ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАДАННЫМ НА СФЕРЕ КОНЕЧНОГО РАДИУСА

Ю. Г. Овсеенко (Новочеркасск)

В нелинейной постановке рассматривается установившееся обтекание сферы потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса. Уравнения движения записываются в безразмерных величинах. Их решение ищется разложением искомой функции тока в ряд по степеням числа Рейнольдса, коэффициенты которого представляются в виде многочленов по присоединенным функциям Лежандра первого рода. Выводятся рекуррентные формулы для последовательного определения всех коэффициентов. Находится поле скоростей и давление. Вычисляется сила сопротивления. Проводятся численные расчеты.

1. **Постановка задачи.** Пусть сфера радиуса r_1 обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным не на бесконечности, как в классическом случае, а на сфере конечного радиуса r_2. В сферической системе координат ($\theta = 0$ — ось симметрии) граничные условия задачи таковы:

$$v_r = v_\theta = 0 \quad \text{при } r = r_1, \quad v_r = u\cos\theta, \quad v_\theta = -u\sin\theta \quad \text{при } r = r_2 \qquad (1.1)$$

Запишем точные уравнения Навье — Стокса и предельные условия (1.1) в безразмерных величинах

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{R}\frac{1}{x^2}\frac{\partial L\Phi}{\partial \tau} + \frac{L\Phi}{x^2(1-\tau^2)}\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{R}\frac{1}{1-\tau^2}\frac{\partial L\Phi}{\partial x} + \frac{L\Phi}{x^2(1-\tau^2)}\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \qquad (1.2)$$

или, исключая Q:

$$LL\Phi = R\left[\frac{1-\tau^2}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{L\Phi}{1-\tau^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial x}\frac{L\Phi}{x^2}\right] \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad (x=1), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = -\tau a^2, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = (1-\tau^2)\,a \quad (x=a) \qquad (1.4)$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\tau^2}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}, \qquad x = \frac{r}{r_1}, \qquad a = \frac{r_2}{r_1}, \qquad \tau = \cos\theta, \qquad R = \frac{r_1 u}{\nu}$$

Здесь R — число Рейнольдса, $\rho u^2 p\,(x, \tau)$ — гидродинамическое давление, $r_1^2 u\Phi\,(x, \tau)$ — функция тока, через которую выражаются проекции скорости $v_r = uv\,(x, \tau)$ и $v_\theta = uw\,(x, \tau)$ по формулам

$$v = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}, \qquad w = -\frac{1}{x\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{v^2+w^2}{2} + p$$

2. **Решение задачи.** Будем искать решение уравнения (1.3) в виде ряда по положительным степеням числа R

$$\Phi(x,\tau) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2}\sum_{i=1}^{k}\psi_{k,i}(x)\,P_{2i-1}^1(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-1}\sum_{i=1}^{k}\Phi_{k,i}(x)\,P_{2i}^1(\tau)\right)\sqrt{1-\tau^2} \qquad (2.1)$$

Здесь $P_n^1(\tau)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода. Известно, что ряд (2.1) вместе со своими производными до порядка, обусловленного уравнением (1.3), сходится при малых числах Рейнольдса [1,2].

Подставляя значение функции тока (2.1) в (1.3), (1.4), отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях числа Рейнольдса слева и справа, а затем — при одинаковых $P_n^1(\tau)$, получим бесконечную последовательность систем дифференциальных уравнений типа Эйлера с соответствующими граничными условиями

$$G_i G_i \psi_{k,i} = \varphi_{k,i}(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (2.2)$$

$$D_i D_i \Phi_{k,i} = \eta_{k,i}(x)$$

при $x = 1$

$$\psi_{k,i} = \frac{d\psi_{k,i}}{dx} = \Phi_{k,i} = \frac{d\Phi_{k,i}}{dx} = 0 \quad (k \geqslant 1)$$

при $x = a$ (2.3)

$$\psi_{11} = -\frac{a^2}{2}, \quad \frac{d\psi_{11}}{dx} = -a, \quad \psi_{k,i} = \frac{d\psi_{k,i}}{dx} = 0 \quad (k \geqslant 2), \qquad \Phi_{k,i} = \frac{d\Phi_{k,i}}{dx} = 0 \quad (k \geqslant 1)$$

Здесь

$$G_i = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2i(2i-1)}{x^2}(\cdots), \quad D_i = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2i(2i+1)}{x^2}(\cdots)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{k,i}(x) = \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m}\Big\{ &-\frac{2}{x^2}(\psi'_{k-m,n}D_\gamma\Phi_{m,\gamma}\alpha_2 + \Phi'_{k-m,n}G_\gamma\psi_{m,\gamma}\alpha_4) + \\ &+ 2\gamma\left[\frac{2\gamma-1}{x^2}\psi'_{k-m,n}D_\gamma\Phi_{m,\gamma} - (2\gamma+1)\Phi_{m,\gamma}\frac{d}{dx}\left(\frac{G_n\psi_{k-m,n}}{x^2}\right)\right]\alpha_1 + \\ &+ (2\gamma-1)\left[\frac{2\gamma-2}{x^2}\Phi'_{k-m,n}G_\gamma\psi_{m,\gamma} - 2\gamma\psi_{m,\gamma}\frac{d}{dx}\left(\frac{D_n\Phi_{k-m,n}}{x^2}\right)\right]\alpha_3\Big\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\eta_{k,i}(x) = \sum_{m=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m+1}\Big\{ &-\frac{2}{x^2}\psi'_{k-m+1,n}G_\gamma\psi_{m,\gamma}\alpha_6 + \\ &+ (2\gamma-1)\left[\frac{2\gamma-2}{x^2}\psi'_{k-m+1,n}G_\gamma\psi_{m,\gamma} - 2\gamma\psi_{m,\gamma}\frac{d}{dx}\frac{G_n\psi_{k-m+1,n}}{x^2}\right]\alpha_5\Big\} + \\ + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{n=1}^{k-m}\Big\{ &-\frac{2}{x^2}\Phi'_{k-m,n}D_\gamma\Phi_{m,\gamma}\alpha_8 + \\ &+ 2\gamma\left[\frac{2\gamma-1}{x^2}\Phi'_{k-m,n}D_\gamma\Phi_{m,\gamma} - (2\gamma+1)\Phi_{m,\gamma}\frac{d}{dx}\frac{D_n\Phi_{k-m,n}}{x^2}\right]\alpha_7\Big\}\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\alpha_1 = (4l-3)\sum_{p=0}^{\min(2\gamma,\,2l-2)}\frac{a_{2l-p-2}a_{2\gamma-p}a_p}{(4l+4\gamma-2p-3)\,a_{2l+2\gamma-p-2}} - \quad \left(a_j = \frac{(2j-1)!!}{j!}\right)$$

$$(l = i-\gamma+p,\ 1 \leqslant l \leqslant n)$$

$$-(4l-3)\sum_{p=0}^{\min(2\gamma,\,2l-2)}\frac{a_{2l-p-2}a_{2\gamma-p}a_p}{(4l+4\gamma-2p-3)\,a_{2l+2\gamma-p-2}}$$

$$(l = i-\gamma+p+1,\ 1 \leqslant l \leqslant n)$$

Остальные α_i ($i = 2, 3, \ldots, 8$) имеют аналогичные выражения.
Решение системы (2.2), удовлетворяющее условиям (2.3), таково:

$$\begin{aligned}\psi_{11}(x) = \frac{a}{2(a-1)^3(4a^2+7a+4)}[&-2a^2(a^2+a+1)x^{-1} + 6(a^4+a^3+a^2+a+1)x - \\ &-(4a^4+4a^3+4a^2+9a+9)x^2 + 3(a+1)x^4]\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\psi_{k,i}(x) = \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} A_{k,i}(x) & x^{1-2i} & x^{3-2i} & x^{2i} & x^{2i+2} \\ A_{k,i}(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A'_{k,i}(1) & 1-2i & 3-2i & 2i & 2i+2 \\ A_{k,i}(a) & a^{1-2i} & a^{3-2i} & a^{2i} & a^{2i+2} \\ A'_{k,i}(a) & (1-2i)a^{-2i} & (3-2i)a^{2-2i} & 2ia^{2i-1} & (2i+2)a^{2i+1}\end{vmatrix} \quad (k \geqslant 2) \tag{2.7}$$

$$\Delta_1 = 4a^{4i+1} - (4i-1)^2a^4 + 2(4i+1)(4i-3)a^2 - (4i-1)^2 + 4a^{3-4i}$$

$$\begin{aligned}A_{k,i}(x) = &\frac{1}{2(4i-1)(4i+1)}\left[x^{2i+2}\int_a^x \xi^{1-2i}\varphi_{k,i}(\xi)\,d\xi - x^{1-2i}\int_1^x \xi^{2i+2}\varphi_{k,i}(\xi)\,d\xi\right] + \\ &+ \frac{1}{2(4i-1)(4i-3)}\left[x^{3-2i}\int_1^x \xi^{2i}\varphi_{k,i}(\xi)\,d\xi - x^{2i}\int_a^x \xi^{3-2i}\varphi_{k,i}(\xi)\,d\xi\right]\end{aligned}$$

$$\varphi_{k,i}(x) = \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} B_{k,i}(x) & x^{-2i} & x^{2-2i} & x^{2i+1} & x^{2i+3} \\ B_{k,i}(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B'_{k,i}(1) & -2i & 2-2i & 2i+1 & 2i+3 \\ B_{k,i}(a) & a^{-2i} & a^{2-2i} & a^{2i+1} & a^{2i+3} \\ B'_{k,i}(a) & -2ia^{-2i-1} & (2-2i)a^{1-2i} & (2i+1)a^{2i} & (2i+3)a^{2i+2} \end{vmatrix} \quad (k \geqslant 1) \tag{2.8}$$

$$\Delta_2 = 4a^{4i+3} - (4i+1)^2 a^4 + 2(4i+3)(4i-1)a^2 - (4i+1)^2 + 4a^{1-4i}$$

$$B_{k,i}(x) = \frac{1}{2(4i+1)(4i+3)}\left[x^{2i+3}\int_a^x \xi^{-2i}\eta_{k,i}(\xi)\,d\xi - x^{-2i}\int_1^x \xi^{2i+3}\eta_{k,i}(\xi)\,d\xi\right] +$$

$$+\frac{1}{2(4i+1)(4i-1)}\left[x^{2-2i}\int_1^x \xi^{2i+1}\eta_{k,i}(\xi)\,d\xi - x^{2i+1}\int_a^x \xi^{2-2i}\eta_{k,i}(\xi)\,d\xi\right]$$

Формулы (2.1), (2.4) — (2.8) полностью определяют функцию тока, а значит, и поле скоростей рассматриваемого течения.

В дальнейшем, при определении силы сопротивления сферы будем использовать значение функции $\psi_{21}(x)$, которая легко находится последовательным применением формул (2.4) — (2.8).

3. Определение давления. Подставим в уравнения (1.2) выражение для функции тока (2.1), затем проинтегрируем второе уравнение системы (1.2) по τ, а результат для определения произвольной функции от x подставим в первое уравнение системы (1.2), при этом необходимо учесть, что функции $\psi_{k,i}(x)$ и $\Phi_{k,i}(x)$ являются решением системы (2.2). Таким путем установим, что гидродинамическое давление имеет следующую структуру:

$$p(x,\tau) = \mathrm{const} + \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-3}\sum_{i=1}^{k} q_{k,i}(x)P_{2i-1}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2}\sum_{i=0}^{k} p_{k,i}(x)P_{2i}(\tau) \tag{3.1}$$

где $P_n(\tau)$ — полиномы Лежандра, а функции $q_{k,i}(x)$ и $p_{k,i}(x)$ выражаются через коэффициенты ряда (2.1) громоздкими формулами, которые приводить не будем. Отметим только, что, в силу граничных условий (2.3)

$$q_{k,1}(1) = -\frac{d^3\psi_{k,1}(1)}{dx^3} \tag{3.2}$$

4. Лобовое сопротивление. В силу симметрии движения, результирующее воздействие жидкости на сферу будет определяться силой, направленной по оси симметрии

$$F = \iint\limits_{(s)} (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\,|_{x=1}\, ds \tag{4.1}$$

причем

$$p_{rr} = \rho u^2\left[-p - \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)\right]$$

$$p_{r\theta} = \frac{\rho u^2}{R}\left[-\frac{x}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{x^3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right] \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), заменяя $p(x, \tau)$ и $\Phi(x, \tau)$ их значениями (3.1) и (2.1), учитывая величины интегралов

$$\int_{-1}^{1} (1-\tau^2) P_n'(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 4/3, & n=1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} \tau P_n(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 2/3, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

а также свойство функций $q_{k,1}(x)$ (3.2), получим

$$F = \frac{4\pi\mu r_1 u}{3} \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-2} \left[\frac{d^3\psi_{k,1}(1)}{dx^3} - 2\frac{d^2\psi_{k,1}(1)}{dx^2} \right] \tag{4.3}$$

Сохраняя только первые два члена ряда (4.3) и используя значения функций $\psi_{11}(x)$ и $\psi_{21}(x)$, найдем величину силы сопротивления с точностью до R^2 включительно

$$F = 6\pi\mu r_1 u \delta_0 \left[1 + \frac{(a-1)\delta_1 - 1080\delta_2 \ln a}{\delta_3} R^2 \right] \tag{4.4}$$

Здесь

$$\delta_0 = \frac{4a(a^5-1)}{(a-1)^4(4a^2+7a+4)}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 = {} & a^2 (2160a^{19} + 43032a^{18} + 240603a^{17} + 820188a^{16} + 2027184a^{15} + \\
& + 4101096a^{14} + 7176300a^{13} + 10982037a^{12} + 14748732a^{11} + 17662944a^{10} + \\
& + 19012953a^9 + 18237504a^8 + 15448392a^7 + 11550072a^6 + 7521360a^5 + \\
& + 4099791a^4 + 1759164a^3 + 544968a^2 + 97008a + 4512) \\
\delta_2 = {} & a^3 (16a^{18} + 112a^{17} + 448a^{16} + 1260a^{15} + 2772a^{14} + 5144a^{13} + 8360a^{12} + \\
& + 11956a^{11} + 15116a^{10} + 17111a^9 + 17409a^8 + 15744a^7 + 12544a^6 + \\
& + 8788a^5 + 5317a^4 + 2631a^3 + 984a^2 + 252a + 36) \\
\delta_3 = {} & 300(a-1)^9 (4a^2 + 7a + 4)^3 (4a^6 + 16a^5 + 40a^4 + 55a^3 + 40a^2 + 16a + 4)
\end{aligned}$$

Приведем выражения коэффициента сопротивления

$$f(a) = \frac{F}{6\pi\mu r_1 u}$$

для различных значений a через число Рейнольдса R:

$f(2) = 7.2941(1 + 0.00113R^2)$
$f(3) = 2.9754(1 + 0.00511R^2)$
$f(4) = 2.1049(1 + 0.01192R^2)$
$f(5) = 1.7558(1 + 0.02152R^2)$
$f(6) = 1.5714(1 + 0.03217R^2)$
$f(7) = 1.4582(1 + 0.04480R^2)$
$f(8) = 1.3820(1 + 0.05871R^2)$
$f(10) = 1.2862(1 + 0.08957R^2)$
$f(20) = 1.1264(1 + 0.22162R^2)$
$f(30) = 1.0810(1 + 0.49890R^2)$
$f(50) = 1.0471(1 + 0.97594R^2)$

Видим, что с ростом a коэффициет сопротивления в целом уменьшается, в то время, как второе слагаемое его, которое происходит от учета нелинейных членов в уравнениях движения, увеличивается.

Отметим, что величина силы сопротивления (4.4) при малых числах Рейнольдса для $a = 10, 20, 30$ мало отличается от ее значений в случае обтекания сферы потоком, равномерным на бесконечности, полученных в работах Озеена [3], Праудмена и Пирсона [4].

Поступила 22 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Odqvist F. K. G. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zäher Flüssigkeiten. Math. Zeitschrift, 1930, 32, No. 3.
2. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
3. Oseen C. W. Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. Arkiv för Matematik Astr. og Fys, 1910, VI, 29.
4. Праудмен И., Пирсон Д. Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и круглого цилиндра. Механика, 1958, 2 (48).