

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковальчук Б. М., Кремнев В. В., Месяц Г. А. Лавинный разряд в газе и генерирование нано- и субнаносекундных импульсов большого тока.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 1, с. 76.
2. Басов Н. Г., Беленов Э. М., Данилычев В. А., Сучков А. Ф. Электроионизационные лазеры.— «Усп. физ. наук», 1974, т. 114, № 2, с. 213.
3. Грабовский Е. В., Денисенко В. П., Казаков Ю. Б., Максимов Г. П., Русанов В. Д. Импульсный неизоотермический плазмохимический реактор с объемнотлеющим разрядом, стимулированным сильноточным электронным пучком.— В кн.: Тезисы докл. II Всесоюз. симпоз. по плазмохимии. I. Рига, «Зинатне», 1975.
4. Nighan W. L. Electron energy distributions and collision rates in electrically excited N_2 , CO and CO_2 .— «Phys. Rev.», 1970, vol. A2, p. 1989.
5. Королев Ю. Д., Хузеев А. П. Газовый разряд при высоких давлениях, инициируемый пучком быстрых электронов.— В кн.: Мощные наносекундные импульсные источники ускоренных электронов. Новосибирск, «Наука», 1974.
6. Оришич А. М., Пономаренко А. Г., Солоухин Р. И. О предельных энергетических характеристиках импульсных ТЕА-лазеров на CO_2 .— ПМТФ, 1975, № 1, с. 3.
7. Тарасенко В. Ф., Бычков Ю. И. Инфракрасный лазер с поперечным разрядом.— ЖТФ, 1974, т. XLIV, № 5, с. 1100.
8. Бычков Ю. И., Королев Ю. Д., Курбатов Ю. А., Месяц Г. А., Филонов А. Г. Эффективность использования пучка быстрых электронов в электроионизационных лазерах атмосферного давления.— ЖТФ, 1975, т. XLV, № 9, с. 1982.
9. Мак-Таггарт Ф. Плазмохимические реакции в электрических разрядах. М., Атомиздат, 1972.
10. Фоминский Л. П. Электроионизационный разряд с рекуперацией электронного пучка.— «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21, № 2, с. 129.
11. Лагунов В. М., Пономаренко А. Г., Фоминский Л. П. Формирование интенсивного электронного пучка.— ЖТФ, 1972, т. XLII, № 9, с. 1947.
12. Евдокимов О. В., Яловец А. П. Ионизация газового промежутка быстрыми электронами.— ЖТФ, 1974, т. XLIV, № 1, с. 217.

УДК 533. 951

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ОДНОМЕРНОГО
МАГНИТНО-ЗВУКОВОГО СОЛИТОНА

А. В. Гордеев

(Москва)

Известно, что гидродинамические уравнения для холодных электронов и ионов $\left(nmc^2 \gg \frac{H^2}{8\pi} \gg nT\right)$ имеют решение в виде установившейся уединенной волны, называемой солитоном [1].

В данной работе исследована устойчивость такого течения по отношению к электронным возмущениям геликонного типа [2]. Ранее устойчивость солитонов в приближении Кортевега-де-Фриза исследовалась в работе [3], где показано, что слабый магнитно-гидродинамический солитон устойчив по отношению к возмущениям с отрицательной дисперсией.

В качестве исходной системы уравнений выберем уравнения двухжидкостной гидродинамики в приближении квазинейтральности $n_e = n_i$

$$(1) \quad m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}];$$

$$(2) \quad m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}];$$

$$(3) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi en}{c} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e);$$

$$(4) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$(5) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n\mathbf{v}) = 0.$$

Из системы уравнений (1)–(5) при учете инерции электронов в низшем порядке по параметру $m_e/m_i \ll 1$ можно построить одномерный магнитно-звуковой солитон, у которого магнитное поле $H_z = H_0[1 + h(x - ut)]$ описывается уравнением [1]

$$\pm a \frac{dh}{dx} - \frac{h}{1 - \frac{h^2/2}{M^2}} \sqrt{1 - \frac{(2+h)^2}{4M^2}},$$

где

$$a^2 = \frac{m_e c^2}{4\pi e^2 n_0}; \quad M^2 = \frac{u^2}{H_0^2/4\pi n_0 m_i}; \quad u^2 = \frac{(H_0 + H_{\max})^2}{16\pi n_0 m_i}.$$

При этом плотность n и продольная скорость солитона v_x равны

$$n = \frac{n_0 u}{u - v_x}, \quad v_x = u \frac{h + h^2/2}{M^2}.$$

Исследуем теперь устойчивость солитона по отношению к возмущениям, частота которых велика $\omega_{He} > \omega \gg u/a$.

Из системы (1)–(5) можно получить оценку для изменения плотности в таких возмущениях

$$(6) \quad \delta n/n_0 \sim (u/a\omega)^2 \delta H/H_0.$$

Таким образом, для высокочастотных возмущений можно пренебречь движением ионов и изменением плотности. При этом с той же точностью можно считать, что профили магнитного поля H_z и плотности n неподвижны в лабораторной системе координат. Это означает, что устойчивость солитона по отношению к высокочастотным возмущениям можно исследовать в рамках электронных уравнений

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{m_e c}{e} \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt};$$

$$(8) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{4\pi en}{c} \mathbf{v}.$$

Следует подчеркнуть, что движение ионов существенно для возникновения неустойчивости, так как оно формирует определенный профиль плотности в солитоне. Однако это движение оказывается медленным по отношению к рассматриваемым возмущениям, и исследование на устойчивость можно производить, считая движение ионов отсутствующим, а профиль плотности — заданным.

В рамках уравнений (7), (8) можно получить уравнение для трехмерных возмущений, которое является обобщением уравнения (8) из работы [2] при учете инерции электронов для холодной плазмы ($T = 0$).

Разлагая возмущения в ряд Фурье по времени и координатам y и z , получим

$$\Delta H_x - \frac{n}{H} \left(\frac{H'}{n} \right)' H_x + \frac{\tilde{\omega} \tilde{\omega}}{\omega_H \tilde{\omega}_H} \frac{\omega_p^4}{k_z^2 c^4} \left(H_x - \frac{c^2}{\omega_p^2} \Delta H_x \right) =$$

$$= \frac{\tilde{\omega}_n}{k_z^2 \omega_H} \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{n} \frac{d}{dx} - \frac{k_z^2}{n} \right) \frac{\tilde{\omega}}{\omega_H} \frac{\omega_p^2}{c^2} \left(H_x - \frac{c^2}{\omega_p^2} \Delta H_y \right),$$

где

$$\tilde{\omega} = \omega - k_y \frac{cH'}{4\pi en}; \quad \tilde{\omega}_H = \omega_H - \left(\frac{cH'}{4\pi en} \right)';$$

$$\tilde{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega} + k_y \left(\frac{c^2}{\omega_p^2} \tilde{\omega}_H \right)';$$

$$\Delta H_x = H_x - k_z^2 H_x; \quad k_z^2 = k_z^2 + k_y^2;$$

штрих означает дифференцирование по x .

Если считать возмущения не зависящими от y ($k_y = 0$) и воспользоваться соотношением, справедливым для солитона,

$$(9) \quad a^2 \frac{n_0}{H} \left(\frac{H'}{n} \right)' = 1 - \frac{nH_0}{n_0 H},$$

то, вводя обозначения $v = \frac{n}{n_0}$, $k^2 = k_z^2 a^2$, $k^2 = k^2 + v$, получим уравнение для y -компоненты векторного потенциала A .

$$(10) \quad A'' - k^2 A - \frac{v}{1+h} \left(\frac{h'}{v} \right)' A = \\ = \gamma_0^2 \frac{v}{1+h} \left\{ \left[\frac{1}{v} \left(\frac{A'' - k^2 A}{v} \right)' \right] - k^2 \frac{A'' - k^2 A}{v^2} \right\},$$

где безразмерная переменная $s = x/a$

$$\gamma_0 = \gamma \frac{4\pi en_0}{k_z c H_0} a, \quad \gamma = -i\omega.$$

Полученное уравнение, учитывающее инерцию электронов, является довольно сложным и в общем случае не поддается аналитическому исследованию. Поэтому рассмотрим его для $\gamma_0^2 \ll 1$, когда правая часть уравнения (10) мала. Совместно с $\gamma \gg u/a$ это дает следующее ограничение на γ_0^2 :

$$\frac{m_e}{m_i k^2} \ll \gamma_0^2 \ll 1,$$

что справедливо при $k^2 \gg m_e/m_i$.

Ввиду того, что в правой части уравнения (10) имеются производные третьего и четвертого порядка, простое отбрасывание «малых» членов неправильно, и уравнение требует специального исследования [4]. Развита в [4] теория позволяет утверждать, что уравнение (10) с граничными условиями

$$A'(0) = A'''(0) = 0, \quad A(\infty) = A''(\infty) = 0$$

имеет при достаточно малых $\gamma_0^2 > 0$ единственное решение $A(s, \gamma_0^2)$, если только уравнение (10) без правой части и с граничными условиями $A'(0) = A(\infty) = 0$ имеет единственное решение $A(s)$. При этом можно утверждать, что для $\gamma_0^2 < \varepsilon$ $|A(s, \gamma_0^2) - A(s)| < \delta(\varepsilon)$.

Найдем теперь из физических соображений ту область малых γ_0^2 , где решение $A(s, \gamma_0^2)$ переходит в $A(s)$. Для этого заметим, что безразмерный потенциал $U = \frac{v}{1+h} \left(\frac{h'}{v} \right)'$ в левой части уравнения (10) изменяется от ве-

личины $U_0(M) < 0$ при $h_0 = 2(M-1)$ до нуля при $h_1 = (1/2)(\sqrt{8M^2+1}-3)$, затем достигает максимума $U_1(M)$ и спадает до нуля при $h = 0$. Аппроксимируя приближенно потенциал, можно показать, что допустимые значения γ_0^2 определяются из условия $4U_1\gamma_0^2 < 1$. Используя оценку $U_1 < 1/3$, получим, что $\gamma_0^2 \ll 1$ обеспечивает связь решений $A(s, \gamma_0^2)$ и $A(s)$.

Таким образом, задача о неустойчивости магнитно-звукового солитона при $k_y = 0$ свелась к условию существования хотя бы одного уровня для уравнения

$$(11) \quad A'' + (E - U)A = 0,$$

где $U = \frac{v}{1+h} \left(\frac{h'}{v} \right)'$, а величина собственного значения должна удовлетворять условию $-E = k^2 \gg m_e/m_i$. Уравнение (11) всегда имеет уровень при $\int_{-\infty}^{+\infty} U ds \leq 0$.

Введем величину $k(M) = - \int_0^{\infty} U ds$. Для $M < 1,3$ эффективная потенциальная яма в уравнении (11) мелкая и в соответствии с [5] $k = k(M)$. Однако при этом не выполняется условие $k^2 \gg m_e/m_i$.

При увеличении числа Маха M величина

$$k(M) = \frac{1}{2M^2} \int_0^{2(M-1)} dh h \frac{3(h^2 + 2h) - 2(M^2 - 1)}{\left(1 - \frac{h + h^2/2}{M^2}\right)^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{(2+h)^2}{4M^2}}}{(1+h)^2}$$

изменяется от $2,47 \cdot 10^{-2}$ при $M=1,3$ до $1,49 \cdot 10^{-1}$ при $M = 1,5$. В этом интервале значений M появляется собственное значение k^2 , удовлетворяющее условию $1 \gg k^2 \gg m_e/m_i$. Начиная с этих чисел Маха, одномерный магнитно-звуковой солитон оказывается неустойчивым относительно электронных возмущений геликонного типа для $k_y = 0$ с инкрементом $\gamma = \gamma_0 k \omega_{He}$ при $\gamma_0^2 \ll 1$. При дальнейшем увеличении $M > 1,5$ эффективный потенциал в уравнении (11) увеличивается и оценку для собственного значения k^2 на границе устойчивости $\gamma_0^2 \ll 1$ можно найти из формулы (П.5) (см. приложение). Для нахождения γ_0^2 , соответствующего k^2 из интервала неустойчивости, необходимо решать полное уравнение четвертого порядка (10).

Остановимся кратко на балансе энергии в рассмотренной неустойчивости. Производя усреднение по периодическим возмущениям в направлении z , можно получить из (7) следующее «квазилинейное» уравнение для основного магнитного поля H_z при $\gamma_0^2 \ll 1$

$$(12) \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{H_0}{2n_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n}{H_z} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \langle A^2 \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по z .

Умножая (12) на H_z и интегрируя его по всем x , можно убедиться, что полная энергия магнитного поля уменьшается в результате развития такой неустойчивости и переходит в энергию электронного движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{H^2}{8\pi} dx = - \frac{\gamma}{4\pi a^2} \int dx \langle A^2 \rangle \frac{n}{n_0} \left(\frac{n H_0}{n_0 H} - 1 \right)^2 < 0.$$

Однако ввиду того, что солитон является «жестким» образованием, уменьшение магнитного поля сопровождается перестройкой движения ионов. Это значит, что в результате раскачки быстрых электронных возмущений происходит торможение ионов.

Если рассмотреть устойчивость солитона относительно двумерных возмущений при $k_z = 0$ и $k_y \neq 0$, то можно убедиться, что в рамках чисто электронных возмущений солитон будет устойчив. В работе [2] показано, что неустановившаяся нелинейная магнитно-гидродинамическая волна неустойчива по отношению к возмущениям с $k_z = 0$. Устойчивость солитона для таких возмущений связана с выполнением соотношения (9).

В общем случае $k_z \neq 0$ и $k_y \neq 0$ для доказательства неустойчивости магнитно-звукового солитона необходимо исследовать полученное выше полное уравнение четвертого порядка, так как правая часть уравнения

$$\text{порядка } \frac{k_y^2}{k_z^2} \gg 1.$$

Рассмотрим вопрос о существовании конечного стационарного состояния, к которому приходит одномерный магнитно-звуковой солитон в результате развития электронной неустойчивости. Рост электронных возмущений приводит к быстрой перестройке токовой конфигурации при заданном движении ионов. Однако для времени порядка a/u возникающее течение плазмы должно быть решением общей системы уравнений (1)–(5).

Рассмотрим двумерные решения вида $n(x - ut, z)$, соответствующие движению со скоростью u вдоль оси x . Предполагая, как и в одномерном случае, квазинейтральность $n_e = n_i \equiv n$ и считая скорости электронов и ионов одинаковыми по осям x и z , введем функцию тока $\psi(x, z)$

$$nv_z = \partial\psi/\partial x, \quad n(v_x - u) = -\partial\psi/\partial z.$$

В результате в низшем порядке по параметру $m_e/m_i \ll 1$ можно получить следующую систему уравнений для нахождения профиля двумерного магнитно-звукового солитона:

$$(13) \quad m_i \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} (v_x - u) + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = -\frac{e}{c} H_z v_y;$$

$$(14) \quad m_i \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} (v_x - u) + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \frac{e}{c} H_x v_y;$$

$$(15) \quad m_e \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} (v_x - u) + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = -eE_y - \frac{e}{c} (v_z H_x - v_x H_z),$$

где $v_y = \frac{c}{4\pi en} \Delta A$, A — y -компонента векторного потенциала; $H_x = -\partial A/\partial z$; $H_z = \partial A/\partial x$.

Переходя в уравнениях (13)–(15) к величинам ψ , n и A , можно прийти к уравнениям

$$(16) \quad \frac{1}{n^2} \Delta^* \psi \nabla \psi - \nabla \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \nabla \psi \right)^2 = \frac{\Delta A}{4\pi n m_i} \nabla A;$$

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{\omega_p^2} \Delta A - A \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c^2}{\omega_p^2} \Delta A - A \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

$$\text{где} \quad \Delta^* \psi = n \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n} \frac{\partial \psi}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Из уравнения (17) следует

$$(18) \quad \frac{c^2}{\omega_p^2} \Delta A - A = F(\psi).$$

Подставляя это выражение в (16) и применяя к нему операцию rot, получим

$$(19) \quad \frac{1}{n^2} \Delta^* \psi + \frac{F'(\psi) A}{4\pi m_i n_0 a^2} = \Phi(\psi).$$

Наконец, подставляя полученные уравнения (18), (19) для A и ψ в (16) и интегрируя, получим уравнение для n

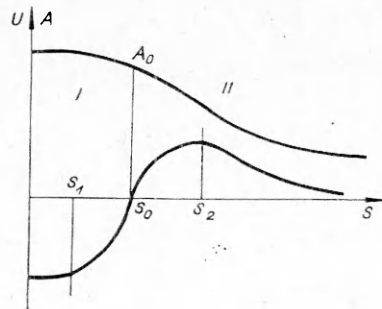
$$(20) \quad \frac{A^2}{8\pi m_i n_0 a^2} + \frac{AF(\psi)}{4\pi m_i n_0 a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \nabla \psi \right)^2 = \int \Phi(\psi) d\psi.$$

Система (18)–(20) описывает двумерный магнитно-звуковой солитон, который получается в результате разбиения фронта одномерного магнитно-звукового солитона вдоль оси z . Отметим, что в двумерном солитоне имеется компонента магнитного поля H_x вдоль направления движения. В соответствии с общей теорией уравнения (18)–(20) зависят от двух произвольных функций $F(\psi)$ и $\Phi(\psi)$ [6].

Приведем качественные соображения в пользу существования решения системы уравнений (18)–(20) для частного выбора этих функций. Пусть $F(\psi) = F_0 \psi$, $\Phi(\psi) = -\Phi_0 \psi^2$, а n пока будем считать постоянной. Тогда разложение Фурье для уравнений (18), (19) приводит к нелинейному уравнению в k -пространстве

$$(24) \quad \psi_k = \frac{a^2 n_0^2 (1 + k^2 a^2) \Phi_0}{k^2 a^2 (1 + k^2 a^2) + \frac{2\pi^2}{4\pi m_i}} \sum_{k_1} \psi_{k_1} \psi_{k-k_1}.$$

В работе [7] показано, что численная итерационная процедура для (24) сходится и дает локализованное решение. Этот же вывод справедлив при достаточно малой вариации плотности $\delta n = n(0) - n(\infty)$, причем сама величина δn и профиль плотности n должны определяться из уравнения (20). Таким образом, рассмотренная выше неустойчивость для значений $M \gtrsim 1,5$ может приводить к перестройке одномерного магнитно-звукового солитона в двумерный. Вопрос о профиле такого солитона и его устойчивости требует дополнительных исследований.



Приложение

1. Рассмотрим уравнение

$$(П.1) \quad A'' - (k^2 + U)A = 0,$$

и пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U ds \leq 0,$$

причем потенциал U имеет вид, изображенный на фигуре.

Введем пробные функции в областях $[0, s_0]$ и (s_0, ∞) , удовлетворяющие граничным условиям $A'(0) = 0$, $A(\infty) = 0$ и нормированные $A(s_0) \equiv A_0 > 0$.

Тогда в области I

$$(П.2) \quad A'_I(s_0) = \int_0^{s_0} A(k^2 + U) ds,$$

а в области II

$$(П.3) \quad A'_{II}(s_0) = -kA_0 - \int_{s_0}^{\infty} AU \exp[-k(s - s_0)] ds.$$

Обозначим $\Delta(k) \equiv A'_{II}(s_0) - A'_I(s_0)$. Если при некотором $k = k_0$ $\Delta(k_0) = 0$, то пробные функции в полной области $[0, \infty)$ дают решение уравнения (П.1).

Из (П.2), (П.3) следует

$$(П.4) \quad \Delta(k) = -kA_0 - A_0 \int_0^{\infty} U ds - k^2 \int_0^{s_0} A ds + \int_0^{s_0} (A - A_0) |U| ds + \\ + \int_{s_0}^{\infty} ds U \{A_0 - A \exp[-k(s - s_0)]\}.$$

При фиксированном A_0 и $k \rightarrow 0$ интеграл $\int_0^{s_0} A ds$ является постоянной, зависящей только от U . Ввиду $A'(s) < 0$ при $s > s_0$ верно неравенство $A_0 > A > A \exp[-k(s - s_0)]$ и, следовательно, $\int_{s_0}^{\infty} ds U \{A_0 - A \exp[-k \times (s - s_0)]\} > 0$. Наконец, ввиду $A'(s) < 0$ при $s < s_0$ для малых k

$$\int_0^{s_0} (A - A_0) |U| ds > 0. \text{ Тогда для достаточно малых } k \Delta(k) > -A_0 \int_0^{\infty} U ds > 0.$$

Рассмотрим теперь случай больших k . Интеграл $\int_0^{s_0} A ds$ остается положительной величиной. При достаточно больших k $A'(s) > 0$ при $0 < s < s_0$ и $\int_0^{s_0} (A - A_0) |U| ds < 0$, если $k > k_1 \equiv \sqrt{\min |U(s < s_0)|}$. Если теперь вы-

бравать k , удовлетворяющее условию $k > \max \left(k_1, \int_0^{s_3} |U| ds \right)$, то, как следует из (П.4), $\Delta(k) < 0$. Следовательно, при непрерывном изменении k существует такое $k = k_0$, что $\Delta(k_0) = 0$ и уравнение (П.1) имеет собственное решение, соответствующее $k = k_0$.

2. Получим оценку для собственного значения k^2 уравнения (П.1). Для этого проинтегрируем уравнение по s от нуля до s_3 , где $A(s_3) = A_3$ и $k^2 \gg U(s_3)$

$$-kA_3 = k^2 \int_0^{s_3} A ds + \int_0^{s_3} AU ds.$$

Вводя обозначения

$$aA_3 = \int_0^{s_3} A ds, \quad bA_3 = - \int_0^{s_3} AU ds,$$

получим

$$(П.5) \quad k = (1/2a) (\sqrt{1 + 4ba} - 1).$$

Из (П.5) следует, что при $k(M) \ll 1/4$ $k^2 \sim k^2(M)$, а при $k(M) \gg 1/4$ $k^2 \sim k(M)$. Отметим, что $U_0(M) = -2M(M-1)^2/(2-M)^2(2M-1)$ не мало для всех рассматриваемых чисел Маха M и яму нельзя считать мелкой.

Автор выражает благодарность Л. И. Рудакову за обсуждения работы и В. И. Петвиашвили за полезные критические замечания.

Поступила 20 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Госатомиздат, 1962, с. 20.
2. Гордеев А. В., Рудаков Л. И. Неустойчивость плазмы в сильно неоднородном магнитном поле.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 2310.
3. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, с. 753.
4. Wasow W. On the asymptotic solution of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter.— «J. Math. Phys.», 1944, vol. 23, p. 173.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., «Наука», 1974, с. 196.
6. Соловьев Л. С. Симметричные магнитогидродинамические течения и винтовые волны в круглом цилиндре.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 245.
7. Петвиашвили В. И. Об уравнении необыкновенного солитона.— «Физика плазмы», 1976, т. 2, № 3, с. 469.