

УДК 622.272: 516.02

Нестационарное концентрационное поле реагирующего газа в окрестности горящей угольной частицы

С.В. Черданцев, П.А. Шлапаков, С.И. Голоскоков, К.С. Лебедев, А.Ю. Ерастов

Научный центр ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности в горной отрасли, ул. Институтская, 3, Кемерово, 650002

E-mails: svch01@yandex.ru (Черданцев С.В.), shlapak1978@mail.ru (Шлапаков П.А.), s.goloskokov@nc-vostnii.ru (Голоскоков С.И.), lebedevks1987@yandex.ru (Лебедев К.С.), erastov_a_y@mail.ru (Ерастов А.Ю.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 16, 2023.

Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Голоскоков С.И., Лебедев К.С., Ерастов А.Ю. Нестационарное концентрационное поле реагирующего газа в окрестности горящей угольной частицы // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 1. — С. 101–114.

В статье рассматривается краевая задача математической физики, описывающая нестационарный процесс диффузии реагирующего газа к угольной частице сферической формы, находящейся в атмосфере горной выработки. Решение краевой задачи построено на базе автомодельных преобразований, являющихся частным случаем группового анализа. Получены формулы для определения концентраций реагирующего газа в окрестности угольной частицы и на ее поверхности. Построены графики зависимостей времени выгорания угольной частицы от ряда ее параметров и выявлены поля концентрации реагирующего газа на различных этапах горения угольной частицы.

DOI: 10.15372/SJNM20230108

Ключевые слова: угольные частицы, стехиометрические коэффициенты, сферические координаты, коэффициент диффузии, закон Аррениуса, нестационарная задача о массопереносе, автомодельное решение.

Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Goloskokov S.I., Lebedev K.S., Erastov A.Yu. Unsteady concentration field of reacting gas in the vicinity of a burning coal particle // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 1. — P. 101–114.

The article deals with a boundary value problem of mathematical physics describing the unsteady process of diffusion of a reacting gas to a spherical coal particle located in the atmosphere of a mine. The solution of the boundary value problem is based on self-similar transformations which are a special case of group analysis. Formulas for determining the concentrations of the reacting gas in the vicinity of the coal particle and on its surface are obtained. Graphs of the dependencies of the burn-out time of the coal particle on a number of its parameters are constructed, and the fields of the reacting gas concentration at various stages of combustion of the coal particle are revealed.

Keywords: carbon particles, stoichiometric coefficients, spherical coordinates, diffusion coefficient, Arrhenius law, unsteady mass transfer problem, self-similar solution.

Введение

Эксплуатация угольных шахт сопровождается разнообразными термодинамическими процессами, причиной которых является угольная пыль, предрасположенная к химиче-

скому реагированию [1–3]. С одной стороны, угольная пыль, осаждающаяся в выработанных пространствах, при определенных условиях образует очаги самонагрева [4], приводящие к изменению температурного поля горных пород и рудничной атмосферы [5].

С другой стороны, взвешенная и витающая в атмосфере горных выработок угольная пыль при наличии источников зажигания склонна к возгоранию [2, 3] и последующему горению, нередко переходящему в детонацию. Процесс горения мелкодисперсных угольных частиц в кинетической области рассмотрен в статье [6], а в статье [7] исследованы режимы их горения в диффузионной области.

В работе [8] экспериментально исследованы газодинамические условия распространения ламинарного пламени в облаках пыли в зависимости от ее физико-химических параметров и выявлены точки бифуркации при переходе ламинарного режима горения в турбулентный.

В статье [9] получены формулы для определения нормальной скорости распространения пламени в зависимости от концентраций горючего и окислителя и проведены оценки относительной роли радиационной теплопередачи и седиментации частиц горючего.

В статье [10] выполнен сравнительный анализ теоретических и экспериментальных данных о параметрах горения в различных газо- и пылегазовоздушных смесях на угольных шахтах и рассмотрены возможные случаи воспламенений и взрывов в шахтах.

В работе [11] рассмотрены две краевые задачи, описывающие стационарный процесс диффузии реагирующего газа к грубодисперсной угольной частице. Первая задача описывает гетерогенный процесс диффузии реагирующего газа к внешней поверхности угольной частицы, а вторая задача описывает гомогенный процесс горения внутри объема частицы. Решения задач получены в замкнутом виде и установлено, что при малых значениях начального радиуса частицы краевые задачи можно объединить.

Однако не стационарность процесса горения, имеющая место в реальных условиях, накладывает влияние на протекание процесса горения, поскольку может существенно отличаться от стационарного режима. Поэтому здесь рассмотрена нестационарная задача, в которой предпринята попытка установить закономерности изменения концентрационных полей реагирующего газа в окрестности угольной частицы и на ее поверхности в различные промежутки времени.

Нестационарную задачу будем рассматривать в рамках следующих допущений:

- 1) угольная частица имеет сферическую форму, начальный и текущий радиусы которой равны соответственно R_0 , R ;
- 2) пренебрегаем химическим реагированием внутри частицы;
- 3) полагаем процесс изменения концентрационных полей изотермическим.

1. Постановка задачи и построение ее решения

Химический состав углей достаточно разнообразный. Кроме углерода, содержание которого изменяется от 70 % до 92 %, неизменными атрибутами углей являются водород, сера, азот, кислород. Достаточно высокое содержание в углях составляют летучие продукты (до 32 %) и зола (до 11 %), в состав которой входят такие элементы, как свинец, серебро, ртуть, магний, железо и др. [12].

Условия горения частиц угольной пыли в горных выработках, как правило, происходит при ее низкой концентрации и избытке кислорода [2, 3]. Поэтому будем считать, что процесс окисления угольных частиц реализуется в виде химической реакции [13]



без учета промежуточных стадий.

Любая химическая реакция горения подчиняется закону сохранения масс. Это означает, что общая масса реагентов, участвующих в реакции, должна быть равна массе продуктов, получаемых в результате реакции. Так в реакции (1.1) участвует $m_y = 12$ г/моль углерода и $m_k = 32$ г/моль кислорода, поэтому общая масса исходных веществ составляет 44 г/моль. В результате реакции (1.1) получается двуокись углерода CO_2 , масса которого также равна 44 г/моль.

Другим важнейшим показателем любой химической реакции является стехиометрический коэффициент ν , показывающий соотношение между массами исходных реагентов и определяемый из равенства [13]:

$$m_y = \nu \cdot m_k, \quad (1.2)$$

Поскольку в реакции (1.1) участвует $m_y = 12$ г/моль углерода и $m_k = 32$ г/моль кислорода, то $\nu = 12/32 = 0.375$.

Как правило, протекание химических реакций горения оказывается подчиненным физическим процессам, в первую очередь, процессам тепло- и массопереноса. Это значит, что процесс горения в общем случае следует рассматривать как физико-химический процесс, скорость протекания которого определяется интенсивностью физических и химических явлений и особенностями их взаимодействия.

В силу третьего допущения мы предполагаем отсутствие градиентов температур как внутри частицы, так и в окружающей среде. Следовательно, мы будем рассматривать процесс горения, определяющийся только концентрационными полями реагирующего газа в окрестности угольной частицы. Известно, что любое концентрационное поле может быть описано уравнением параболического типа [14]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c, \quad (1.3)$$

где c — концентрация реагирующего газа (кислорода), кг/м³; t — время; D — коэффициент диффузии, м²/с; ∇^2 — оператор Лапласа.

Так как рассматриваемая угольная частица имеет сферическую форму, то удобнее перейти в уравнении (1.3) от декартовых координат x, y, z к сферическим координатам r, θ, φ с началом в центре тяжести частицы (рисунок 1).

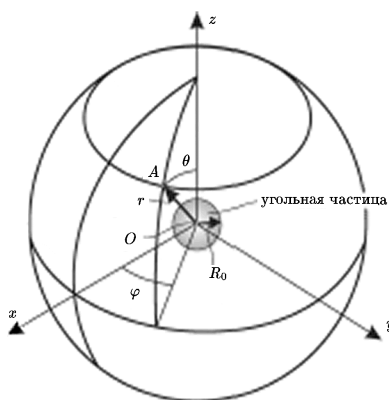


Рис. 1. Угольная частица в сферических координатах

Поскольку между декартовыми и сферическими координатами имеют место соотношения [15]:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

то оператор Лапласа в сферических координатах представляется в виде

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.4)$$

Предположим, что ввиду осевой симметрии сферической частицы искомая концентрация будет зависеть только от одной координаты r . Поэтому производные по координатам θ , φ равны нулю и оператор (1.4) существенно упрощается

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

а уравнение (1.3) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right). \quad (1.5)$$

Поскольку уравнение (1.5) принадлежит классу уравнений параболического типа [14], то его решение должно удовлетворять начальному условию

$$c|_{t=0} = c_0 \quad (1.6)$$

и двум граничным условиям:

$$c|_{r \rightarrow \infty} = c_0, \quad D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_R = k c_R, \quad (1.7)$$

первое из которых является условием Дирихле, а второе — условием Неймана. В формулах (1.6) и (1.7) обозначено: c_0 — начальная концентрация реагирующего газа; c_R — его концентрация на поверхности частицы радиуса R ; k — константа скорости реакции углерода с кислородом, которая определяется по закону Аррениуса [1, 13]:

$$k = k_0 e^{-E/\Re T}, \quad (1.8)$$

где k_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации, представляющая собой количество энергии, которое необходимо для протекания реакции; $\Re$ — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Уравнение (1.5), начальное условие (1.6) и граничные условия (1.7) образуют начально-краевую задачу смешанного типа, для отыскания решения которой существуют различные методы. Наиболее распространенным является метод разделения переменных [14], когда искомая функция $c(r, t)$ представляется в виде произведения функций, одна из которых $c(r)$ зависит только от координаты, а другая $c(t)$ — только от времени:

$$c(r, t) = c(r)c(t). \quad (1.9)$$

После подстановки (1.9) в уравнение (1.5) и выполнения ряда преобразований уравнение (1.5) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых, как правило, выражаются через специальные функции, в связи с чем возникают сложности с оценкой сходимости полученных решений.

Еще один способ построения решения краевой задачи (1.5)–(1.7) базируется на теории группового анализа дифференциальных уравнений [16]. Эта теория дает алгоритмы выявления в полном объеме свойства инвариантности любых дифференциальных уравнений. Использование этого свойства позволяет отыскивать классы частных решений путем упрощения исходных уравнений за счет уменьшения в них числа независимых переменных.

Основой группового анализа является свойство какой-либо системы оставаться инвариантной при некоторых преобразованиях всех участвующих в системе переменных. Если единственным инвариантным характеристическим свойством преобразований является коммутативность, то их относят к так называемым группам растяжений и называют автомодельными [16, 17].

Общее представление автомодельного решения применительно к уравнению (1.5) имеет следующий вид [16, 17]:

$$c(r, t) = c_0 + t^\beta F(\lambda), \quad (1.10)$$

в котором $F(\lambda)$ — искомая функция, аргумент которой λ связан с исходными переменными r, t зависимостью

$$\lambda = r \cdot t^{-\alpha}, \quad (1.11)$$

где α, β — постоянные коэффициенты, называемые показателями автомодельности, подлежащие определению.

Дифференцируя выражение (1.10) с учетом формулы (1.11) по времени и координате, имеем

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \beta t^{\beta-1} F(\lambda) + t^\beta \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \beta t^{\beta-1} F(\lambda) - t^\beta \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} r \alpha t^{-\alpha-1}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = t^\beta \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = t^\beta \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} t^{-\alpha}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = t^\beta t^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial r} = t^\beta t^{-\alpha} \frac{\partial^2 F(\lambda)}{\partial \lambda^2} t^{-\alpha} = t^{\beta-2\alpha} \frac{\partial^2 F(\lambda)}{\partial \lambda^2}. \quad (1.14)$$

Подставив выражения (1.12)–(1.14) в уравнение (1.5), приходим к уравнению

$$\beta t^{\beta-1} F(\lambda) - \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} r \alpha t^{-\alpha-1} = D \left(t^{\beta-2\alpha} \frac{\partial^2 F(\lambda)}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{r} t^\beta \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} t^{-\alpha} \right),$$

сократив которое на $t^{\beta-1}$, получим

$$\beta F(\lambda) - \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} \lambda \alpha = D \left(t^{-2\alpha+1} \frac{\partial^2 F(\lambda)}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} t^{-2\alpha+1} \right). \quad (1.15)$$

Легко заметить, что, приняв в уравнении (1.15) параметр $\alpha = 1/2$, мы исключаем из (1.15) время t , в связи с чем оно преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\beta F(\lambda) - \frac{1}{2} \lambda \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = D \left(\frac{d^2 F(\lambda)}{d\lambda^2} + \frac{2}{\lambda} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right). \quad (1.16)$$

Далее преобразуем уравнение (1.16), умножив обе его части на λ^2 :

$$\beta F(\lambda) \lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda^3 \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = D \left(\lambda^2 \frac{d^2 F(\lambda)}{d\lambda^2} + 2\lambda \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right). \quad (1.17)$$

Обратим внимание, что правую часть уравнения (1.17) можно “свернуть”, представив в виде

$$D \left(\lambda^2 \frac{d^2 F(\lambda)}{d\lambda^2} + 2\lambda \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right) = D \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda^2 \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right). \quad (1.18)$$

Если принять в (1.17) параметр $\beta = -3/2$, то и к левой части уравнения (1.17) можно применить процедуру “свертывания”

$$-\frac{3}{2} \lambda^2 F(\lambda) - \frac{1}{2} \lambda^3 \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2} \lambda^3 F(\lambda) \right). \quad (1.19)$$

Подставив формулы (1.18) и (1.19) в уравнение (1.17), приходим к уравнению

$$-\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2} \lambda^3 F(\lambda) \right) = D \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda^2 \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right), \quad (1.20)$$

интегрируя которое, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$-\frac{1}{2} \lambda^3 F(\lambda) = D \lambda^2 \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} + A_1,$$

которое приведем к каноническому виду

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda}{2D} F(\lambda) = -\frac{A_1}{D} \lambda^{-2}, \quad (1.21)$$

где A_1 — постоянная интегрирования.

Решение уравнения (1.21) построим методом Лагранжа [18], для чего вначале рассмотрим уравнение (1.21) без правой части

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda}{2D} F(\lambda) = 0.$$

Разделив в полученном уравнении переменные

$$\frac{dF(\lambda)}{F(\lambda)} = -\frac{\lambda}{2D} d\lambda,$$

находим его решение

$$F(\lambda) = B(\lambda) e^{-\lambda^2/4D}, \quad (1.22)$$

где $B(\lambda)$, согласно методу Лагранжа, является не постоянной величиной, а функцией.

Подставляя решение (1.22) в уравнение (1.21), приходим к уравнению

$$\frac{dB(\lambda)}{d\lambda} e^{-\lambda^2/4D} = -\frac{A_1}{D} \lambda^{-2},$$

откуда определяем функцию

$$B(\lambda) = -\frac{A_1}{D} \int e^{-\lambda^2/4D} \lambda^{-2} d\lambda + A_2, \quad (1.23)$$

интеграл в которой находим, используя процедуру интегрирования по частям

$$\int e^{\lambda^2/4D} \lambda^{-2} d\lambda = -\lambda^{-1} e^{\lambda^2/4D} + \frac{1}{2D} \int e^{\lambda^2/4D} d\lambda.$$

Найденный интеграл подставляем в формулу (1.23):

$$B(\lambda) = -\frac{A_1}{D} \left[-\lambda^{-1} e^{\lambda^2/4D} + \frac{1}{2D} \int e^{\lambda^2/4D} d\lambda \right] + A_2, \quad (1.24)$$

а искомую функцию $F(\lambda)$ определим по формуле (1.22):

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \left\{ -\frac{A_1}{D} \left[-\lambda^{-1} e^{\lambda^2/4D} + \frac{1}{2D} \int e^{\lambda^2/4D} d\lambda \right] + A_2 \right\} e^{-\lambda^2/4D} \\ &= \frac{A_1}{D} \lambda^{-1} - \frac{A_1 e^{-\lambda^2/4D}}{2D^2} \int e^{\lambda^2/4D} d\lambda + A_2 e^{-\lambda^2/4D}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где A_2 — еще одна постоянная интегрирования.

Подставив $F(\lambda)$ в формулу (1.10), найдем концентрацию реагирующего газа

$$c(r, t) = c_0 + t^\beta \left(\frac{A_1}{D} \lambda^{-1} - \frac{A_1 e^{-\lambda^2/4D}}{2D^2} \int e^{\lambda^2/4D} d\lambda + A_2 e^{-\lambda^2/4D} \right), \quad (1.26)$$

и учитывая, что величина λ определена по формуле (1.11), в которой $\alpha = 1/2$, $\beta = -3/2$, преобразуем формулу (1.26) к виду

$$c(r, t) = c_0 + \frac{A_1}{Drt} - \frac{A_1 e^{-r^2/4Dt}}{2D^2 t \sqrt{t}} \int e^{-r^2/4Dt} d\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \frac{A_2}{t \sqrt{t}} e^{-r^2/4Dt}. \quad (1.27)$$

Далее найдем пределы величин, входящих в формулу (1.27) при $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_1}{Drt} \rightarrow \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_1 e^{-r^2/4Dt}}{2D^2 t \sqrt{t}} \int e^{-r^2/4Dt} d\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \rightarrow \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_2 e^{-r^2/4Dt}}{t \sqrt{t}} = 0,$$

в силу чего функция $c(r, t)$ в (1.27) не определена при $t = 0$. Чтобы исключить эту неопределенность, положим постоянную $A_1 = 0$, и тогда формула (1.27) приобретает вид

$$c = c_0 + \frac{A_2}{t \sqrt{t}} e^{-r^2/4Dt}. \quad (1.28)$$

Для определения постоянной интегрирования A_2 учтем, что в процессе выгорания угольной частицы ее масса и радиус за бесконечно малый промежуток времени dt уменьшаются на бесконечно малые величины dm_y и dr , которые связаны между собой следующим очевидным соотношением:

$$dm_y = -4\pi r^2 \rho_y dr, \quad (1.29)$$

где ρ_y — плотность угольной частицы, кг/м^3 .

Выгорание реагирующего газа приводит к уменьшению его концентрации в окрестности угольной частицы на величину $c_0 - c$. В связи с этим масса реагирующего газа m_k изменится на бесконечно малую величину dm_k , которую мы определим как

$$dm_k = 4\pi r^2(c_0 - c)dr. \quad (1.30)$$

Интегрируя выражения (1.29), (1.30) и подставляя в равенство (1.2), получим соотношение

$$-\rho_y \int_{R_0}^R r^2 dr = \nu \int_R^\infty r^2(c_0 - c)dr,$$

подставив в которое разность концентраций $c - c_0$ из формулы (1.28), получим равенство

$$\frac{\rho_y(R_0^3 - R^3)}{3\nu} = -A_2 \int_R^\infty \frac{e^{-r^2/4Dt}}{t\sqrt{t}} r^2 dr,$$

откуда находим постоянную интегрирования

$$A_2 = -\frac{\rho_y(R_0^3 - R^3)}{3\nu I}, \quad (1.31)$$

где интеграл

$$I = \int_R^\infty \frac{e^{-r^2/4Dt}}{t\sqrt{t}} r^2 dr \quad (1.32)$$

может быть найден в квадратурах. Для этого выполним ряд преобразований в (1.32). Вначале перейдем к новым переменным

$$\delta = \frac{r}{\sqrt{4Dt}}, \quad \Delta = \frac{R}{\sqrt{4Dt}}, \quad (1.33)$$

в связи с чем подынтегральное выражение в (1.32) приведем к виду

$$\frac{e^{-r^2/4Dt}}{t\sqrt{t}} \frac{r^2}{4Dt} 4Dt d\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\sqrt{4Dt}\right) = \frac{e^{-\delta^2}}{t\sqrt{t}} \delta^2 4Dt \sqrt{4Dt} d\delta = 4\sqrt{D^3} e^{-\delta^2} \delta d(\delta^2) \quad (1.34)$$

и поменяем пределы интегрирования. Из формулы (1.33) следует, что при $r = R$ нижним пределом является величина Δ , а при $r \rightarrow \infty$ является величина $\delta \rightarrow \infty$ и, следовательно, интеграл (1.32) мы представим следующим образом:

$$I = 4\sqrt{D^3} \int_{\Delta}^{\infty} e^{-\delta^2} \delta d(\delta^2). \quad (1.35)$$

Полученный интеграл найдем методом интегрирования по частям. Приняв

$$\delta = u, \quad e^{-\delta^2} d\delta^2 = dv$$

и выполняя преобразования, приведем интеграл в формуле (1.35) к следующему виду:

$$\int_{\Delta}^{\infty} e^{-\delta^2} \delta d(\delta^2) = \Delta e^{-\Delta^2} + \int_0^{\infty} e^{-\delta^2} d\delta - \int_0^{\Delta} e^{-\delta^2} d\delta, \quad (1.36)$$

где мы учли свойство коммутативности определенного интеграла.

Обратим внимание, что второе слагаемое в формуле (1.36) является интегралом Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta^2} d\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (1.37)$$

а третье слагаемое представляется в виде

$$\int_0^{\Delta} e^{-\delta^2} d\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(\Delta), \quad (1.38)$$

где $\Phi(\Delta)$ — значение функции Лапласа, аргументом которой является величина Δ .

Таким образом, с учетом формул (1.36)–(1.38) мы находим интеграл (1.35):

$$I = 2\sqrt{D^3} \left\{ 2\Delta e^{-\Delta^2} + \sqrt{\pi} [1 - \Phi(\Delta)] \right\},$$

что позволяет определить по формуле (1.31) постоянную A_2 :

$$A_2 = -\frac{\rho_y(R_0^3 - R^3)}{6\nu\sqrt{D^3} \left\{ 2\Delta e^{-\Delta^2} + \sqrt{\pi} [1 - \Phi(\Delta)] \right\}},$$

подставив которую в формулу (1.28), получим искомую концентрацию реагирующего газа

$$c = c_0 - \frac{\rho_y(R_0^3 - R^3)e^{-\delta}}{6\nu Dt \left\{ Re^{-\Delta} + \sqrt{\pi Dt} [1 - \Phi(\Delta)] \right\}}, \quad (1.39)$$

что представляет собой решение рассматриваемой здесь краевой задачи (1.5)–(1.7).

При $r = R$ формула преобразуется к виду

$$c_R = c_0 - \frac{\rho_y(R_0^3 - R^3)e^{-\Delta}}{6\nu Dt \left\{ Re^{-\Delta} + \sqrt{\pi Dt} [1 - \Phi(\Delta)] \right\}} \quad (1.40)$$

и позволяет определить концентрацию реагирующего газа на поверхности частицы.

Формулу (1.39) мы можем привести к более удобному виду, для чего перепишем формулу (1.40) следующим образом:

$$c_0 - c_R = \frac{\rho_y(R_0^3 - R^3)e^{-\Delta}}{6\nu Dt \left\{ Re^{-\Delta} + \sqrt{\pi Dt} [1 - \Phi(\Delta)] \right\}}, \quad (1.41)$$

что позволяет сначала переписать формулу (1.39) как

$$c = c_0 - \frac{\rho_y(R_0^3 - R^3)e^{-\Delta}}{6\nu Dt \left\{ Re^{-\Delta} + \sqrt{\pi Dt} [1 - \Phi(\Delta)] \right\}} \frac{e^{-\delta}}{e^{-\Delta}},$$

а затем, с учетом формул (1.33), привести ее к окончательному виду

$$c = c_0 - (c_0 - c_R) e^{-\frac{r-R}{\sqrt{4Dt}}}. \quad (1.42)$$

2. Анализ результатов

Обратим внимание, что формула (1.42) содержит неизвестный радиус R частицы, изменяющийся в процессе горения. Для его определения учтем, что за бесконечно малое время dt радиус частицы уменьшится на величину dR , а концентрация реагирующего газа на поверхности частицы изменится на величину $dc = c_0 - c_R$. И поэтому формулы (1.29) и (1.30) мы можем представить как

$$dm_y = -4\pi R^2 \rho_y dR, \quad dm_k = 4\pi R^2 dc dR. \quad (2.1)$$

Умножим и разделим правую часть второй формулы (2.1) на бесконечно малый промежуток времени dt и учтем, что величина $dRdc/dt$ является скоростью W горения угольной частицы, которую мы можем определить также по формуле [1, 13]:

$$W = kc_R,$$

с учетом которой вторую формулу (2.1) преобразуем к виду

$$dm_k = 4\pi R^2 kc_R dt. \quad (2.2)$$

Подставив первую формулу (2.1) и формулу (2.2) в равенство (1.2) и выполнив в нем элементарные преобразования, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\nu k}{\rho_y} c_R,$$

которое с учетом формул (1.40) и (1.33) представим как

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\nu k}{\rho_y} \left\{ c_0 - \frac{\rho_y (R_0^3 - R^3) e^{-R/\sqrt{4Dt}}}{6\nu Dt \left\{ R e^{-R/\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\pi Dt} \left[1 - \Phi \left(\frac{R}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \right\}} \right\}. \quad (2.3)$$

Найти решение уравнения (2.3) в квадратурах не представляется возможным. Поэтому построим приближенное решение, представив уравнение (2.3) в конечных разностях, учитывая, что

$$dR \approx \Delta R = R_1 - R_0, \quad dt \approx \Delta t = t_1 - t_0, \quad (2.4)$$

где t_0 — начальный момент времени, который можно положить равным $t_0 = 0$, а R_1 — радиус частицы в момент времени t_1 .

Подставив формулы (2.4) в уравнение (2.3) и выполнив в нем преобразования, приведем его к трансцендентному уравнению

$$R_1 + \frac{\nu k t_1}{\rho_y} \left\{ c_0 - \frac{\rho_y (R_0^3 - R_1^3) e^{-R_1/\sqrt{4Dt_1}}}{6\nu Dt_1 \left\{ R_1 e^{-R_1/\sqrt{4Dt_1}} + \sqrt{\pi Dt_1} \left[1 - \Phi \left(\frac{R_1}{\sqrt{4Dt_1}} \right) \right] \right\}} \right\} - R_0 = 0, \quad (2.5)$$

корни которого найдены с помощью связки функций “Given–Find” программы MathCAD [19].

Вычислительные процедуры выполнялись при следующих исходных данных: $R_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м; $c_0 = 0.23$ кг/м³; $D = 0.4 \cdot 10^{-3}$ м²/с; $\nu = 0.375$; $\rho_y = 1250$ кг/м³; $k_0 = 3.5 \cdot 10^3$ м/с; $E = 96.63 \cdot 10^3$ Дж/моль; $\Re = 8.314$ Дж/(моль · К); $T = 1673$ К.

Вычисления начнем с определения параметра k по формуле (1.8):

$$k = 3.5 \cdot 10^3 e^{-96.63 \cdot 10^3 / 8.314 \cdot 1673} = 4.175 \text{ м/с}.$$

Затем из уравнения (2.5) определяем значения радиуса частицы R_1 в различные промежутки времени. Так при $t_1 = 0.1$ с радиус частицы равен $R_1 = 3.73 \cdot 10^{-4}$ м, при $t_1 = 0.5$ с радиус частицы равен $R_1 = 2.593 \cdot 10^{-4}$ м и т. д. По вычисленным значениям радиуса частицы в различные промежутки времени построен график функции $R(t)$ (рис. 2), из которого вытекает, что процесс выгорания частицы имеет практически линейный характер. Из графика следует, что время выгорания угольной частицы, начальный радиус которой $R_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м, составляет 1.399 с.

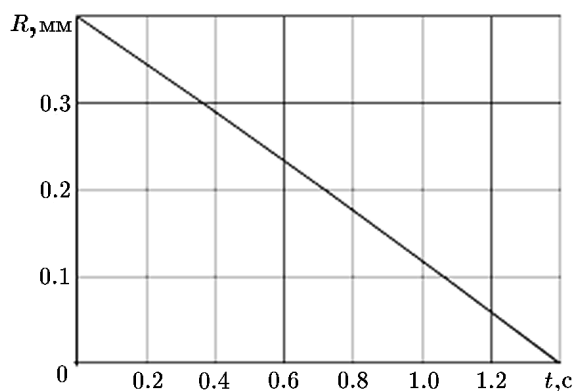


Рис. 2. Зависимость радиуса угольной частицы от времени ее горения

Подставляя различные промежутки времени и соответствующие им значения R_1 сначала во вторую формулу (1.33), а затем в формулу (1.40), мы найдем концентрацию реагирующего газа на поверхности угольной частицы, а по формуле (1.42) — в ее окрестности.

На рис. 3 графики изображают распределение концентрационного поля в окрестности угольной частицы в различные промежутки времени.

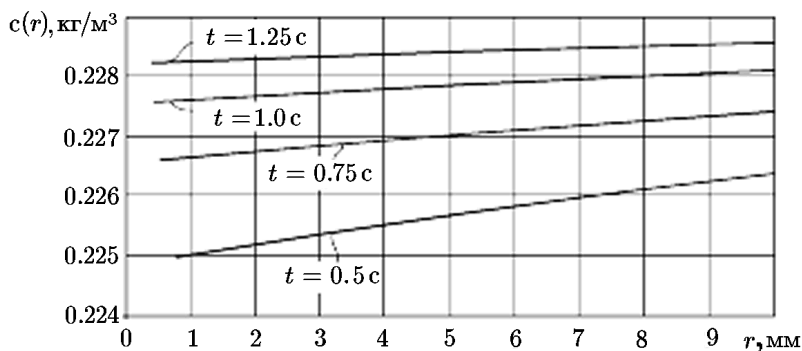


Рис. 3. Поле концентрации реагирующего газа в окрестности угольной частицы

Все графики представляют собой наклонные практически прямые линии с положительным угловым коэффициентом. Обратим внимание, что концентрация в окрестности частицы через 1.25 с выше, чем через 0.5 с после начала горения. На наш взгляд, это обусловлено уменьшением поверхности частицы и, как следствие, снижением необходимого

количества реагирующего газа для протекания реакции горения, что в свою очередь приводит к росту концентрации газа в окрестности частицы, хотя и незначительно. При полном выгорании частицы концентрация газа, очевидно, полностью восстановится.

3. Выводы

1. Сформулирована краевая задача, описывающая нестационарный процесс диффузии реагирующего газа к угольной частице сферической формы, находящейся в рудничной атмосфере.

2. На базе автомодельных преобразований построено решение краевой задачи. Получены формулы для определения концентраций реагирующего газа на поверхности угольной частицы и в ее окрестности.

3. Вычислены значения концентрации реагирующего газа на поверхности частицы в различные промежутки времени и определено время, в течение которого рассматриваемая угольная частица полностью выгорает. Построен график, выражающий зависимость радиуса угольной частицы от времени ее горения, который показывает, что процесс выгорания угольных частиц имеет практически линейный характер.

4. Построены графики зависимости концентрации газа от сферической координаты, из которых вытекает, что распределение поля концентраций реагирующего газа в окрестности горящей угольной частицы в различные промежутки времени имеет характер, близкий линейному.

Литература

1. **Франк-Каменецкий Д.А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1987.
2. **Канторович Б.В.** Основы теории горения и газификации твердого топлива. — М.: Книга по Требованию, 2013.
3. **Виленский Т.В., Хзмалян Д.М.** Динамика горения пылевидного топлива. — М.: Наука, 1977.
4. **Линденау Н.И., Маевская В.М., Крылов В.Ф.** Происхождение, профилактика и тушение эндогенных пожаров в угольных шахтах. — М.: Недра, 1977.
5. **Chanyshev A.I.** A method to determine a body's thermal state // J. of Mining Science. — 2012. — Vol. 48, iss. 4. — P. 660–668.
6. **Черданцев С.В., Ли Х.У., Филатов Ю.М., Ботвенко Д.В., Шлапаков П.А., Колыхалов В.В.** Горение мелкодисперсных пылегазовоздушных смесей в атмосфере горных выработок // ФТПРПИ. — 2018. — № 2. — С. 172–180. — DOI: 10.15372/FTPRPI20180219. Перевод: Cherdantsev S.V., Li Hi Un, Filatov Yu.M., Botvenko D.V., Shlapakov P.A., Kolykhalov V.V. Combustion of fine dispersed dust-gas-air mixtures in underground workings // J. of Mining Science March. — 2018. — Vol. 54, iss. 2. — P. 339–346.
7. **Черданцев С.В., Филатов Ю.М., Шлапаков П.А.** Режимы диффузионного горения мелкодисперстных пылегазовоздушных смесей в атмосфере горных выработок // Уголь. — 2020. — № 2. — С. 27–32. — DOI: 10.18796/0041-5790-2020-2-27-32.
8. **Shevchuk V.G., Kondrat'ev E.N., Zolotko A.N., Sidorov A.E., Oparin A.S.** Wave regimes of dust combustion // Combustion, Explosion, and Shock Waves. — 2014. — Vol. 50. — P. 80–86.

9. **Sidorov A.E., Shevchuk V.G., Kondrat'ev E.N.** Conductive-radiative model of a laminar flame in dust suspensions // *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. — 2013. — Vol. 49. — P. 257–263.
10. **Vasilev A.A., Pinaev A.V., Trubisyn A.A., Crachev A.Y., Trotsyuk A.V., Fomin P.A., Trilis A.V.** What is burning in coal mines: methane or dust? // *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. — 2017. — Vol. 53, iss. 1. — P. 8–14.
11. **Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Ерастов А.Ю., Хаймин С.А., Лебедев К.С., Колыхалов В.В., Шлапаков Е.А.** Моделирование процесса молекулярной диффузии реагирующего газа к покоящейся грубодисперсной угольной частице в горной выработке // *Вестник Научного центра ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности*. — 2017. — № 4. — С. 13–21.
12. **Нифантов Б.Ф., Потапов В.П., Анферов Б.А., Кузнецова Л.В.** Угли Кузбасса: химические элементы-примеси и технологии их извлечения при комплексном освоении месторождений. — Кемерово: ИУ СО РАН, 2011.
13. **Денисов Е.Т., Саркисов О.М., Лихтенштейн Г.И.** Химическая кинетика: Учебник для вузов. — М.: Химия, 2000.
14. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
15. **Бермант А.Ф., Араманович И.Г.** Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. 11-е изд., стер. — СПб.: Изд-во “Лань”, 2005.
16. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
17. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1977.
18. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.
19. **Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В.** Решение задач вычислительной математики в Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. — М.: НТ Пресс, 2006.

Поступила в редакцию 15 марта 2022 г.

После исправления 15 апреля 2022 г.

Принята к печати 23 ноября 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Frank-Kameneckii D.A.** Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoi kinetike. — М.: Nauka, 1987.
2. **Kantorovich B.V.** Osnovy teorii goreniya i gazifikacii tverdogo topliva. — М.: Kniga po Trebovaniyu, 2013.
3. **Vilenskii T.V., Khzmalyan D.M.** Dinamika goreniya pylevidnogo topliva. — М.: Nauka, 1977.
4. **Lindenau N.I., Maevskaya V.M., Krylov V.F.** Proiskhozhdenie, profilaktika i tushenie endogennykh pozharov v ugol'nykh shakhtakh. — М.: Nedra, 1977.
5. **Chanyshev A.I.** A method to determine a body's thermal state // *J. of Mining Science*. — 2012. — Vol. 48, iss. 4. — P. 660–668.
6. **Cherdancev S.V., Li Kh.U., Filatov Yu.M., Botvenko D.V., Shlapakov P.A., Kolykhalov V.V.** Gorenje melkodispersnykh pylegazovozdushnykh smesei v atmosfere gornykh vyrabotok // *FTRPI*. — 2018. — № 2. — S. 172–180. — DOI: 10.15372/FTRPI20180219. Pervod: Cherdantsev S.V., Li Hi Un, Filatov Yu.M., Botvenko D.V., Shlapakov P.A., Kolykhalov V.V. Combustion of fine dispersed dust-gas-air mixtures in underground workings // *J. of Mining Science March*. — 2018. — Vol. 54, iss. 2. — P. 339–346.

7. **Cherdancev S.V., Filatov Yu.M., Shlapakov P.A.** Rezhimy diffuzionnogo gorenija melkodisperstnykh pylegazovozdushnykh smesei v atmosfere gornykh vyrabotok // Ugol'. — 2020. — № 2. — S. 27–32. — DOI: 10.18796/0041-5790-2020-2-27-32.
8. **Shevchuk V.G., Kondrat'ev E.N., Zolotko A.N., Sidorov A.E., Oparin A.S.** Wave regimes of dust combustion // Combustion, Explosion, and Shock Waves. — 2014. — Vol. 50. — P. 80–86.
9. **Sidorov A.E., Shevchuk V.G., Kondrat'ev E.N.** Conductive-radiative model of a laminar flame in dust suspensions // Combustion, Explosion, and Shock Waves. — 2013. — Vol. 49. — P. 257–263.
10. **Vasilev A.A., Pinaev A.V., Trubisyn A.A., Crachev A.Y., Trotsyuk A.V., Fomin P.A., Trilis A.V.** What is burning in coal mines: methane or dust? // Combustion, Explosion, and Shock Waves. — 2017. — Vol. 53, iss. 1. — P. 8–14.
11. **Cherdancev S.V., Shlapakov P.A., Erastov A.Yu., Khaimin S.A., Lebedev K.S., Kolykhalov V.V., Shlapakov E.A.** Modelirovanie processa molekulyarnoi diffuzii reagiruyushchego gaza k pokoyascheisya grubodispersnoi ugol'noi chastice v gornoj vyrabotke // Vestnik Nauchnogo centra VostNII po promyshlennoi i ekologicheskoi bezopasnosti. — 2017. — № 4. — S. 13–21.
12. **Nifantov B.F., Potapov V.P., Anferov B.A., Kuznecova L.V.** Ugli Kuzbassa: khimicheskie elementy-primesi i tekhnologii ikh izvlecheniya pri kompleksnom osvoenii mestorozhdenii. — Kemerovo: IU SO RAN, 2011.
13. **Denisov E.T., Sarkisov O.M., Likhtenshtein G.I.** Khimicheskaya kinetika: Uchebnik dlya vuzov. — M.: Khimiya, 2000.
14. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki. — M.: Vysshaya shkola, 1970.
15. **Bermant A.F., Aramanovich I.G.** Kratkii kurs matematicheskogo analiza: Uchebnik dlya vuzov. 11-e izd., ster. — SPb.: Izd-vo "Lan", 2005.
16. **Ovsyannikov L.V.** Gruppovoi analiz differencial'nykh uravnenii. — M.: Nauka, 1978.
17. **Sedov L.I.** Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. — M.: Nauka, 1977.
18. **Pontryagin L.S.** Obyknoennye differencial'nye uravneniya. — M.: Nauka, 1974.
19. **Alekseev E.R., Chesnokova O.V.** Reshenie zadach vychislitel'noi matematiki v Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. — M.: NT Press, 2006.