ПМТФ, № 1, 1961

О СФЕРИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова

(Воронеж)

Рассматривается сферическое деформированное состояние при условии пластичности общего вида [1]. Отметим, что сферическое деформированное состояние в теории идеальной пластичности рассматривалось в работе [2].

1. Сферическое деформированное состояние является непосредственным обобщением плоского деформированного состояния. В этом случае достаточно рассмотреть напряженное состояние на некоторой сферической поверхности. Плоское деформированное состояние является предельным для сферического деформированного состояния. Сферическое деформированное состояние реализуется в телах конической формы, когда нагрузки, приложенные на боковой поверхности, постоянны вдоль образующих конуса.

Исходной при изучении сферического деформированного состояния является сферическая система координат r, θ, φ, где r — радиус, θ — угол, измеряемый между радиусом и положительной осью z, φ — угол, измеряемый вокруг оси z вправо. Скорости перемещения вдоль этих осей обозначаются через u, v, w; соответствующие компоненты скоростей деформации — через $\varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_{\theta\varphi}$, а компоненты напряжения — через $\sigma_r, \ldots, \tau_{\theta\varphi}$. Если предположить, что $u = 0$, $v = rv^*(\theta, \varphi)$, $w = rw^*(\theta, \varphi)$, $\tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$, а все остальные компоненты скоростей деформаций и напряжений зависят только от θ и φ, то, как показано в [2], уравнения равновесия сводятся к двум уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta = 0 \qquad (1.1)$$

и условию

$$\sigma_r = \tfrac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_\varphi) \qquad (1.2)$$

Отличные от нуля компоненты скоростей деформаций имеют вид

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v\cos\theta\right)$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial \theta} - w\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \qquad (1.3)$$

В дальнейшем индекс звездочка сверху у компонент v, w опущен.

Предположим, что предельное состояние пластического материала интерпретируется шестигранной пирамидой в пространстве главных напряжений, уравнение которой записано в виде

$$\max\{|\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg}\rho\} = k \qquad (1.4)$$

где τ_n, σ_n — касательное и нормальное напряжения; ρ, k — постоянные.

Так как напряжение σ_r является главным напряжением, то пусть $\sigma_r = \sigma_3$, тогда компоненты напряжения σ_1, σ_2 лежат в плоскости $\theta\varphi$, причем $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$. Если обозначить угол между первым главным напряжением и осью θ через ψ, то, как известно

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\psi, \qquad \sigma_\varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\psi$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\psi \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) получим условие предельного равновесия для сферического деформированного состояния пластической среды

$$(\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + 4\tau_{\theta\varphi}{}^2 = (\sigma_\theta + \sigma_\varphi + 2H)^2 \sin^2 \rho, \qquad H = k \operatorname{ctg} \rho \tag{1.6}$$

Легко показать, что из условия (1.2) следует невозможность соответствия сферического деформированного состояния ребрам пирамиды предельного состояния (1.4).

Более общий результат следует из того, что условие (1.2) при $\tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$ соответствует обращению в нуль третьего инварианта тензора девиатора напряжений, поэтому любое условие предельного равновесия изотропных сред в случае сферического деформированного состояния сводится к виду

$$(\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + 4\tau_{\theta\varphi}{}^2 = f(\sigma) \qquad \left(\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_\varphi)\right)$$

Рассматривая условие (1.6) в качестве потенциала скоростей деформаций, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \lambda [\sigma_\theta - \sigma_\varphi - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi + 2H) \sin^2 \rho] \\ \varepsilon_\varphi &= \lambda [\sigma_\varphi - \sigma_\theta - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi + 2H) \sin^2 \rho] \end{aligned} \qquad \varepsilon_{\theta\varphi} = 2\lambda\tau_{\theta\varphi} \tag{1.7}$$

2. Рассмотрим уравнения равновесия (1.1) при условии (1.6). Для интегрирования этих уравнений введем новую функцию

$$p = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \sin \rho} \tag{2.1}$$

Тогда условие (1.6) будет удовлетворено, если положить

$$\sigma_\theta = p(1 + \sin \rho \cos 2\psi) - H, \quad \sigma_\varphi = p(1 - \sin \rho \cos 2\psi) - H$$

$$\tau_{\theta\varphi} = p \sin \rho \sin 2\psi \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.1) и преобразовывая полученные выражения, относительно двух функций p, ψ будем иметь следующую систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} (\cos 2\psi + \sin \rho) \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\sin 2\psi}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + 2p \frac{\sin \rho}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= -2p \sin \rho \operatorname{ctg} \theta \\ \sin 2\psi \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\cos 2\psi - \sin \rho}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2p \sin \rho \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Эта система имеет два семейства характеристик, уравнение которых записывается в виде

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\operatorname{tg}(\psi \pm \mu)}{\sin \theta}, \qquad \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что характеристики не являются взаимно ортогональными. Вдоль характеристик имеют место соотношения, обобщающие интегралы Генки [3]

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \rho \frac{dp}{p} \pm d\psi \pm \cos \theta d\varphi = 0 \tag{2.5}$$

Верхний знак в соотношениях (2.4) и (2.5) соответствует характеристикам первого семейства, нижний — характеристикам второго семейства. Известно, что в пределе, когда угол наклона ρ грани пирамиды к гидростатической оси стремится к нулю, пирамида переходит в призму Треска. Тогда, полагая $\rho = 0$ в формулах (1.6), (2.2), (2.4) и (2.5) и совершая предельный переход, получим соответствующие формулы для сферического деформированного состояния идеально пластической среды [2].

3. Для исследования поля скоростей перемещений воспользуемся соотношениями (1.7) и получим

$$\frac{\varepsilon_{\theta\varphi}}{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi} = \frac{\tau_{\theta\varphi}}{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}, \qquad \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi}{\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi} = -\frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{(\sigma_\theta + \sigma_\varphi + 2H)\sin^2\rho} \tag{3.1}$$

Подставляя (2.2) в правую часть (3.1), получим

$$\frac{\varepsilon_{\theta\varphi}}{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\psi, \qquad \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi}{\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi} = -\frac{\cos 2\psi}{\sin\rho} \tag{3.2}$$

Подставляя (1.3) в (3.2) и преобразовывая полученные уравнения, будем иметь

$$\sin\theta\cos 2\psi \frac{\partial w}{\partial\theta} + \sin 2\psi \frac{\partial w}{\partial\varphi} - \sin\theta\sin 2\psi \frac{\partial v}{\partial\theta} + \cos 2\psi \frac{\partial v}{\partial\varphi} =$$
$$= \cos\theta\,(w\cos 2\psi - v\sin 2\psi)$$

$$\sin\rho\sin\theta\cos 2\psi \frac{\partial v}{\partial\theta} - (\sin\rho - \cos 2\psi)\frac{\partial w}{\partial\varphi} = v\cos\theta\,(\sin\rho - \cos 2\psi) \tag{3.3}$$

Записывая характеристический определитель этой системы, получим уравнения характеристик

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\operatorname{tg}(\psi \pm \mu)}{\sin\theta} \tag{3.4}$$

Таким образом, характеристические направления уравнений поля скоростей перемещений совпадают с характеристиками уравнений поля напряжений. Дифференциальные соотношения вдоль характеристик имеют вид

$$\operatorname{tg}(\psi \pm \mu)\,dw + dv + \cos\theta\,[v\operatorname{tg}(\psi \pm \mu) - w]\,d\varphi = 0 \tag{3.5}$$

Введем замену переменных

$$\begin{aligned} V &= v\sin(\psi + \mu) - w\cos(\psi + \mu) \\ W &= -v\sin(\psi - \mu) + w\cos(\psi - \mu) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Тогда уравнения (3.5) запишутся в виде

$$\begin{aligned} dV\sin\rho - dW + \cos\rho\,(d\psi + \cos\theta\,d\varphi)\,V &= 0 \\ dV - dW\sin\rho + \cos\rho\,(d\psi + \cos\theta\,d\varphi)\,W &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Соотношения (3.7) имеют место вдоль характеристик и являются непосредственным обобщением соотношений Гейрингер [4] в теории идеально пластических тел. Последние получаются из (3.7) при $\rho = 0$.

Введение компонент V, W целесообразно по следующим причинам. Как известно, граница, разделяющая область движущейся части материала от неподвижной, всегда совпадает с характеристикой. Определение (3.6) позволяет записать условие отсутствия проникновения материала в жесткую область в виде равенства нулю одной из переменных

V или W. Например, если граница жесткого состояния материала совпадает с характеристикой первого семейства, то необходимо положить $W = 0$.

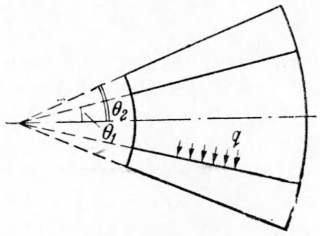
Следует отметить, что в общем случае характеристики являются неортогональными. Однако при $\rho = 0$ на сфере $r = \text{const}$ характеристики ортогональны. В этом случае $ds_\theta = rd\theta$, $ds_\varphi = r\sin\theta d\varphi$, поэтому из условия (3.4) следует

$$\frac{ds_\varphi}{ds_\theta} = \operatorname{tg}\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

Здесь ds_φ — элемент дуги вдоль параллели, ds_θ — элемент дуги вдоль меридиана.

4. В качестве примера рассмотрим несущую способность длинной толстостенной конической трубы переменного сечения, находящейся под действием равномерного внутреннего давления q (фигура). Очевидно, что напряженное состояние, возникающее в трубе, является сферически деформируемым. Предполагая, что материал трубы является жесткопластическим, получим условие (1.6) в виде

$$(\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + 4\tau_{\theta\varphi}^2 = 4k^2 \qquad (4.1)$$



Фиг. 1

Напряженное состояние в трубе в силу симметрии не должно зависеть от угла φ, поэтому полагаем $\tau_{\theta\varphi} = 0$. Тогда уравнения равновесия (1.1) примут вид

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta = 0 \qquad (4.2)$$

Условие (4.1) приводится к виду

$$\sigma_\theta - \sigma_\varphi = -2k \qquad (4.3)$$

Здесь в правой части взят знак минус, так как, очевидно, $\sigma_\varphi > \sigma_\theta$. Подставляя (4.3) (4.2) и интегрируя полученное выражение, будем иметь

$$\sigma_\theta = 2k \ln\sin\theta + c \qquad (4.4)$$

Подставляя в (4.4) граничные условия на внутренней поверхности $\theta = \theta_1$, получим

$$\sigma_\theta = -p + 2k\ln\frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}, \qquad \sigma_\varphi = -p + 2k\left(1 + \ln\frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}\right)$$

Если внешняя граница трубы свободна от нагрузок, то, предполагая, что вся труба перешла в пластическое состояние, получим величину давления, соответствующего потере несущей способности трубы

$$q = 2k\ln\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

Воронежский государственный университет

Поступила 20 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехтеоретиздат, М., 1950.
2. Ивлев Д. Д. О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 2.
3. Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах. Сб. теория пластичности, ИИЛ, М., 1948.
4. Гейрингер Г. Некоторые новые результаты в теории идеально пластического тела. Сб. проблемы механики, ИИЛ, М., 1955.