Теплофизика и аэромеханика, 2014, том 21, № 5

УДК 532.517+532.543

Простая модель для расчета толщины турбулентной пленки жидкости, увлекаемой силой тяжести и потоком газа*

П.И. Гешев

Новосибирский государственный университет,

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: geshev@itp.nsc.ru

Предложена модель расчета толщины турбулентной пленки, движущейся под действием силы тяжести и касательного напряжения трения газового потока. Использована простейшая аппроксимация турбулентной вязкости, дающая кубический закон затухания в вязком подслое и логарифмическую асимптотику скорости вдали от стенки. Целью работы является построение явных формул для толщины пленки в зависимости от числа Рейнольдса и фактора трения газового потока. Сравнение расчетов по модели с имеющимися в литературе экспериментальными данными показывает, что отклонение максимально при ламинарно-волновых режимах и может достигать 10–20 %.

Ключевые слова: стекающая пленка жидкости, вязкость, сила тяжести, трение потока газа, турбулентность.

Рассмотрим слой жидкости толщины δ, стекающий по вертикальной поверхности с углом относительно горизонта α. К свободной поверхности пленки приложено касательное напряжение трения τ_i, возникающее под действием спутного потока газа. Уравнение для профиля осредненной скорости жидкости в установившемся потоке имеет вид

$$\frac{d}{dy}\left(\nu+\nu_T(y)\right)\frac{du}{dy}=-g\sin\alpha, \tag{1}$$

где $u(y)$ — профили скорости в пленке, y — координата, перпендикулярная к стенке, g — ускорение силы тяжести, ν, ν_T — молекулярный и турбулентный коэффициенты вязкости соответственно.

Интегрируя уравнение (1), получаем распределение касательного напряжения трения τ с учетом трения газового потока на поверхности пленки τ_i :

$$\tau=\rho\left(\nu+\nu_T\right)\frac{du}{dy}=\rho g\left(\delta-y\right)\sin\alpha+\tau_i, \tag{2}$$

где ρ — плотность жидкости. Локальное напряжение трения τ линейно распределено по толщине пленки и на стенке при $y = 0$ принимает значение

$$\tau_w=\rho g\delta\sin\alpha+\tau_i. \tag{3}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки Российской Федерации.

Согласно теории пристенной турбулентности [1], динамическая скорость $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ и кинематическая вязкость ν полностью определяют турбулентность в пристенной зоне, то есть амплитуду пульсаций скорости и средний профиль скорости. Используем далее безразмерную координату $\eta = v_* y / \nu$ и скорость $U = u / v_*$ и приведем уравнение (2) к виду

$$\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right)\frac{dU}{d\eta} = \frac{1}{\tau_w}\left[\tau_i + \left(1 - \frac{\eta}{\delta_+}\right)\rho g \delta \sin\alpha\right], \tag{4}$$

где $\delta_+ = v_* \delta / \nu$ — первая безразмерная толщина пленки.

Интегрируя уравнение (4), получаем профиль скорости

$$U = \frac{\rho g \delta}{\tau_w}\sin\alpha \int_0^\eta \frac{(1 - \eta / \delta_+) + F / \delta_-}{1 + \varphi(\eta)} d\eta, \tag{5}$$

где $\delta_- = \delta\left(g \sin\alpha / \nu^2\right)^{1/3}$ — вторая безразмерная толщина пленки, $\varphi = \nu_T / \nu$ — функция, задающая профиль турбулентной вязкости, $F = \tau_i / \rho (g\nu \sin\alpha)^{2/3}$ — фактор трения. Отметим, что безразмерная толщина δ_- непосредственно определяет размерную толщину пленки δ. Первая безразмерная толщина $\delta_+ = v_* \delta / \nu$ является вспомогательной в нашей модели. Она зависит от размерной толщины δ сложным образом, так как входящая в нее скорость $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ также содержит δ согласно уравнению (3). Толщины δ_- и δ_+ — безразмерные функции критериев F и $\mathrm{Re} = \int_0^\delta u dy / \nu$.

Одна из первых и наиболее полных моделей турбулентной пленки описана в работах [2, 3]. Она основана на уравнениях (1)–(3) и на турбулентной вязкости Прандтля, выражаемой через путь перемешивания l с демпфированием в вязком подслое:

$$\nu_T = l^2 \frac{du}{dy}, \quad l = \kappa y (1 - e^{-\eta / A}), \quad \kappa = 0{,}4, \quad A = 26.$$

В работах [2, 3] безразмерная толщина δ_- рассчитана как функция двух переменных: F и Re.

В работе [4] было предложено использовать логарифмический профиль скорости для расчета связи толщины пленки с расходом жидкости, что привело к формуле

$$(3 + 2{,}5 \ln \delta_+)\, \delta_+ - 39 = \mathrm{Re}, \tag{6}$$

в которой был учтен только вклад логарифмического участка. Этот недостаток был исправлен в работе [5], где был учтен линейный профиль в вязком подслое. Вместо логарифмического профиля скорости вдали от стенки (при $\eta > 24$) здесь была использована степенная аппроксимация $u / v_* = 8{,}74\, \eta^{1/7}$, что привело к формулам

$$\delta_+ = (2\ \mathrm{Re})^{1/2}, \quad \mathrm{Re} < 290, \tag{7}$$

$$\delta_+ = 0{,}169\ \mathrm{Re}^{7/8}, \quad \mathrm{Re} > 290.$$

Отметим, что в работах [4, 5] игнорировалось изменение трения τ по толщине пленки, описываемое уравнением (2). Как будет показано далее, действительно, фактор трения F весьма слабо влияет на величину δ_+.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы, сохранив полноту модели, представленную в работах [2, 3], использовать более простую модель турбулентного переноса и построить явные аналитические формулы для толщин δ_+ и δ_- в зависимости от критериев F и Re.

Турбулентная вязкость определяется как отношение рейнольдсовых напряжений $-\overline{uv}$ к градиенту средней скорости. В вязком подслое градиент скорости постоянен, а две компоненты пульсационных скоростей, входящие в рейнольдсовы напряжения, пропорциональны соответствующим степеням y. Продольная скорость $u \propto y$ (следствие граничного условия прилипания); перпендикулярная к стенке пульсация скорости $v \propto y^2$ (следствие уравнения неразрывности и граничного условия непротекания). Поэтому в зоне вязкого подслоя, при $\eta < 10$, турбулентная вязкость изменяется как $\nu_T \sim \nu\eta^3$ [1, 6, 7]. В следующей за вязким подслоем зоне $25 < \eta < 0,2\delta_+$ (логарифмическая область) турбулентная вязкость имеет вид: $\nu_T = \nu\kappa\eta$, где $\kappa = 0,4$ — константа Кармана [1, 8]. Поэтому для функции турбулентной вязкости φ можно предложить простую аппроксимацию [7]:

$$\varphi = \eta^3 \Big/ \left(A + B\eta^2 \right), \tag{8}$$

дающую при больших и малых η верные асимптотики.

Очевидно, что $B = 1/\kappa = 2,5.$ При $\eta >> 10$ из интеграла (5) получим логарифмическую асимптотику

$$U = B \ln\eta + C. \tag{9}$$

Положив в формуле (8) $A = 1125$, получаем $C = 5,5$. Это совпадает с известной константой в логарифмической асимптотике профиля скорости Никурадзе [8].

Для вычисления расхода жидкости в пленке проинтегрируем скорость (5) по η от 0 до δ_+. Это дает число Рейнольдса пленочного течения

$$\mathrm{Re} = \int_0^{\delta} \frac{udy}{\nu} = \delta_-^3 \int_0^{\delta_+} d\eta \int_0^{\eta} \frac{F/\delta_- + \left(1 - \eta/\delta_+\right)}{\delta_+^2 (1+\varphi)}\, d\eta. \tag{10}$$

Преобразуем двукратный интеграл (10) в однократный. Обозначим подынтегральную функцию через ψ и внутренний интеграл символом I: $I(\eta) = \int_0^{\eta} \psi(\xi)\, d\xi.$ Применим к внешнему интегралу в формуле (10) правило интегрирования по частям:

$$\int_0^{\delta_+} I(\eta) d\eta = \left[\eta I(\eta)\right]_0^{\delta_+} - \int_0^{\delta_+} \eta \frac{dI(\eta)}{d\eta}\, d\eta - \int_0^{\delta_+} \eta\psi(\eta) d\eta = \int_0^{\delta_+} (\delta_+ - \eta)\, \psi(\eta)\, d\eta$$

и в результате получим

$$\mathrm{Re} == \delta_-^2 \left[F f_1\left(\delta_+\right) + \delta_- f_2\left(\delta_+\right) \right], \tag{11}$$

где функции f_1 и f_2 имеют вид:

$$f_1 = \frac{1}{\delta_+^{\,2}} \int_0^{\delta_+} \frac{(\delta_+ - \eta)\, d\eta}{1+\varphi}, \tag{12}$$

$$f_2 = \frac{1}{\delta_+^{\,3}} \int_0^{\delta_+} \frac{(\delta_+ - \eta)^2\, d\eta}{1+\varphi}. \tag{13}$$

Функции f_1 и f_2 зависят только от δ_+ и от вида функции φ. Для φ, определяемой формулой (8), эти функции показаны на рис. 1.

Две безразмерные толщины δ_+ и δ_- связаны дополнительной формулой

$$\delta_+^2 = \delta_-^2\,(F + \delta_-), \tag{14}$$

получаемой из выражения (3) после умножения на $(\delta/\nu)^2/\rho$ и приведения к безразмерному виду.

Формулы (11)–(14) дают в неявном виде зависимость толщин δ_+ и δ_- от критериев Рейнольдса Re и трения F. Результаты расчетов по этим формулам будем далее обозначать как расчеты по точной модели. Наша задача — на основе асимптотик решений модели (11)–(14) построить приближенные явные формулы для расчетов толщин пленки δ_+ и δ_-.

Толщину δ_- найдем из решения кубического уравнения (14) по формуле Кардано [9]:

$$\delta_- = \frac{\delta_+}{\left[0{,}5\delta_+ + \sqrt{0{,}25\delta_+^{\,2} - (F/3)^3}\right]^{1/3} + \left[0{,}5\delta_+ - \sqrt{0{,}25\delta_+^{\,2} - (F/3)^3}\right]^{1/3}}. \tag{15}$$

Следует отметить, что при значениях параметра $F > 3\left(\delta_+/2\right)^{2/3}$ вычисления необходимо проводить в комплексной арифметике. Этого можно избежать, если воспользоваться тригонометрической формой представления комплексных чисел. Тогда при $F > 3\left(\delta_+/2\right)^{2/3}$ толщина выражается формулой

$$\delta_- = \frac{\delta_+}{2(F/3)^{1/2}\cos(\theta/3)}, \quad \text{где} \quad \theta = \sin^{-1}\sqrt{1 - \frac{3^3\,\delta_+^{\,2}}{4F^3}}.$$

Из решения (15) получаем асимптотики при малых и больших F:

$$\delta_- = \delta_+^{\,2/3} - F/3 \quad (F \ll \delta_+^{\,2/3}),$$

$$\delta_- = \delta_+/\sqrt{F} \quad (F \gg \delta_+^{\,2/3}).$$

Используя эти асимптотики, можно построить приближенное выражение

$$\delta_- = \delta_+^{2/3}\left[\left(1 + \frac{F}{\delta_+^{2/3}}\right)^2 + \left(\frac{F}{\delta_+^{2/3}}\right)^3\right]^{-1/6}, \tag{16}$$

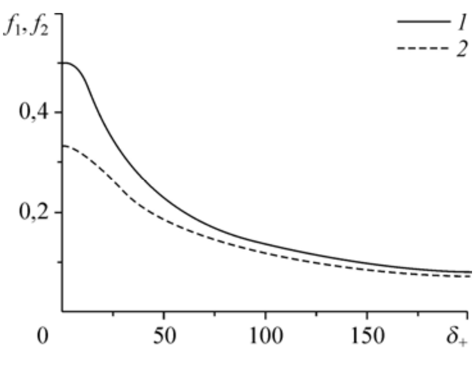

Рис. 1. Зависимость функций f_1 и f_2 от толщины δ_+.
1 — f_1, *2* — f_2.

которое при всех F и δ_+ аппроксимирует решение (15) с точностью порядка 1 % и позволяет избежать обращения к комплексным числам.

Функции f_n, определяемые интегралами (12)–(13), имеют асимптотики при малых и больших δ_+:

$$f_n = \frac{1}{(n+1)}\left(1 - \frac{1\cdot 2\cdot 3\,\delta_+^{\,3}}{A(n+2)(n+3)(n+4)}\right) \text{ для } \delta_+ << 1, \tag{17}$$

$$f_n = \frac{B\ln\delta_+ + C - B(n+1)/2}{\delta_+} \quad \text{для } \delta_+ >> 1, \tag{18}$$

где n = 1 или 2 для формул (12) и (13) соответственно.

Поделим уравнение (11) на выражение (14) и получим

$$\frac{\mathrm{Re}}{\delta_+^{\,2}} = \frac{F f_1 + \delta_- f_2}{F + \delta_-} = \bar{f}. \qquad 19)$$

Правая часть в формуле (19) построена как средневзвешенное значение из функций f_1 и f_2. Как видно из рис. 1, эти две функции при больших числах Рейнольдса имеют весьма близкие асимптотические значения. При малых его значениях (Re << 10) из формулы (17) следует: $f_1 = 1/2$ и $f_2 = 1/3$. Для правой части выражения (19) предлагаются аппроксимации

$$\bar{f} = \left[W(F) + 2R\left\langle\left(\ln(C_0 + R)\right)^2 + 1/R\right\rangle^{-1/2}\right]^{-1}, \tag{20}$$

$$W(F) = \frac{F + \mathrm{Re}^{1/3}}{F/2 + \mathrm{Re}^{1/3}/3}, \tag{21}$$

где функция $W(F)$ учитывает структуру правой части уравнения (19) при малых числах Рейнольдса, R = Re/Re$_C$, $\mathrm{Re}_C = 170$ — характерное число Рейнольдса, константа C_0 = 10. Вид функций (20), (21) и значения Re_C и C_0 выбраны на основе асимптотик (17)–(18) из условия наилучшего согласования с точной моделью (11)–(14). Из выражений (19) и (20) получаем аппроксимацию для первой толщины пленки δ_+:

$$\delta_+ = \left\{\mathrm{Re}\left[W(F) + 2R\left\langle\left(\ln(C_0 + R)\right)^2 + 1/R\right\rangle^{-1/2}\right]\right\}^{1/2}. \tag{22}$$

Аппроксимации (22) и (16) дают возможность прямого вычисления толщины пленки δ_- в зависимости от расхода жидкости Q, то есть от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = Q/(\rho\nu)$ и от фактора трения на свободной поверхности пленки $F = \tau_i/\left[\rho(g\nu)^{2/3}\right]$.

Формулу (22) можно еще упростить, заменив логарифмическое выражение в угловых скобках степенным:

$$\delta_+ = \left\{\mathrm{Re}\left[W(F) + \left(\frac{\mathrm{Re}}{195}\right)^{0,84}\right]\right\}^{1/2}. \tag{23}$$

Отклонения толщин δ_+ и δ_-, рассчитанных по аппроксимациям (23), (16) и по точной модели (11)–(14), составляют около 5 %, тогда как аппроксимации (22), (16) дают для δ_- в два раза меньшую погрешность — 2 %.

Рассмотрим случай $F = 0$. Для более точной логарифмической аппроксимации из формулы (22) получаем

$$\delta_- = \delta_+^{2/3} = \left\{ \mathrm{Re} \left[3 + 2R \left\langle \left(\ln(C_0 + R) \right)^2 + 1/R \right\rangle^{-1/2} \right] \right\}^{1/3}. \qquad (24)$$

Для случая степенной аппроксимации из выражения (23) имеем

$$\delta_- = \left\{ \mathrm{Re} \left[3 + \left(\mathrm{Re}/195 \right)^{0,84} \right] \right\}^{1/3},$$

откуда приходим к асимптотике при больших числах Рейнольдса: $\delta_- = 0,228\ \mathrm{Re}^{0,61}$.

На рис. 2*a*, 2*b* приведено сравнение толщин пленок δ_+ и δ_-, рассчитанных по точной модели (11)–(14) и по формуле (16) с аппроксимацией (22). Кривые для точной модели и для аппроксимаций визуально сливаются — их отклонение не более 3 % (рис. 2*a*) и 2 % (рис. 2*b*) для δ_+ и δ_- соответственно. Интересно отметить, что вспомогательная величина δ_+ действительно весьма слабо зависит от фактора трения *F*.

Рассмотрим предельные случаи нулевого и большого приложенного касательного напряжения газового потока. На рис. 3 приведено сравнение расчетных и экспериментальных толщин пленок воды, стекающих по вертикальной поверхности [10], и пленок силиконового масла, стекающих по наклонной поверхности [11]. В этих экспериментах жидкость стекала только под действием силы тяжести, поэтому $F = 0$. Формула, обобщающая результаты эксперимента [11], имеет вид:

$$\delta_- = 1 + 0,615\,\mathrm{Re}^{0,47}, \quad 2 < \mathrm{Re} < 700. \qquad (25)$$

Как видно из рис. 3, формула (25) хорошо согласуется с данными работы [10]. Однако случай малых чисел Рейнольдса описывается выражением (25) неудовлетворительно, не согласуясь с классической формулой Нуссельта — $\delta = (3\ \mathrm{Re})^{1/3}$. Видно также, что экспериментальные толщины пленок жидкости несколько меньше рассчитанных по модели (11)–(14). Причина того, что толщина пленки при волновых режимах оказывается меньше нуссельтовской, заключается в волнах большой амплитуды [10]. Амплитуды таких

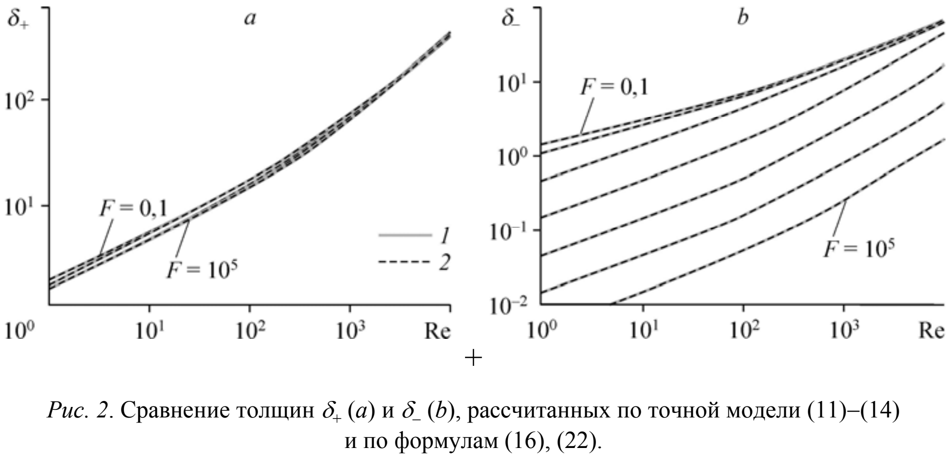

Рис. 2. Сравнение толщин δ_+ (*a*) и δ_- (*b*), рассчитанных по точной модели (11)–(14) и по формулам (16), (22).

1 — расчет по модели, *2* — расчет по формулам.

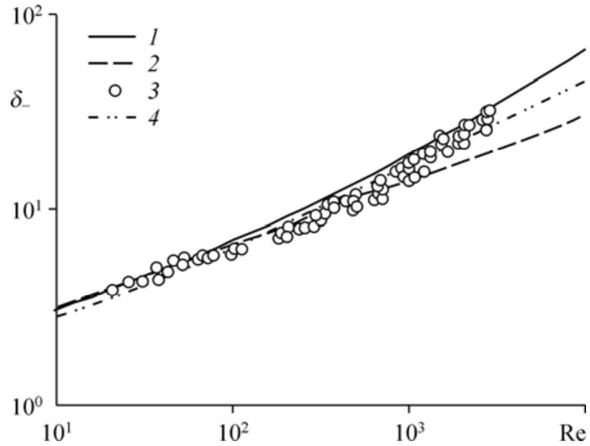

Рис. 3. Сравнение рассчитанных толщин по формуле (24) и по формуле Нуссельта с экспериментальными данными [10, 11].

1 — расчет по модели при $F = 0$, *2* — расчет по формуле Нуссельта, экспериментальные данные: *3* — работа [10], *4* — работа [11].

волн могут быть больше средней толщины пленки.

На рис. 4 приведено сравнение расчетных данных по модели (11)–(14) и по формулам (6), (7) с экспериментальными величинами из работы [12] (корреляция (26)) для пленок в восходящем кольцевом воздушно-водяном потоке при очень больших факторах трения $F >> 1$.

Экспериментально измеренные толщины пленок жидкости, показанные точками на рис. 4, рассчитаны по формуле из работы [12]:

$$\delta_+ = \left[\left(0{,}78\ \mathrm{Re}^{0{,}6}\right)^{2{,}5} + \left(0{,}13\ \mathrm{Re}^{0{,}9}\right)^{2{,}5}\right]^{0{,}4}. \tag{26}$$

В формуле (26) коэффициенты пересчитаны, так как числа Рейнольдса в настоящей работе определены через локальный удельный расход и не содержат коэффициента 4, используемого в [12]. Эти толщины при числах Рейнольдса Re < 100 заметно меньше рассчитанных по модели (11)–(14). Данное различие опять объясняется волнами большой амплитуды, наблюдавшимися в восходящем кольцевом газожидкостном потоке [12]. Интересно отметить, что хотя с ростом числа Рейнольдса и переходом к турбулентному

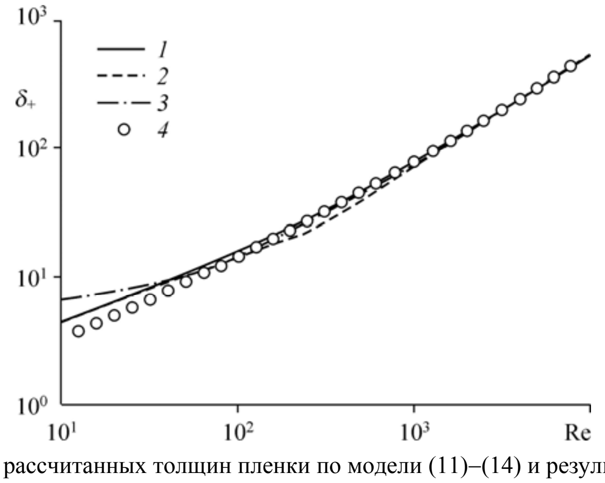

Рис. 4. Сравнение рассчитанных толщин пленки по модели (11)–(14) и результатам работ [4, 5] с экспериментальными данными, рассчитанными по корреляции (26) из работы [12].

1 — расчет по модели при $F >> 1$, расчет по формулам: *2* — из работы [5], *3* — из работы [4]; *4* — экспериментальные данные [12].

режиму амплитуда волн не уменьшается, их влияние на толщину пленки исчезает. Можно заключить, что чем сильнее заполнен профиль скорости, тем меньше влияние больших волн на среднюю толщину пленки. При параметрах Re < 100 и $F >> 1$ профиль скорости линеен и влияние больших волн максимально велико.

В заключение приведем построенную зависимость безразмерной толщины пленки $\delta_- = \delta\left(g\sin\alpha/\nu^2\right)^{1/3}$ от фактора трения F и числа Рейнольдса Re:

$$\delta_- = \frac{\delta_+}{\left[\left(\delta_+ + F\delta_+^{1/3}\right)^2 + F^3\right]^{1/6}}, \tag{27}$$

$$\delta_+ = \left\{\mathrm{Re}\left[\frac{F + \mathrm{Re}^{1/3}}{0,5F + 0,333\,\mathrm{Re}^{1/3}} + \frac{2\,\mathrm{Re}/170}{\sqrt{\left[\ln(10+\mathrm{Re}/170)\right]^2 + 170/\mathrm{Re}}}\right]\right\}^{1/2}. \tag{28}$$

Аппроксимация (27), (28) дает толщины δ_-, отклоняющиеся от точной модели не более чем на 2 %.

Рассмотрим отдельно два случая: a) пленка на вертикальной поверхности ($F = 0$, $\alpha = \pi/2$); *b*) пленка, увлекаемая потоком газа вдоль горизонтальной поверхности ($\alpha = 0$, $F = \infty$). Из формул (27)–(28) получаем для размерной толщины пленки:

a) $$\delta = \left\{\frac{\nu^2}{g}\mathrm{Re}\left[3 + \frac{2\,\mathrm{Re}/170}{\sqrt{\left[\ln(10+\mathrm{Re}/170)\right]^2 + 170/\mathrm{Re}}}\right]\right\}^{1/3},$$

b) $$\delta = \nu\left\{\frac{\rho}{\tau_i}\mathrm{Re}\left[2 + \frac{2\,\mathrm{Re}/170}{\sqrt{\left[\ln(10+\mathrm{Re}/170)\right]^2 + 170/\mathrm{Re}}}\right]\right\}^{1/2}.$$

В дальнейшем планируется построить аналогичные явные формулы для описания теплообмена в процессах испарения и конденсации в стекающих пленках жидкости.

Список литературы

1. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. М. Наука, 1986. 733 с.
2. **Dukler A.E.** Fluid mechanics and heat transfer in vertical falling-film system // Chem. Engng Prog. Symp. Ser. 1960. Vol. 56, No. 30. P. 1–10.
3. **Dukler A.E., Wicks M.** III. Gas-liquid flow in conduits // Modern Chemical Engng. 1963. Vol. 1. Physical Operations / Ed. by A. Acrivos, Chapt. 8. N.Y.: Reinhold. 87 p.
4. **Кутателадзе С.С.** Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 415 с.
5. **Kosky P.G.** Thin-liquid films under simultaneous shear and gravity forces // Int. J. Heat Mass Transfer. 1971. Vol. 14, No. 8. P. 1220–1224.
6. **Гешев П.И.** Характеристики коэффициентов турбулентного обмена в вязком подслое // Прикладная механика и техническая физика. 1974. № 2. С. 61–66.
7. **Гешев П.И.** Линейная модель пристенного турбулентного переноса. Новосибирск, 1981. 40 с. (Препринт / СО АН СССР. Ин-т теплофизики. Изд. ИТ, № 73–81).
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
9. **Корн. Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.
10. **Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.** Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.
11. **Lel V.V., Al–Sibai F., Leefken A., Renz U.** Local thickness and wave velocity measurement of wavy films with a chromatic confocal imaging method and a fluorescence intensity technique // Experiments in Fluids. 2005. Vol. 39. P. 856–864.
12. **Asali J.C., Hanratty T.J., Andreussi P.** Interfacial drag and film height for vertical annular flow // AIChE J., 1985. Vol. 31, No. 6. P. 895–902.

Статья поступила в редакцию 5 ноября 2013 г.