

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В
ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ СО СМЕЩАЮЩЕЙСЯ
ПРЕГРАДОЙ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СВОБОДНОЙ
ПОВЕРХНОСТИ

Г. М. Ляхов, Р. А. Осадченко, Н. И. Полякова
(Москва)

Взаимодействие плоской волны сжатия с преградой в упруго-пластических средах рассматривалось в работах [1—5] без учета влияния свободной поверхности. Ниже дается решение с учетом этого фактора.

Описание среды. Многие грунты могут рассматриваться как упруго-пластические среды. Как показывают опыты [6], при не слишком малых напряжениях ($\sigma > 3-6 \text{ кг/см}^2$) можно пренебречь упругим участком и принять, что зависимость $\sigma(\epsilon)$, будучи нелинейной, имеет постоянный

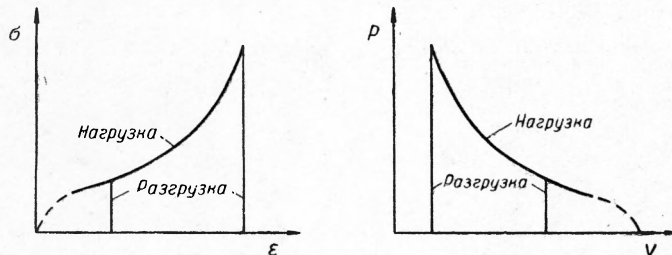


Рис. 1.

знак кривизны $\frac{d^2 \sigma}{d^2 \epsilon} > 0$. Разгрузка и вторичная нагрузка до напряжения, достигнутого при первом сжатии, происходит при $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0$ (рис. 1). В плоской волне напряжение и деформация связаны с давлением и удельным объемом соотношениями

$$\sigma = -p; \quad \epsilon = \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (1)$$

Переходя к системе единиц p, V , получим, что нагрузка среды определяется нелинейным законом

$$p = p(V), \quad \frac{d^2 p}{d V^2} > 0. \quad (2)$$

При разгрузке и вторичной нагрузке удельный объем среды не меняется $\frac{dV}{dt} = 0$.

Решение задачи проведем для такой среды в координатах Лагранжа (масса h , время t).

Распространение волны и ее взаимодействие с преградой. Пусть при $t=0$ в начальном сечении пластической среды $h=0$ (свободная поверхность) давление скачком возрастает до P_m , а затем падает по заданному закону

$$p=f(t). \quad (3)$$

В сечении h^* находится преграда (плига), масса которой, приходящаяся на единицу площади, равна m . (Сжимаемостью материала преграды и обтеканием ее волной пренебрегаем). За преградой — вторая пластическая среда, для которой дана нелинейная зависимость $p=p^*(V)$. При этом $\frac{d^2 p^*}{dV^2} > 0$. При разгрузке $\frac{dV}{dt} = 0$.

По среде от начального сечения станет распространяться ударная волна, которой в плоскости h, t соответствует область 1 (рис. 2). При взаимодействии этой волны с преградой образуется отраженная волна (области 2 и 3) и проходящая волна во второй среде (область 1*).

Течение в различных областях определяется решением уравнений движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial h} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

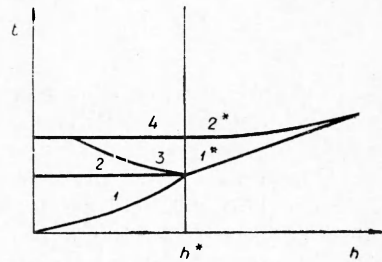


Рис. 2.

В областях, где происходит разгрузка или вторичная нагрузка среды при $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, решение этих уравнений имеет вид

$$p = -h \dot{\varphi}_i(t) + \psi_i(t), \quad u = \varphi_i(t), \quad (5)$$

где u — скорость частиц, а i — номер области в плоскости h, t .

В областях, где происходит первичная нагрузка среды, а волна не является ударной, справедливо особое (римановское) решение

$$u = F_i \left(h - \sqrt{-\frac{dV}{dp}} t \right), \quad u = \int \sqrt{-\frac{dV}{dp}} dp + \beta_i, \quad (6)$$

при этом $\sqrt{-\frac{dV}{dp}} = \rho c = \frac{c}{V}$, где c — скорость звука. Функции F_i , φ_i , ψ_i и постоянная величина β_i находятся из условий в начальном сечении и на границах областей.

В средах, где нагрузка происходит по линейному закону, а линии разгрузки и нагрузки не совпадают, границы областей в плоскости h, t , соответствующие фронтам ударных волн, а также границы областей первичной постепенной нагрузки и разгрузки, не являются прямыми, они заранее неизвестны и должны определяться в ходе решения.

В области l на фронте происходит скачок давления, а за фронтом давление убывает, т. е. происходит разгрузка среды. Поэтому решение имеет вид

$$p = -h \dot{\varphi}_1(t) + \psi_1(t), \quad u = \varphi_1(t). \quad (7)$$

Из условия (3) найдем $\psi_1(t) = f(t)$. Обозначив линию ударного фронта $h_1(t)$, получим условия на фронте

$$p - p_0 = \dot{h}_1^2(t) (V_0 - V), \quad u - u_0 = \dot{h}_1(t) (V_0 - V) \quad (8)$$

Индекс «0» соответствует состоянию среды перед фронтом. Примем, что $p_0 = 0$, $u_0 = 0$. Тогда на фронте

$$p = \dot{h}_1(t) u, \quad u = \dot{h}_1(t) (V_0 - V).$$

Учитывая (7), найдем

$$\begin{aligned} -h_1(t) \dot{\varphi}_1(t) + f(t) &= \dot{h}_1(t) \varphi_1(t), \\ \varphi_1(t) &= \dot{h}_1(t) \{V_0 - V [-h_1(t) \dot{\varphi}_1(t) + f(t)]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Получена система двух уравнений с двумя неизвестными функциями $\varphi_1(t)$ и $h_1(t)$. Начальное условие $h_1(0) = 0$. Начальное значение функции $\varphi_1(t)$ найдем из условия, что при $t=0$ $f(0) = p_m$. Отсюда в соответствии с (8)

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \sqrt{f(0) [V_0 - V(f(0))]} = \sqrt{p_m (V_0 - V_m)}, \\ V_m &= V(p_m). \end{aligned} \quad (10)$$

Конкретный вид искомых функций зависит от вида функций $p = p(V)$ и $p = f(t)$.

Если принять, что нагрузка среды происходит по линейному закону

$$p(V) = -A^2(V - V_0), \quad (11)$$

то система (9) принимает вид

$$h_1 \dot{\varphi}_1 + \varphi_1 \dot{h}_1 = f, \quad A^2 \varphi_1 = \dot{h}_1 (-h \dot{\varphi}_1 + f). \quad (12)$$

Исключая f , найдем

$$A^2 \varphi_1 = \dot{h}_1^2 \varphi_1, \quad \dot{h}_1 = \pm A.$$

Учитывая начальное условие и направление движения волны, получим, что линия фронта прямая

$$h_1(t) = At.$$

В соответствии с (12) найдем функцию $\varphi_1(t)$.

$$A \varphi_1(t) - A t \dot{\varphi}_1(t) = f(t), \quad \frac{d[A t \varphi_1(t)]}{dt} = f(t), \quad (13)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{\int f(t) dt}{At}.$$

Вид функции $\varphi_1(t)$ зависит от $f(t)$, определяющей давление в начальном сечении.

Если давление при $h=0$ задано в линейном виде

$$p = f(t) = p_m \left(1 - \frac{t}{\theta}\right), \quad (14)$$

то из (13) получим

$$\varphi_1(t) = \frac{p_m}{A} \left(1 - \frac{t}{2\theta}\right). \quad (15)$$

В областях 2 и 3 (см. рис. 2) происходит разгрузка и вторичная нагрузка, решение имеет вид (8). В области 1* за преградой происходит постепенное нагружение среды, решение имеет вид (6). Решения в областях 2, 3 и 1 находятся одновременно. Рассмотрим соответствующие начальные и граничные условия.

В сечении $h=0$ задано изменение давления (3).

В области 2 на границе $h_2(t)$ с областью 3 давление в каждой частице в момент времени t достигает значения, которое имело место в момент времени $\lambda(t)$ на фронте падающей волны

$$h_2(t) = h_1(\lambda). \quad (16)$$

В области 3 на границе $h_2(t)$ давление возрастает скачком, а затем падает при $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. На линии $h_2(t)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} p_3 - p_2 &= \dot{h}_2^2(t) (V_2 - V_3), \\ u_3 - u_2 &= \dot{h}_2(t) (V_2 - V_3). \end{aligned}$$

Преграда движется под действием разности давлений со стороны обеих сред, при этом ее скорость равна скорости примыкающих к ней частиц. Линия фронта во второй среде является прямой, так как на фронте нет скачка. Скорость фронта равна акустическому сопротивлению $A_0 = c_0 \rho_0$. Отсюда при $u_0 = 0$, $p_0 = 0$ найдем, что в (6) постоянная $\beta_i = 0$. В области 1 давление и скорость частиц связаны соотношением

$$u = \int \sqrt{-\frac{dV}{dp}} dp \quad \text{или} \quad p = g(u). \quad (17)$$

Система уравнений, определяющая течение в областях 2, 3, 1*, включает пять уравнений с пятью неизвестными функциями

$$\varphi_2(t), \varphi_3(t), \psi_3(t), h_2(t) \text{ и } \lambda(t).$$

Эти уравнения соответствуют рассмотренным выше пяти условиям

$$\begin{aligned} (m + h^*) \frac{d\varphi_3(t)}{dt} &= \psi_3(t) - g[\varphi_3(t)], \\ h_1(\lambda) \left[\frac{d\varphi_1(\lambda)}{d\lambda} - \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right] &= f[\lambda(t)] - f(t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [h_1(\lambda) \varphi_3(t) - \varphi_2(t)] &= \psi_3(t) - f(t), \\ \varphi_3(t) - \varphi_2(t) &= \frac{dh_1(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \left\{ V \left[-h_1(\lambda) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} + f(t) \right] - \right. \\ &\quad \left. - V \left[-h_1(\lambda) \frac{d\varphi_3(t)}{dt} + \psi_3(t) \right] \right\}, \\ h_2(t) &= h_1(\lambda). \end{aligned}$$

Из условия при $h=0$ следует, что

$$\psi_2(t) = \dot{f}(t).$$

Система должна быть решена при начальных значениях

$$\lambda(t^*) = t^*, \quad \varphi_2(t^*) = \varphi_1(t^*), \quad \varphi_3(t^*) = 0, \quad (19)$$

где t^* — момент подхода падающей волны к преграде.

Зная функции $u = \varphi_3(t)$ и $p = g(u)$, с помощью первого из уравнений (6) найдем в области I^* функции

$$p = (h, t) \text{ и } u = u(h, t).$$

При решении уравнений, подобных (18), целесообразно использовать электронные цифровые или моделирующие машины. При этом машина должна следить за знаком $\frac{dp}{du}$, в области первичной нагрузки и при смене знака переходить к новой системе уравнений. В рассматриваемом случае изменение знака может произойти в области I^* при $h = h^*$, когда из-за падения давления в начальном сечении нагрузка за преградой может смениться разгрузкой.

Конкретный вид искомых функций зависит от вида функций $p(V)$ и $\dot{f}(t)$.

Если в обеих средах нагрузка происходит по линейным законам (11), где A относится к первой, а A^* ко второй среде, то в первой среде

$$h_1(\lambda) = A\lambda,$$

а во второй

$$u = \int \sqrt{-\frac{dV}{dp}} dp = \frac{p}{A}, \quad p = g(u) = Au.$$

Система (18) принимает вид

$$\begin{aligned} (m + h^*) \dot{\varphi}_3 + A \varphi_3 &= \psi_3, \\ A\lambda \left[\frac{d\varphi_1(\lambda)}{d\lambda} - \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right] + f(t) - f(\lambda) &= 0, \\ \frac{d}{dt} [A\lambda(\varphi_3 - \varphi_2)] &= \psi_3 - f(t), \\ \varphi_3 - \varphi_2 &= \frac{d\lambda}{dt} \left[\lambda(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + \frac{1}{A}(\psi_3 - f(t)) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из двух последних уравнений, учитывая (19), найдем

$$\dot{\lambda}^2 + 1, \quad \dot{\lambda}(t) = 2t^* - t.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (20), получим дифференциальное уравнение для определения $\varphi_2(t)$.

Если давление при $h=0$ задано уравнением (14), то решение упрощается

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = \frac{p_m}{2A\theta} \frac{2t^* - 3t}{2t^* - t}.$$

При подстановке $\psi_3(t)$ из третьего уравнения системы (20) в первое получим дифференциальное уравнение для определения $\varphi_3(t)$:

$$(m + h^*) \dot{\varphi}_3 + A^* \varphi_3 = p_m \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) - A(\varphi_3 - \varphi_2) + A(2t^* - t)(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2).$$

Задача полностью решена.

Решение с учетом влияния свободной поверхности. В зависимости от параметров задачи, вида функции $p=f(t)$, свойств сред, массы преграды m и величины ее заглубления h^* , в дальнейшем возможны различные конфигурации систем волн и соответствующих им областей в плоскости h, t . При этом области нагрузки могут сменяться областями разгрузки.

Рассмотрим случай, когда скачок давления на линии $h=h_2(t)$ исчезнет или достигнет сечения $h=0$ при $t=t^{**}$ до того, как нагрузка в области 1 сменится разгрузкой, или волна превратится в ударную, т. е. перестанет выполняться римановское решение.

В момент времени t^{**} возникнут области 4 и 2 (см. рис. 1). В области 4 происходит разгрузка среды, и решение имеет вид (5). При этом из условия (3) в сечении $h=0$ следует

$$\psi_4(t) = f(t). \quad (21)$$

Ускорение преграды при $t=t^{**}$ меняется скачком. В зависимости от параметров задачи в области 2* возможна как дальнейшая нагрузка, так и разгрузка среды. В последнем случае граница $h=h_3(t)$ областей 1, 2 заранее не известна, так как она разделяет области нагрузки и разгрузки. Решение в области 2* имеет вид (5). В этом случае течение в областях 4 и 2* определяется системой трех уравнений относительно трех неизвестных функций $h_3(t)$, $\varphi_4(t)$ и $\psi_2^*(t)$. Эти уравнения соответствуют уравнению движения преграды и условиям непрерывности давления и скорости частиц на границе $h=h_3(t)$:

$$\begin{aligned} m \dot{\varphi}_4(t) + \psi_2^*(t) &= f(t), \\ -h_3(t) \dot{\varphi}_4(t) - \psi_2^*(t) &= p[h_3(t), t], \\ \varphi_4(t) &= u[h_3(t), t] \end{aligned} \quad (22)$$

При этом $\varphi_4(t) = \varphi_2^*(t)$. Функции $p(h, t)$ и $u(h, t)$, определяющие давление и скорость частиц в области 1, известны.

Если в области 2* продолжается нагрузка среды, то система уравнений (22) упрощается, так как граница областей 1 и 2 является харак-

теристикой. Неизвестными функциями являются $\varphi_4(t)$ и одна из функций, определяющих течение в области 2^* .

Для нахождения $\varphi_4(t)$ получим одно дифференциальное уравнение

$$(m + h^*) \varphi_4^0(t) + g(\varphi_4) = f(t), \quad (23)$$

где $g(\varphi_4)$ — известная функция, определяющая связь p и u в областях 1 и 2^* .

Если во второй среде нагрузка происходит по линейному закону (11) с акустическим сопротивлением A^* , то в области 2^* при нагрузке $g(\varphi_4) = A\varphi_4$ уравнение (23) становится линейным.

Зная $u = \varphi_4(t)$ и $p = g(u)$, с помощью первого из уравнений (6) найдем функции $p(h, t)$ и $u(h, t)$, определяющие течение в области 2^* .

Обсуждение полученных результатов. Анализ полученных закономерностей проведем для простейшего случая — среды с линейной зависимостью $p = p(V)$ при нагрузке и $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ при разгрузке. При этом в сечении $h = 0$ давление задано в виде (14).

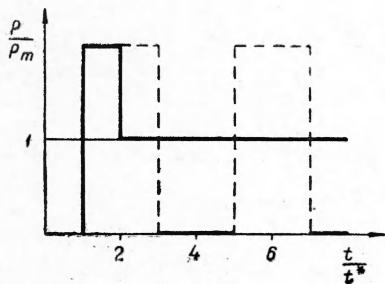


Рис. 3.

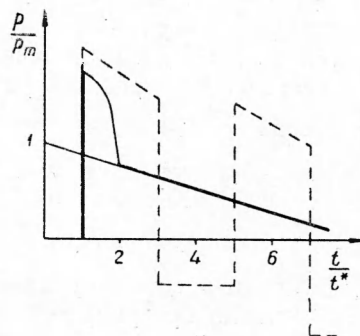


Рис. 4.

Рис. 3 соответствует взаимодействию стационарной волны ($\theta = \infty$, $p = p_m$) с преградой бесконечной массы ($m = \infty$). В линейно-упругой среде, где разгрузка происходит по закону нагрузки, давление, действующее на преграду (график 1), периодически меняется от 0 до $2p_m$. Первый скачок давления соответствует подходу фронта падающей ударной волны ($t = \frac{h^*}{A}$), первый сброс давления — подходу фронта волны разрежения, идущей от свободной поверхности ($t = 3 \frac{h^*}{A}$). Длительность каждого периода постоянного значения давления равна $2 \frac{h^*}{A}$, т. е. времени движения волны от преграды до свободной поверхности и обратно.

В пластической среде давление на преграду (график 2 на рис. 3) при $t = \frac{h^*}{A}$ также скачком возрастает до $2p_m$. Длительность действия этого давления равна $\frac{h^*}{A}$. При $t = 2 \frac{h^*}{A}$ давление скачком падает до p_m и в дальнейшем сохраняет это значение. Таким образом, в пластической среде влияние свободной поверхности сказывается вдвое раньше, чем в

упругой и приводит к воспроизведению при $t > 2 \frac{h^*}{A}$ на преграде давления, действующего на свободной поверхности.

Рис. 4 соответствует взаимодействию нестационарной волны ($\theta \neq \infty$) с преградой бесконечной массы. В упругой среде (график 1) при $t = \frac{h^*}{A}$ давление на преграду скачком возрастает до $2p_m$, а затем за время, равное $2 \frac{h^*}{A}$, постепенно уменьшается до

$$p = 2p_m \left(1 - \frac{2h^*}{A\theta} \right).$$

Под влиянием волны разрежения, идущей от свободной поверхности, давление скачком убывает до $-4 \frac{p_m h^*}{A\theta}$ и сохраняет это значение до $t = 5 \frac{h^*}{A}$. Затем давление скачком возрастает до $p = 2p_m$.

$\cdot \left(1 - \frac{2h^*}{A\theta} \right)$ и начинает постепенно убывать. При $t = 7 \frac{h^*}{A}$ оно снова скачком падает. Периодическое возрастание и падение давления продолжается до $t = \theta$, когда полученное решение перестанет выполняться.

В пластической среде (график 2) давление, возрастающее при $t = \frac{h^*}{A}$ скачком, не достигает $2p_m$, так как падающая волна на пути к преграде испытывает угасание и максимальное давление на ее фронте $p < p_m$. Затем давление на преграду постепенно уменьшается, а при $t = 2 \frac{h^*}{A}$ вследствие влияния свободной поверхности падает до давления, действующего в этот момент времени в сечении $h=0$. В дальнейшем нагрузка на преграду остается равной давлению на свободной поверхности.

На рис. 5, 6, 7 представлены графики давления, действующего на преграду конечной массы при $p = p_m$ и $\theta = \infty$. При этом $m \ll h^*$. Графики 1, 2 соответствуют давлениям, действующим на плоскость преграды, обращенную к начальному сечению в упругой (1) и пластической (2) средах. График 3 — давление на преграду со стороны второй среды в пластической среде.

Рисунки 5, 6, 7 отличаются между собой соотношениями между акустическими сопротивлениями сред перед (A) и за (A^*) преградой.

Рис. 5 относится к случаю $A = A^*$. К моменту времени $t = 2 \frac{h^*}{A}$ преграда в упругой и пластической средах уже практически вовлечена в движение вместе со средой, графики 1 и 2 близки к p_m . Поэтому в пластической среде влияние свободной поверхности приводит к незначительному падению давления (график 2), которое после этого снова возрастает и стремится к p_m . Давление на заднюю сторону преграды (график 3) быстро возрастает и стремится к p_m . В упругой среде (график 1) влияние свободной поверхности приводит к кратковременному падению давления до отрицательного значения.

При $A < A^*$ (см. рис. 6) преграда также быстро вовлекается в движение, однако при этом давление (графики 1, 2 и 3) стремится к величине $p > p_m$. Влияние свободной поверхности в пластической среде приводит к падению давлений на обе грани. В дальнейшем давления стремятся к p_m . В области 2* происходит разгрузка среды. Графики 1,

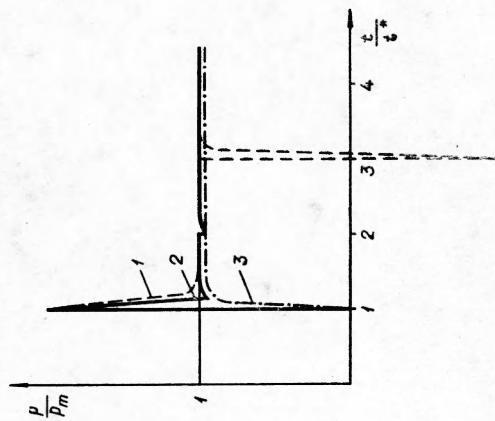


Рис. 5.

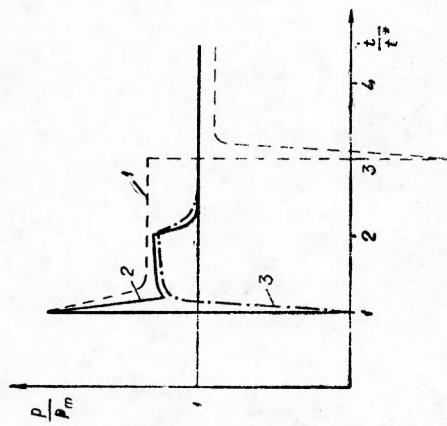


Рис. 6.

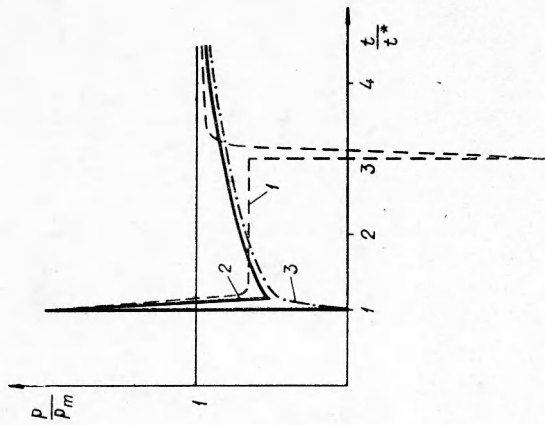


Рис. 7.

2, 3 при $t > \frac{2h^*}{A}$ построены в соответствии с численным интегрированием. В упругой среде влияние свободной поверхности приводит к кратковременному падению давления до отрицательного значения при $t = 3 \frac{h^*}{A}$.

При $A > A^*$ (см. рис. 7) давление (графики 1, 2, 3) стремится к $p < p_m$. Влияние свободной поверхности в пластической среде приводит к постепенному возрастанию давления до p_m , а в упругой среде к его кратковременному падению и дальнейшему возрастанию.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях влияние свободной поверхности в пластической среде сказывается раньше, чем в упругой. Оно приводит к постепенному возрастанию или падению давления до его значения на свободной поверхности. В упругой среде влияние свободной поверхности приводит к периодическим падениям давления скачком до отрицательного значения.

Поступила в редакцию
2/XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Ляхов, Н. И. Полякова. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, 3.
2. Г. М. Ляхов, Н. И. Полякова. ПМТФ, 1962, 5.
3. Г. М. Ляхов. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, 1.
4. Н. В. Зволинский, Г. М. Рыков. ПММ, 1963, XXVII.
5. S. Kaliski, J. Osiecki. Proc. of vibr. problems. Warsaw, 1959, 1.
6. Г. М. Ляхов. Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах. М., «Недра», 1964.