, $Nu_e = 0,2$.

10^7 Дж/кг. Задавались $\bar{h}_{p,0} = 10^{-4}$, $\bar{T}_{ini} = 4 \div 10$.

Монодисперсная равномерная цепочка

В этом случае все частицы в начальный момент времени были одного размера ($d_{p,0,i} = d_{p,0}$) и располагались на равном расстоянии $\Delta\bar{x}_{p,i} = \Delta\bar{x}_p$ друг от друга. Расстояние от первой и последней частиц до торцевых стенок трубы составляло $\Delta\bar{x}_p/2$.

Пример распространения пламени из первичного очага приведен на рис. 1, где цифрами возле кривых обозначены соответствующие моменты времени $\bar{t}_i = i\Delta\bar{t}$, $i = 0, \dots, 15$ — номер кривой, шаг выдачи $\Delta\bar{t} = 100$ ($\Delta t = 5,4704 \cdot 10^{-5}$ с), $d_{p,0} = 35$ мкм, $m_{2,0} = 1,552 \times 10^{-4}$, $\Delta\bar{x}_p = 5$, $Nu_e = 0,3$, $\bar{x}_{ini} = 0,1$, $\tau = 859,5 > \tau_L \approx 257,4$ (величины τ и τ_L одного порядка, что соответствует возникновению стационарной волны горения). Газовая фаза (рис. 1, *a*) на стадии индукции (момент времени $\bar{t}_1 = \Delta\bar{t}$) прогревает частицы в зоне иницирования ($0 \leq \bar{x} \leq 50$, рис. 1, *б*), большая часть которых при $\bar{t} = \bar{t}_2$ уже воспламеняется и к моменту $\bar{t} = \bar{t}_7$ сгорает (рис. 1, *в*), обеспечивая стационарное продвижение пламени в сторону свежей смеси. Сгоревшие частицы (не содержащие металла) продолжают прогреваться в зоне продуктов горения до местной температуры газа, которая постепенно уменьшается из-за теплопотерь в стенки трубы (рис. 1, *б*, кривая 7). Отметим, что линии на графиках зависимостей параметров дискретной фазы от пространственной координаты носят «условный» характер и нанесены для удобства просмотра. Распределение температуры газа в волне горения

Таблица 4
Влияние теплопотерь
на характеристики пламени

Nu_e	u_f , м/с	T_{max}/T_0
0,1	0,151	17,772
0,2	0,134	15,056
0,3	0,128	13,328
0,5	0,102	10,986
0,7	0,089	9,529
1,0	0,070	7,890
1,5	0,032	5,634
2,0	Нет воспламенения	

Примечание. $N_p = 100$, $d_{p,0} = 35$ мкм, $m_{2,0} = 1,552 \cdot 10^{-4}$, $\Delta \bar{x}_p = 5$, $\bar{x}_{ini} = 0,1$, $\bar{T}_{ini} = 10$.

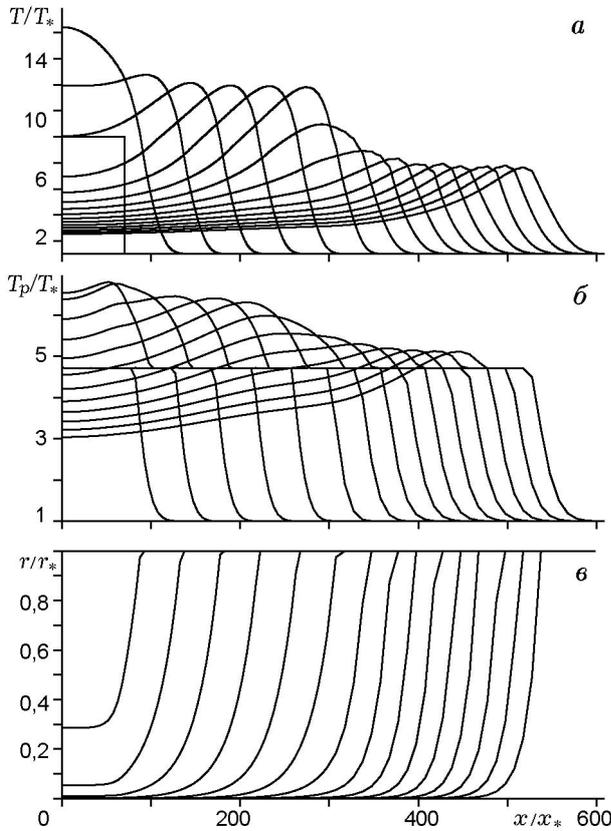


Рис. 2. Распространение пламени в неравномерной цепочке частиц магния ($\Delta \bar{x}_{p,l} = 5$, $\Delta \bar{x}_{p,r} = 10$, $\bar{R} = 40$, $d_{p,0} = 35$ мкм):
а, б, в — см. пояснения к рис. 1

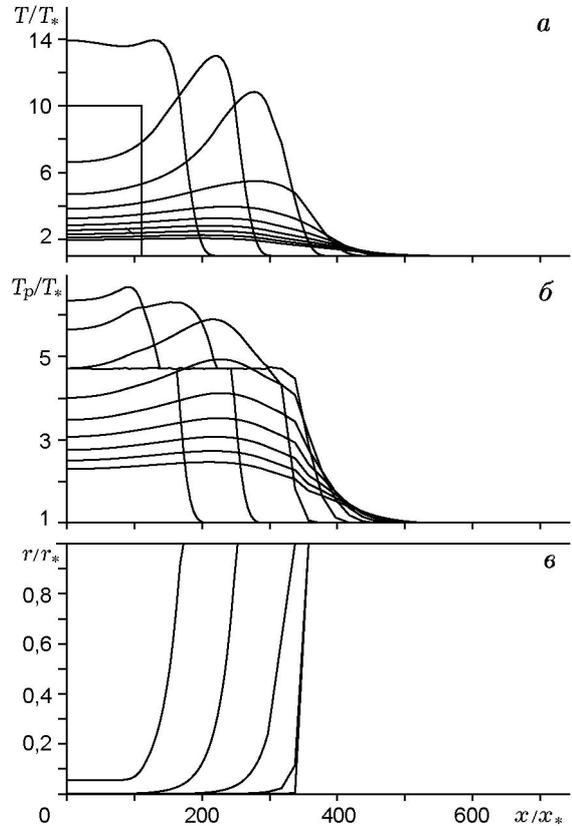


Рис. 3. Погасание пламени в неравномерной цепочке частиц магния ($\Delta \bar{x}_{p,l} = 5$, $\Delta \bar{x}_{p,r} = 20$, $\bar{R} = 40$, $d_{p,0} = 35$ мкм):
а, б, в — см. пояснения к рис. 1

немонотонно, максимум температуры \bar{T}_{max} достигается внутри зоны горения, затем следует монотонный спад \bar{T} до стационарного значения \bar{T}_{fin} в зоне продуктов горения.

Таким образом, в волне горения выделяются зона прогрева (зона «индукции») и зона химического превращения с характерным пиком температуры газовой фазы. Такая структура аналогична структуре пламени в рамках континуальных моделей. Толщины зон зависят от начального размера частиц, межчастичного расстояния и других параметров. В среднем в зоне прогрева находится ≈ 10 , в зоне горения — $\approx 10 \div 20$ частиц.

Выясним влияние числа частиц N_p (при фиксированной концентрации частиц) на характеристики волны горения. Расчеты задачи инициирования с данными рис. 1 показали стабилизацию скорости волны с ростом N_p . Как видно из табл. 3, начиная примерно с $N_p = 100$ характеристики пламени практически перестают зависеть от числа частиц. Поэтому в даль-

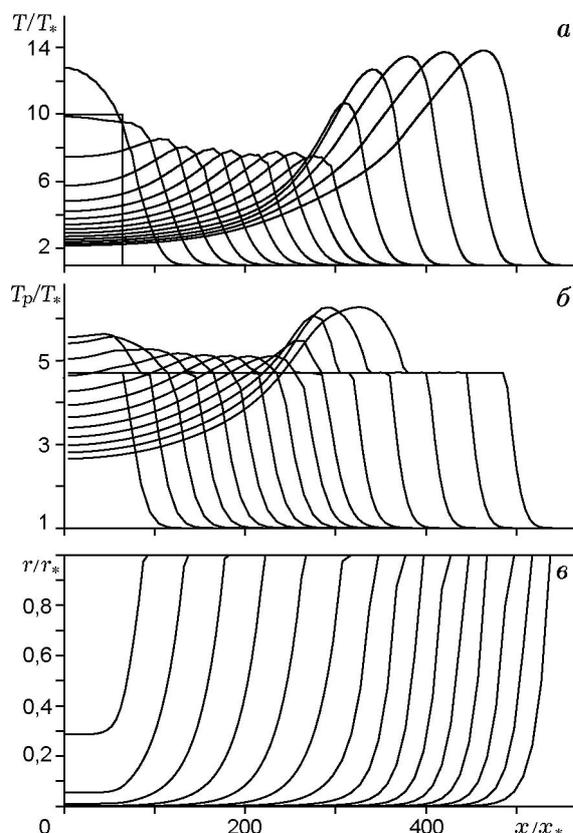


Рис. 4. Распространение пламени в неравномерной цепочке частиц магния ($\Delta\bar{x}_{p,l} = 10$, $\Delta\bar{x}_{p,r} = 5$, $\bar{R} = 40$, $d_{p,0} = 35$ мкм):

a, *б*, *в* — см. пояснения к рис. 1

нейшем в расчетах использовалось значение $N_p = 100$.

Из физических соображений при моделировании необходимо ограничивать максимальный разогрев газовой фазы \bar{T}_{\max} ($3\,300 \div 3\,600$ К по данным [3]). Данная величина, так же как и скорость волны, уменьшается (при постоянном диаметре трубы) с ростом интенсивности внешнего теплообмена Nu_e . Из табл. 4 видно, что при $Nu_e < 0,3$ достигается избыточный нагрев газа. Поэтому в последующих расчетах полагалось $Nu_e = 0,3$.

Монодисперсная неравномерная цепочка

Изучим влияние неравномерности осевого расположения частиц на характеристики пламени в сосуде с постоянным радиусом $\bar{R} = 40$, для чего рассмотрим три ситуации.

1. Волна горения при распространении по свежей смеси с межчастичным расстоянием

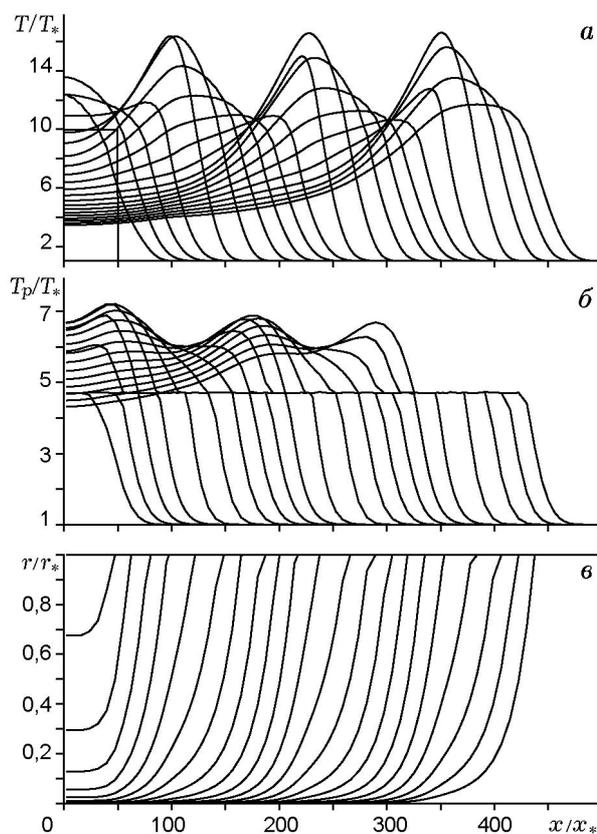


Рис. 5. Распространение пламени в периодически неравномерной цепочке частиц магния ($\Delta\bar{x}_p = 5$, $d_{p,0} = 35$ мкм, $\bar{R} = 40$, $\Delta\bar{x}_p = 5$, $\varepsilon = 0,6$, $N_1 = 4$):

a, *б*, *в* — см. пояснения к рис. 1

$\Delta\bar{x}_{p,l} = 5$ подходит к более разреженной цепочке частиц, расположенных с шагом $\Delta\bar{x}_{p,r} = 10$ (рис. 2, $\Delta\bar{t} = 200$). При этом, как видно из рис. 2, меняются распределения параметров в волне, уменьшаются скорость пламени и максимальный разогрев газовой фазы в зоне превращения.

Если справа создать еще более разреженный слой частиц ($\Delta\bar{x}_{p,r} = 20$), то пламя, подойдя к данному участку, будут гаснуть (рис. 3). Данный пример свидетельствует о наличии нижнего концентрационного предела распространения пламени.

2. Пламя переходит на более плотную цепочку частиц (рис. 4, $\Delta\bar{t} = 200$). В этом случае наблюдается обратная картина: пламя ускоряется до большей скорости и затем стационарно распространяется вправо, приобретая структуру, близкую к начальной структуре пламени в предыдущем случае.

3. Частицы распределены по оси трубы с неравномерным (периодическим) шагом

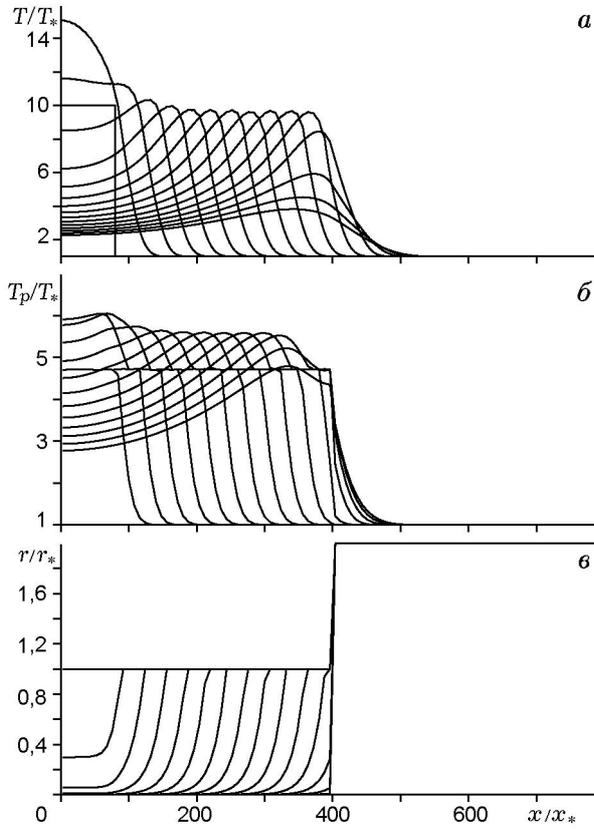


Рис. 6. Затухание пламени в бидисперсной равномерной цепочке частиц магния ($\Delta\bar{x}_p = 8$, $\bar{R} = 40$, $d_{p,0,\min} = 15$ мкм, $d_{p,0,\max} = 30$ мкм):

а, б, в — см. пояснения к рис. 1; в левой половине трубы — фракция «мелких» частиц

$$\Delta\bar{x}_{p,i} = \Delta\bar{x}_p \left(1 + \varepsilon \sin \frac{2\pi N_1 i}{N_p} \right),$$

где $\Delta\bar{x}_p$ — межчастичное расстояние при равномерном распределении, $\varepsilon > 0$ — малая величина, $1 < N_1 < N_p$. На рис. 5 ($\Delta\bar{t} = 200$) представлены данные расчета при $\Delta\bar{x}_p = 5$, $\varepsilon = 0,6$, $N_1 = 4$. Скорость пламени u_f колеблется: при достижении участков с более плотным расположением частиц она увеличивается, а на менее плотных участках — падает. Среднее значение скорости примерно соответствует значению u_f при распространении пламени в равномерной цепочке частиц с $\Delta\bar{x}_p = 5$, т. е. в смеси с пространственно-однородной начальной концентрацией частиц $m_{2,0} = \text{const}$.

Бидисперсная цепочка

Рассмотрим некоторые качественные особенности распространения пламени в бидисперсном ансамбле частиц, в котором наря-

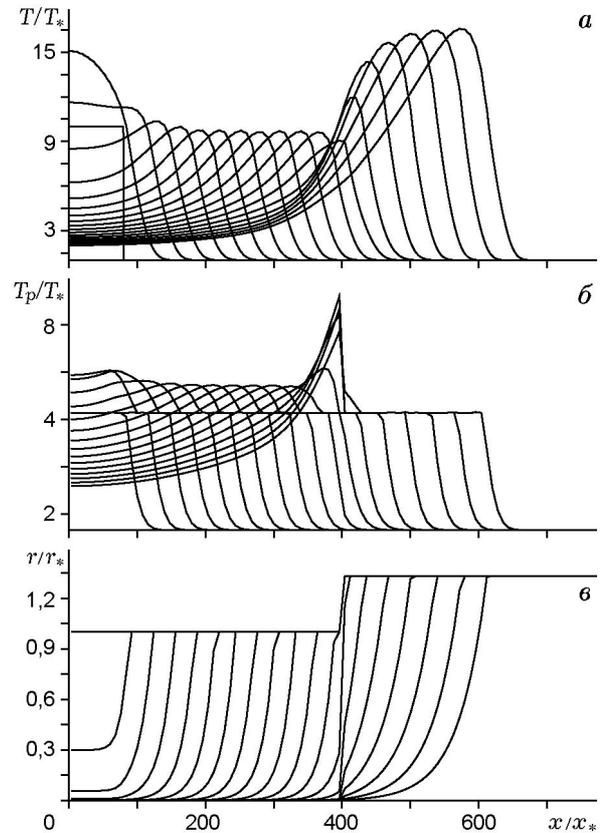


Рис. 7. Распространение пламени в бидисперсной равномерной цепочке частиц магния ($\Delta\bar{x}_p = 8$, $\bar{R} = 40$, $d_{p,0,\min} = 15$ мкм, $d_{p,0,\max} = 20$ мкм):

а, б, в — см. пояснения к рис. 1; в левой половине трубы — фракция «мелких» частиц

ду с частицами диаметром $d_{p,0} = d_{p,0,\min}$ («мелкая» фракция) присутствуют частицы диаметром $d_{p,0,\max}$ («крупная» фракция), где $d_{p,0,\min} = 15$ мкм.

1. В левой половине трубы находятся «мелкие» частицы, в правой половине — частицы «крупной» фракции (рис. 6, 7, $\Delta\bar{t} = 200$, $\Delta\bar{x}_p = 8$, $\bar{R} = 40$). Пусть размер «крупных» частиц в два раза больше размера «мелких» ($d_{p,0,\max} = 30$ мкм). В этом случае пламя после инициирования распространяется к середине сосуда, где гаснет ввиду того, что поток тепла из зоны превращения в зону прогрева недостаточен для воспламенения крупных частиц (рис. 6). При меньшем различии дисперсностей фракций ($d_{p,0,\max} = 20$ мкм) погасания уже не происходит, структура пламени перестраивается и принимает стационарный вид, скорость пламени возрастает, что связано с увеличением (локальной) концентрации частиц (рис. 7).

2. Слой «крупных» ($d_{p,0,\max} = 20$ мкм)

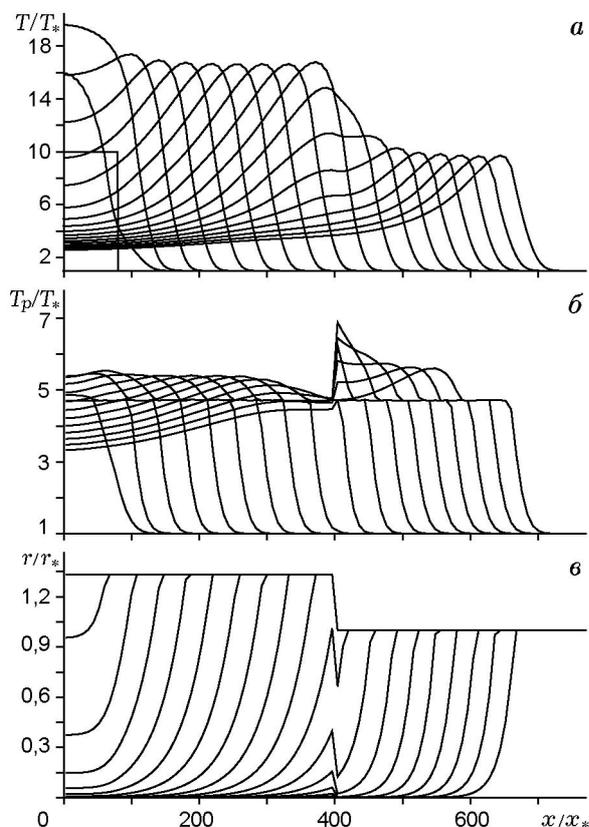


Рис. 8. Распространение пламени в бидисперсной равномерной цепочке частиц магния ($\Delta \bar{x}_p = 8$, $\bar{R} = 40$, $d_{p,0,\min} = 15$ мкм, $d_{p,0,\max} = 20$ мкм): а, б, в — см. пояснения к рис. 1; в левой половине трубы — фракция «крупных» частиц

частиц занимает левую половину трубы, в правой половине расположен слой «мелких» частиц (рис. 8). Тепла, поступающего при горении частиц «крупной» фракции, достаточно для зажигания «мелких» частиц, и при переходе в слой частиц меньшего размера происходят обратные изменения структуры и скорости распространения волны горения.

3. Фракции перемешаны, «мелкие» частицы чередуются с «крупными» (рис. 9, $\Delta \bar{t} = 400$). Распределение параметров в пространстве носит колебательный характер (см. рис. 9, б, в). Однако в среднем скорость пламени постоянна и равна $u_f = 0,255$ м/с (рис. 9, а), причем данное значение ограничено значениями u_f для монодисперсных цепочек с диаметрами частиц $d_{p,0,\max} = 15$ мкм ($u_f = 0,213$ м/с) и 20 мкм (0,369 м/с) соответственно в сосуде тех же (абсолютных) размеров ($L = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м, $R = 6 \cdot 10^{-4}$ м).

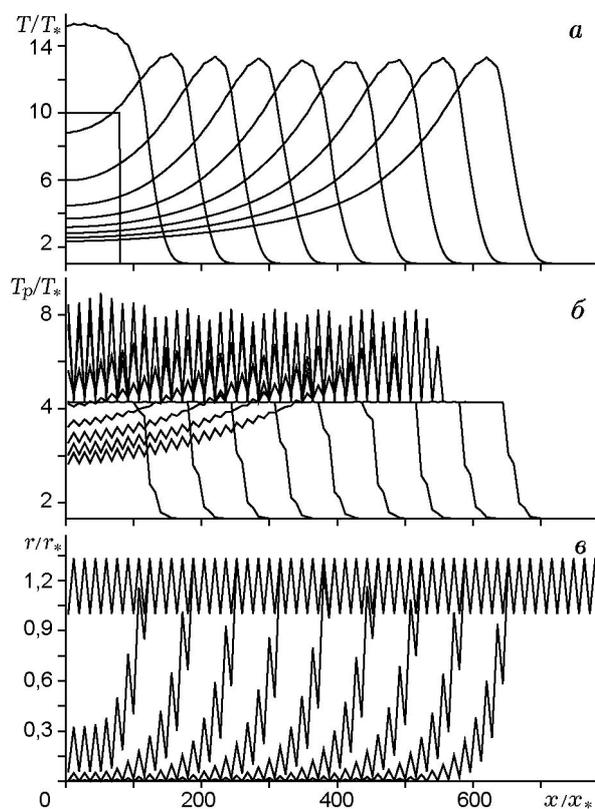


Рис. 9. Распространение пламени в бидисперсной равномерной цепочке частиц магния ($\Delta \bar{x}_p = 8$, $\bar{R} = 40$, $d_{p,0,\min} = 15$ мкм, $d_{p,0,\max} = 20$ мкм): а, б, в — см. пояснения к рис. 1; частицы разных фракций чередуются

Верификация модели

Проведем сравнение расчетных и экспериментальных [6] данных по нормальной скорости пламени в смеси воздуха и частиц магния (рис. 10). При этом используем данные расчетов для монодисперсной равномерной цепочки при $\Delta \bar{x}_p = 5$, $\rho_{2,0} = 0,2$ кг/м³ ($m_{2,0} = 1,149 \cdot 10^{-4}$). Как видно из рис. 10, дискретно-континуальная модель, учитывающая только кондуктивный теплоперенос, адекватно предсказывает значения u_f в диапазоне диаметров частиц 10 ÷ 20 мкм. Расчеты по стационарной кондуктивно-радиационной модели [6] дают более точные значения u_f для частиц диаметром свыше 20 мкм. Возможно, что в случае цепочек частиц «средней» дисперсности ($d_{p,0} > 20$ мкм) для получения лучшей корреляции с опытными значениями скорости пламени необходимо дополнительно учитывать лучистый теплообмен.

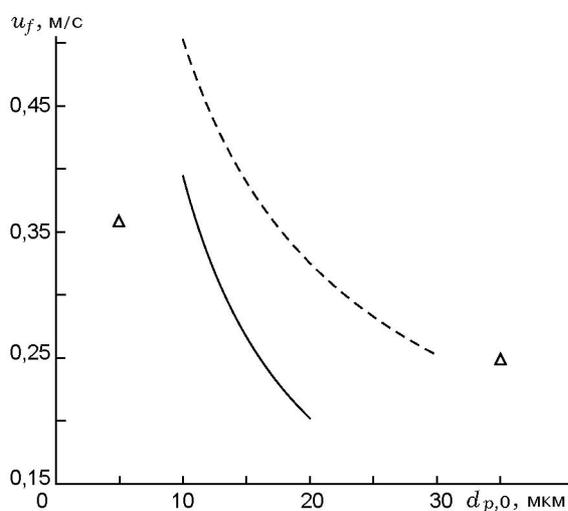


Рис. 10. Влияние начального размера частицы на нормальную скорость пламени в аэрозвеси частиц магния ($\rho_{2,0} = 0,2 \text{ кг/м}^3$):

значки — эксперимент [6], сплошная линия — расчет авторов, штриховая — расчет [6]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ и обобщены опытные данные по горению частиц магния в кислородсодержащих газовых смесях. На этой основе разработана полуэмпирическая математическая модель, учитывающая интегральным образом влияние на процесс горения начального размера частицы, давления и скорости окисляющего потока.

Изучена задача об одномерном распространении пламени в аэрозвеси мелких частиц магния. Для этой цели развита дискретно-континуальная модель распространения пламени в газозвеси металлических частиц. Численно определено существование пределов распространения пламени в сосуде, обусловленных теплотерями в окружающую среду и пространственной неоднородностью распределения частиц дисперсной фазы.

Исследовано влияние неравномерности и бидисперсности одномерного ансамбля частиц на характеристики пламени. В частности, в бидисперсной цепочке частиц с пространственно чередующимися фракциями «мелких» и «крупных» частиц распределения параметров смеси

имеют периодический характер, тогда как скорость пламени в среднем постоянна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руманов Э. Н., Хайкин Б. И. О распространении пламени по взвеси частиц в газе // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, № 1. С. 144–147.
2. Тодес О. М., Гольцикер А. Д., Горбульский Я. Г. Нормальная скорость пламени в аэродисперсных системах // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 5. С. 1083–1086.
3. Шевчук В. Г., Безродных А. К., Бойчук Л. В., Кондратьев Е. Н. О механизме ламинарного пламени в аэрозвесах металлических частиц // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24, № 2. С. 85–89.
4. Крайнов А. Ю. Моделирование распространения пламени в смеси горючих газов и частиц // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 2. С. 3–9.
5. Федоров А. В. Воспламенение газозвесей в режиме взаимодействующих континуумов // Физика горения и взрыва. 1998. Т. 34, № 4. С. 57–64.
6. Деревяга М. Е., Стесик Л. Н., Федорин Э. А. Режимы горения магния // Физика горения и взрыва. 1978. Т. 14, № 5. С. 3–10.
7. Мальцев В. М., Мальцев М. И., Кашпов Л. Я. Основные характеристики горения. М.: Химия, 1977.
8. Медведев А. Е., Федоров А. В., Фомин В. М. Описание воспламенения и горения смесей газа и твердых частиц методами механики сплошной среды // Физика горения и взрыва. 1984. Т. 20, № 2. С. 3–9.
9. Cassel H. V., Liebman I. Combustion of magnesium particles II. Ignition temperatures and thermal conductivities of ambient atmospheres // Combust. Flame. 1963. V. 7, N 1. P. 79–81.
10. Гостеев Ю. А., Федоров А. В. Воспламенение частицы магния (распределенная модель) // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32, № 4. С. 5–12.
11. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.
12. Гостеев Ю. А., Федоров А. В. Математическое моделирование подъема и воспламенения частиц угольных отложений // Физика горения и взрыва. 2003. Т. 39, № 2. С. 67–74.

Поступила в редакцию 12/1 2004 г.