УДК 519.624, 534.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТРУН ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ КОЛЕБАНИЙ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМ НЕСИММЕТРИЧНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УПРУГОСТИ

И. М. Утяшев*, А. М. Ахтямов*,**

* Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа, Россия

** Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

E-mails: utyashevim@mail.ru, akhtyamovam@mail.ru

Рассматривается обратная задача идентификации краевых условий для задачи, описывающей колебания струны, происходящие в упругой внешней среде, коэффициент упругости которой описывается несимметрическим потенциалом. Показано, что в отличие от случая симметрического потенциала краевые условия могут быть идентифицированы однозначно, однако при этом, вообще говоря, необходимо использовать не две, а три собственные частоты колебаний. Рассмотрены случаи, когда возможна однозначная идентификация по двум собственным частотам. Предложены методы определения граничных условий по двум и трем собственным частотам. Проанализирована погрешность методов.

Ключевые слова: несимметрический потенциал, обратная задача, собственные значения, струна, идентификация.

DOI: 10.15372/PMTF20180423

Введение. В работах [1, 2] решены задачи определения граничных условий закрепления струн по собственным частотам колебаний для случаев, когда потенциал отсутствует ($q(x) = 0$) и когда он является симметрическим ($q(x) = q(1-x)$). В [1, 2] показано, что краевые условия восстанавливаются по двум собственным частотам. При этом не определено, каким концам струны соответствуют эти условия. В [3] решалась задача идентификации краевых условий Штурма $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(1) + Hy(1) = 0$. В [4–9] рассмотрены задачи идентификации краевых условий и условий сопряжения для стержней и пластин. В [9–12] решались обратные спектральные задачи Штурма — Лиувилля, коэффициенты краевых условий идентифицировались вместе с коэффициентами дифференциальных уравнений. При этом в качестве данных для восстановления краевых условий использовались несколько спектров или спектр с дополнительными данными (функция Вейля, матрица Вейля, спектральная функция, весовые числа и т. п.).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и АН Республики Башкортостан (коды проектов 18-51-06002-Аз_а, 16-31-00077-мол_а, 17-41-020230-р_а, 17-41-020400-р_а).

В настоящей работе показано, что в случае несимметрического потенциала ($q(x) \neq q(1-x)$) вид и параметры краевых условий могут быть определены однозначно, однако при этом, вообще говоря, требуется использовать не две, а три собственные частоты колебаний.

Постановка задачи. Рассматриваются колебания струны, описываемые уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u \tag{1}$$

с краевыми условиями на левом и правом концах [13, 14]

$$b_{11}u_x(0,t) - b_{12}u(0,t) = 0, \qquad b_{23}u_x(l,t) + b_{24}u(l,t) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)u$ — слагаемое, характеризующее упругость среды, причем $q(x) \in \mathbb{C}^\infty[0,l]$, $x \in \mathbb{R}$; $b_{ij} \geqslant 0$. Тип закрепления струны зависит от значений переменных b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24}. Варьируя коэффициенты, можно реализовать жесткое, свободное либо упругое закрепление, причем на разных концах возможны различные типы закрепления.

Прямой задачей будем называть задачу определения собственных частот колебаний струны, если известны вид краевого условия и параметры b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24}, обратной — задачу идентификации краевых условий по известным собственным частотам.

Сформулируем прямую и обратную задачи с использованием обозначений задачи Штурма — Лиувилля и характеристического определителя.

После замены $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ и введения обозначений $\xi = x/l$ и $\lambda^2 = \omega^2 l^2/a^2$ получаем задачу Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y; \tag{3}$$

$$a_{11}y'(0) - a_{12}y(0) = 0, \qquad a_{23}y'(1) + a_{24}y(1) = 0, \tag{4}$$

где $a_{11} = b_{11}/l$; $a_{12} = b_{12}$; $a_{23} = b_{23}/l$; $a_{24} = b_{24}$; потенциал $q(x) \neq 0$ несимметричен: $q(1-x) \neq q(x)$. Случай, когда потенциал $q(x)$ симметричен, рассмотрен в работе [2].

Обозначим матрицу, состоящую из коэффициентов a_{ij} краевых условий (4), через A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Исходя из физического смысла задачи коэффициенты матрицы A можно считать неотрицательными. Матрицу A будем называть матрицей краевых условий.

Решение прямой задачи (3), (4) в виде ряда и оценка его сходимости подробно описаны в работе [2]. Заметим, что спектр собственных частот представляет собой нули характеристического определителя [9. С. 33]:

$$\Delta(\lambda) = J_{13}f_{13}(\lambda) + J_{14}f_{14}(\lambda) + J_{23}f_{23}(\lambda) + J_{24}f_{24}(\lambda) = 0. \tag{6}$$

Здесь $J_{ij} = \det\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$ — определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы краевых условий A [9. С. 34]. В частности, для матрицы (5) определители J_{ij} вычисляются по формулам $J_{13} = a_{11}a_{23}$, $J_{14} = a_{11}a_{24}$, $J_{23} = a_{12}a_{23}$, $J_{24} = a_{12}a_{24}$. Коэффициенты f_{ij} находятся из следующих равенств [9. С. 33]:

$$f_{13}(\lambda) = y_1'(1), \quad f_{14}(\lambda) = y_1(1), \quad f_{23}(\lambda) = y_2'(1), \quad f_{24}(\lambda) = y_2(1).$$

Здесь $y_1(x) = y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x) = y_2(x,\lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (3), удовлетворяющие условиям $y_1(0) = y_2'(0) = 1$, $y_1'(0) = y_2(0) = 0$. В отличие от случая симметрического потенциала все функции f_{ij} линейно независимы. Линейная независимость следует из асимптотических представлений [11] и неравенства $y_1(1) \neq y_2'(1)$ в случае несимметрического потенциала [11, 12].

При нахождении собственных значений с переменным потенциалом $q(x)$ используется разложение решений $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ уравнения (3) по формуле Тейлора по x, λ. В результате характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ оказывается знакочередующимся рядом. Остаток этого ряда оценивается по признаку Лейбница первым членом остатка. Для первых трех собственных значений он оказывается очень малым числом, что обусловливает высокую точность вычисления собственных значений.

Обратная задача формулируется через функцию (6) следующим образом: коэффициенты a_{ij} матрицы краевых условий A неизвестны, ранг матрицы A равен двум, потенциал $q(x)$ несимметричен: $q(1-x) \neq q(x)$, известны два (три) собственных значения λ_1, λ_2 (λ_3) соответствующей задачи. Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.

С помощью линейных преобразований строк при условии $J_{13} \neq 0$ матрицу краевых условий можно представить с использованием ее определителей J_{ij} в следующей канонической форме [1]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & J_{23}/J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & J_{14}/J_{13} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В зависимости от того, какой из определителей не равен нулю, матрица A имеет следующую каноническую форму:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & J_{24}/J_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{13}/J_{14} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{при} \quad J_{14} \neq 0; \tag{8}$$

$$A = \begin{pmatrix} J_{13}/J_{23} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & J_{24}/J_{23} \end{pmatrix} \qquad \text{при} \quad J_{23} \neq 0; \tag{9}$$

$$A = \begin{pmatrix} J_{14}/J_{24} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{23}/J_{24} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{при} \quad J_{24} \neq 0. \tag{10}$$

Для определителей матрицы должно выполняться соотношение Плюккера [1–3]

$$J_{13}J_{24} - J_{23}J_{14} = 0. \tag{11}$$

Если $J_{24} \neq J_{23}J_{14}/J_{13}$ (соотношение (11) не выполняется), то восстановить матрицу краевых условий A по определителям J_{ij} невозможно, поскольку ее не существует.

Найдя для матрицы краевых условий A ее определители J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, с помощью формул (7)–(10) нетрудно получить каноническую форму матрицы, а значит, и краевые условия.

Восстановление краевых условий по двум собственным значениям. Пусть λ_1, λ_2 являются собственными значениями краевой задачи (3), (4). Тогда λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (6) [9]. Подставляя эти два значения в (6), получаем систему двух уравнений для поиска четырех определителей J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24} матрицы A:

$$\Delta(\lambda_i) = J_{13}f_{13}(\lambda_i) + J_{14}f_{14}(\lambda_i) + J_{23}f_{23}(\lambda_i) + J_{24}f_{24}(\lambda_i) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{12}$$

Пусть $D = \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) \end{vmatrix} \neq 0$. Выразим из системы уравнений (12) миноры J_{13} и J_{14}.

По формулам Крамера находим

$$J_{13} = \frac{D_1}{D}, \qquad J_{14} = \frac{D_2}{D},$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} -J_{23}f_{23}(\lambda_1) - J_{24}f_{24}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) \\ -J_{23}f_{23}(\lambda_2) - J_{24}f_{24}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & -J_{23}f_{23}(\lambda_1) - J_{24}f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & -J_{23}f_{23}(\lambda_2) - J_{24}f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в соотношения Плюккера (11), получаем квадратное уравнение относительно J_{23}:

$$aJ_{24}^2 + bJ_{23}J_{24} + cJ_{23}^2 = 0. \tag{13}$$

Здесь

$$a = \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) \end{vmatrix}, \qquad b = b_1 + b_2,$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} f_{14}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) \\ f_{14}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} f_{14}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{14}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix}.$$

Уравнение (13) имеет два решения:

$$J_{23} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\, J_{24}. \tag{14}$$

Выражая миноры J_{13}, J_{14} через J_{24}, a, $b = b_1 + b_2$, b_1, b_2, c, получаем

$$J_{13} = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{D}\,(J_{23}b_1 + J_{24}a), \qquad J_{14} = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{D}\,(-cJ_{23} - b_2J_{24}). \tag{15}$$

По найденным минорам с помощью формул (7)–(10) нетрудно найти краевые условия двух типов. Часто одно из решений не имеет физического смысла (миноры J_{23}, J_{24} или J_{13}, J_{14} имеют разные знаки). Также может оказаться, что оба решения не имеют физического смысла (например, $J_{23} > 0$, $J_{24} < 0$ в случае $a > 0$, $c > 0$, $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$). Однако в данной работе такие случаи не рассматриваются, поскольку ее целью является восстановление краевых условий реальной механической системы.

Рассмотрим примеры восстановления краевых условий по двум собственным значениям. Не ограничивая общности, можно считать, что $J_{24} = C > 0$.

Пример 1. В случае $a = 0$ квадратное уравнение (13) вырождается в линейное уравнение $bJ_{23}J_{24} + cJ_{24}^2 = 0$, из которого получаем единственное решение $J_{23} = -cJ_{24}/b$. Как правило, оно удовлетворяет физическому смыслу задачи. Например, в случае $q(x) = x^2$, $\lambda_1 = 3{,}1861$, $\lambda_2 = 6{,}3087$ ($a = 0$, $c = 0$, $b = b_1 = -0{,}0379$, $b_2 = 0$, $D = -0{,}0415$) все миноры, за исключением J_{24}, обращаются в нуль: $J_{23} = -cJ_{24}/b = 0$, $J_{13} = (J_{23}b_1 + J_{24}a)/D = 0$, $J_{14} = D_2/D = (-cJ_{23} - b_2J_{24})/D = 0$. Соответствующие краевые условия имеют следующий вид: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

В данном случае вычисление собственных значений проводилось следующим образом. Сначала с помощью пакета аналитических вычислений находились первые 70 членов разложений по x, λ решений $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ уравнения (3) в виде ряда Тейлора. Затем с помощью этих решений вычислялся характеристический определитель. В данном случае он равен

$$\Delta(\lambda) = -1{,}0507 + 0{,}1719\lambda^2 + \ldots + 2{,}7419 \cdot 10^{-95}\lambda^{66} - 5{,}8438 \cdot 10^{-99}\lambda^{68}.$$

Остаток ряда $|R_{66}|$ оценивается по признаку Лейбница следующим образом:

$$|R_{66}| < 5{,}8438 \cdot 10^{-99}|\lambda|^{68}.$$

Так как первые два собственных значения не превышают 10, то

$$|R_{66}| < 5{,}8438 \cdot 10^{-31}.$$

Таким образом, погрешность вычисления первых двух собственных значений не превышает 10^{-30}.

Пример 2. В случае $q(x) = x^2$, $\lambda_1 = 1{,}0387$, $\lambda_2 = 3{,}4618$ ($a = 0{,}8132$, $c = -0{,}0133$, $b_1 = 0{,}1726$, $b_2 = -\,0{,}7229$, $D = 0{,}8132$) из (13) получаем два минора, имеющие разные знаки: $J_{23} = (-b-\sqrt{b^2-4ac}\,)J_{24}/(2a) = -42{,}805J_{24}$ и $J_{23} = (-b+\sqrt{b^2-4ac}\,)J_{24}/(2a) = 1{,}4286J_{24}$. Значит, одно решение не является физическим. Из (10) получаем два решения: $y'(0) - 0{,}2y(0) = 0$, $y'(1) + 0{,}7y(1) = 0$ (физическое) и $y'(0) - 0{,}966y(0) = 0$, $y'(1) - 0{,}0234y(1) = 0$ (нефизическое).

Пример 3. В случае $q(x) = x^2$, $\lambda_1 = 1{,}1453$, $\lambda_2 = 3{,}5496$ ($D = 0{,}2275$, $a = 0{,}7511$, $b_1 = 0{,}1590$, $b_2 = -\,0{,}9279$, $c = 0{,}0178$) из (14), (15) получаем два решения с минорами, имеющими одинаковые знаки:

1) $J_{23} = J_{24} > 0$, при этом $J_{13} = 4J_{24} > 0$, $J_{14} = 4{,}0001J_{24} > 0$;

2) $J_{23} = 42{,}105J_{24} > 0$, при этом $J_{13} = 32{,}727J_{24} > 0$, $J_{14} = 0{,}7773J_{24} > 0$.

Из данных неравенств следует, что оба решения являются физическими. Поскольку в первом решении максимальным является минор J_{14}, из (8) получаем $y'(0) - 0{,}25y(0) = 0$, $y'(1) + y(1) = 0$ (физическое решение, соответствующее точному). Во втором решении максимальным является минор J_{23}, поэтому краевые условия имеют вид $0{,}7773y'(0) - y(0) = 0$, $y'(1) + 0{,}0238y(1) = 0$ (физическое решение).

Следовательно, для того чтобы однозначно идентифицировать краевые условия, двух собственных частот, вообще говоря, недостаточно.

Восстановление краевых условий по трем собственным значениям. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 являются собственными значениями краевой задачи (3), (4). Тогда λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения (6). Подставляя эти три значения в (6), получаем систему трех уравнений для поиска четырех определителей J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24} матрицы A:

$$\Delta(\lambda_i) = J_{13}f_{13}(\lambda_i) + J_{14}f_{14}(\lambda_i) + J_{23}f_{23}(\lambda_i) + J_{24}f_{24}(\lambda_i) = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Обозначим через F матрицу, состоящую из коэффициентов системы (16):

$$F = \begin{pmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \\ f_{13}(\lambda_3) & f_{14}(\lambda_3) & f_{23}(\lambda_3) & f_{24}(\lambda_3) \end{pmatrix},$$

а через F_{ij} — определитель, получаемый из F вычеркиванием столбца с элементом $f_{ij}(\lambda_k)$.

Справедлива следующая

Теорема (о единственности решения). *Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения задачи* (3), (4), *ранг матрицы F равен трем, потенциал $q(x) \ne 0$ несимметричен: $q(1-x) \ne q(x)$. Тогда задача идентификации краевых условий имеет единственное решение, которое представляется в явном виде через определители F_{ij}.*

Доказательство. Так же как в [1], доказывается, что пересечение гиперплоскостей (12) представляет собой прямую, задаваемую уравнениями

$$J_{13} = F_{13}t, \qquad J_{14} = -F_{14}t, \qquad J_{23} = F_{23}t, \qquad J_{24} = -F_{24}t, \tag{17}$$

где t — отличный от нуля параметр. Отличие заключается в том, что в данной работе рассматривается пересечение не двух, а трех гиперплоскостей в четырехмерном пространстве. Канонические представления для матрицы A, а значит, и сами краевые условия находятся из формул (7)–(10), (17).

Доказательство корректности по А. Н. Тихонову [15, 16] задачи поиска J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24} по собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 аналогично доказательству, приведенному в работе [1].

Рассмотрим примеры приближенного решения обратной задачи. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения краевой задачи (3), (4), найденные с некоторой погрешностью (не обязательно первые три). Подставляя эти значения в (17), получаем определители J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}. Канонический вид матрицы A (а значит, и краевых условий) зависит от того, какое из чисел J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24} больше по модулю. Если наибольшим по модулю является J_{13}, то приближенным решением задачи будем считать матрицу (7). При стремлении λ_1, λ_2, λ_3 к точным значениям, соответствующим физическому смыслу задачи, приближенное решение (7) стремится к точному, поскольку функции f_{ij} являются аналитическими.

Аналогично можно показать, что если наибольшими по модулю являются миноры J_{14}, J_{23}, J_{24}, то решения имеют вид (8), (9), (10) соответственно.

Поскольку в примере 3 краевые условия не восстанавливаются однозначно по двум собственным значениям, используем для их восстановления три собственных значения.

Пример 4. Пусть $q(x) = x^2$, $\lambda_1 = 1{,}1453$, $\lambda_2 = 3{,}5496$, $\lambda_3 = 6{,}5027$. Подставляя в (6) первые 70 членов разложения в ряд Тейлора функций $y_1(x) = y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x) = y_2(x,\lambda)$ по x и по λ, а также собственные значения λ_i, получаем систему (16). Затем находим решение в виде (17): $J_{13} = 2{,}9835 \cdot 10^{-2}$, $J_{14} = 2{,}983\,54 \cdot 10^{-2}$, $J_{23} = 7{,}4588 \cdot 10^{-3}$, $J_{24} = 7{,}4588 \cdot 10^{-3}$. Так как наибольшим по модулю является определитель J_{14}, то из (9) следует

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}0000 & 0{,}2499 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9999 & 1{,}0000 \end{pmatrix}.$$

В данном случае точное решение имеет вид $y'(0) - 0{,}25y(0) = 0$, $y'(1) + y(1) = 0$.

Вычисление собственных значений проводилось аналогично тому, как это сделано в примерах 1–3. Для примера 4 характеристический определитель равен

$$\Delta(\lambda) = -2{,}0070 + 1{,}8158\lambda^2 + \ldots + 1{,}2355 \cdot 10^{-91}\lambda^{66} - 2{,}7924 \cdot 10^{-95}\lambda^{68}.$$

Остаток ряда оценивается по признаку Лейбница следующим образом:

$$|R_{66}| < 2{,}8 \cdot 10^{-95}\,|\lambda|^{68}.$$

Так как первые три собственных значения не превышают 10, то $|R_{66}| < 2{,}8 \cdot 10^{-27}$.

Таким образом, погрешность вычисления первых трех собственных значений не превышает 10^{-26}.

Оценка погрешности метода идентификации. Проверим вычислительный эксперимент по зашумлению входных данных. Для анализа погрешности будем использовать первое решение в примере 3. В качестве входных данных примем собственные значения, заданные в виде $\lambda_{j\varepsilon} = \lambda_j(1 + \varepsilon\psi)$, где λ_j — собственное значение, вычисленное с точностью до 14 значащих цифр; ε — амплитуда зашумления; ψ — случайная величина с равномерным законом распределения, определенная на отрезке $[-1, 1]$. Полагая $\varepsilon = 10^{-n}$ ($n = 3, \ldots, 9$), исследуем относительную погрешность приведенных в данной работе методов в зависимости от n.

В табл. 1 для различных значений амплитуды ε и величины ψ приведены результаты пяти численных экспериментов. Значения ψ получены с помощью генератора случайных чисел математического пакета Maple. Из табл. 1 следует, что при $\varepsilon = 10^{-3}$ относительная погрешность восстановления коэффициента a_{12} не превышает 3,6 %.

В табл. 2 для различных значений ε, ψ приведены результаты пяти численных экспериментов для случая трех собственных значений. Из табл. 2 следует, что при амплитуде зашумления $\varepsilon = 10^{-3}$ относительная погрешность восстановления коэффициента a_{12} может достигать 230 %. Это свидетельствует о том, что для метода, в котором используется три собственные частоты, погрешность входных данных должна быть не более 10^{-4}. В этом случае погрешность восстановления коэффициента a_{12} не превышает 24,5 %. При погрешности входных данных не более 10^{-5} погрешность восстановления коэффициента a_{12} не превышает 2,5 %.

Таблица 1

Относительная погрешность $\delta_{a_{12}}(\psi)$ в зависимости от величины зашумления

ε	$\delta_{a_{12}}(\psi)$, %				
10^{-3}	3,5972	1,6153	1,6386	0,1843	2,8510
10^{-4}	0,3639	0,1176	0,1022	0,1922	0,3078
10^{-5}	0,0201	0,0201	0,0315	0,0080	0,0314
10^{-6}	0,0013	0,0015	0,0027	0,0021	0,0029
10^{-7}	0,0001	0,0003	0,0001	0,0003	0,0003
10^{-8}	$3{,}5151 \cdot 10^{-5}$	$1{,}1768 \cdot 10^{-5}$	$1{,}9 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}	$3{,}6 \cdot 10^{-5}$
10^{-9}	$2{,}9559 \cdot 10^{-6}$	$1{,}8832 \cdot 10^{-6}$	$9{,}3 \cdot 10^{-7}$	$2{,}3 \cdot 10^{-6}$	$3{,}6 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2

Относительная погрешность $\Delta(a_{12}, \psi)$ в зависимости от величины зашумления

ε	$\Delta(a_{12}, \psi)$, %				
10^{-3}	1,9388	1,1192	131,3210	14,6127	230,6010
10^{-4}	0,3078	9,3167	0,0906	15,2325	24,4208
10^{-5}	0,0181	0,2589	0,0283	0,6375	2,4894
10^{-6}	0,0012	0,1206	0,0024	0,1676	0,2303
10^{-7}	0,0001	0,0231	0,0104	0,0003	0,0246
10^{-8}	$3{,}1769 \cdot 10^{-5}$	0,0009	0,0015	$9{,}2 \cdot 10^{-6}$	0,0028
10^{-9}	$2{,}6710 \cdot 10^{-6}$	0,0001	$8{,}4 \cdot 10^{-7}$	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	0,0003

Заключение. В работе показано, что в случае несимметрического потенциала, в отличие от случая симметрического потенциала, вид и параметры краевых условий в задаче о колебаниях струны могут быть идентифицированы однозначно, но для этого требуется, вообще говоря, не две собственные частоты (как в случае симметрического потенциала), а три. Доказана теорема единственности решения задачи идентификации краевых условий по трем собственным частотам колебаний для случая несимметрического потенциала $q(1-x) \neq q(x)$. Показано, что в некоторых случаях единственный канонический вид физических краевых условий может быть определен по двум собственным частотам.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ахтямов А. М., Утяшев И. М.** Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 6. С. 647–655.
2. **Утяшев И. М., Ахтямов А. М.** Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний // Тр. Ин-та механики им. Р. Р. Мавлютова Уфим. науч. центра РАН. 2016. Т. 11. С. 38–52.
3. **Ахтямов А. М.** К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1011–1015.
4. **Гнуни В. Ц., Оганесян З. Б.** Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний // Изв. АН Армении. Механика (проблемы механики сплошной среды и конструкций). 1991. Т. 44, № 5. С. 9–15.
5. **Ватульян А. О., Осипов А. В.** Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // Вестн. Дон. гос. техн. ун-та. 2012. № 8. С. 34–40.
6. **Ватульян А. О.** Обратные и некорректные задачи: Учеб. / А. О. Ватульян, О. А. Беляк, Д. Ю. Сухов, О. В. Явруян. Ростов н/Д: Изд-во Юж. федер. ун-та, 2011.

7. **Ильгамов М. А., Хакимов А. Г.** Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Т. 45, № 6. С. 83–89.
8. **Shifrin E. I., Ruotolo R.** Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks // J. Sound Vibrat. 1999. V. 222, N 3. P. 409–423.
9. **Гладвелл Г. М. Л.** Обратные задачи теории колебаний. М.; Ижевск: Науч.-исслед. центр “Регулярная и хаотическая динамика”: Ин-т компьютер. исслед., 2008.
10. **Марченко В. А.** Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
11. **Юрко В. А.** Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 569–576.
12. **Набиев И. М., Шукюров А. Ш.** Решение обратной задачи для оператора диффузии в симметрическом случае // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 36–40.
13. **Комеч А. И.** Практическое решение уравнений математической физики: Учеб.-метод. пособие. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1993.
14. **Вибрации** в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978.
15. **Тихонов А. Н.** Нелинейные некорректные задачи / А. Н. Тихонов, А. С. Леонов, А. Г. Ягола. М.: Наука, 1995.
16. **Ахтямов А. М., Муфтахов А. В.** Корректность по Тихонову задачи идентификации закреплений механических систем // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 24–37.

Поступила в редакцию 4/IV 2017 г.,
в окончательном варианте — 4/IX 2017 г.