УДК 541.124

О РАСЧЕТЕ ПУЛЬСАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ДАЛЬНЕМ СЛЕДЕ ЗА ТЕЛОМ

Л. И. Скурин

(Ленинград)

В настоящей работе приводятся полуэмпирические замкнутые уравнения баланса вторых моментов пульсационных полей температуры и концентрации реагирующей примеси. На основе этой системы исследуется влияние химической реакции типа диссоциативной рекомбинации на асимптотическое (при стремлении продольной координаты к бесконечности) поведение пульсаций электронной концентрации в следе за телом.

Уравнения для вторых моментов скалярных величин получим с помощью обычного приема из трехмерных уравнений сохранения концентраций и энергии, которые для сокращения записи запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k \xi_i + I_{ik}) = w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N+1,$$

где ρ — плотность; v_k — вектор скорости; I_{ik} — вектор диффузии; w_i — скорость образования i-го компонента вследствие химических реакций; ξ_i — относительная массовая концентрация i-го компонента; $i=1, 2, \ldots, N$; индекс $N+1$ относится к температуре

$$\xi_{N+1} \equiv T, \quad I_{N+1,\,k} \equiv -\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial T}{\partial x_k},$$

а w_{N+1} представляет собой сумму членов, характеризующих работу сил давления и трения и тепловыделение вследствие химических реакций.

Умножая уравнение i-го компонента на ξ'_j, а уравнение j-го компонента на ξ'_i, складывая результаты и осредняя сумму, получим:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho\xi'_i\xi'_j v_k} + \overline{\rho v'_k \xi'_i \xi'_j} + \overline{I'_{ik}\xi'_j} + \overline{I'_{jk}\xi'_i}\right) = \sum_{k=1}^{3}\left(-\overline{\rho v'_k \xi'_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \overline{\rho v'_k \xi'_i}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} + \right.$$
$$\left. + \overline{I'_{ik}\frac{\partial \xi'_j}{\partial x_k}} + \overline{I'_{jk}\frac{\partial \xi'_i}{\partial x_k}} + \overline{w'_i\xi'_j} + \overline{w'_j\xi'_i} - v_k\overline{\rho'\xi'_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - v_k\overline{\rho'\xi'_i}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\right), \; i, j = 1, 2, \ldots, N +$$
$$+ 1. \tag{1}$$

Здесь штрих означает пульсацию, черта — осреднение, $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ (над первыми моментами черта опущена). Эти уравнения связывают вторые, третьи и четвертые моменты пульсационных полей и являются незамкнутыми. Ниже они замыкаются с помощью полуэмпирических гипотез.

Выразим третьи и четвертые моменты через вторые взаимные моменты различных скалярных полей $\theta_{ij} = \overline{\xi'_i\xi'_j}/2$ с помощью гипотез:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\overline{\rho\xi'_i\xi'_j} = \rho\theta_{ij}, \quad \frac{1}{2}\overline{\rho v'_k\xi'_i\xi'_j} = -b_{ij}\frac{\mu_\text{т}}{\mathrm{Sc}_\text{т}}\frac{\partial|\theta_{ij}|}{\partial x_k},\\
&\overline{I'_{ik}\xi'_j} + \overline{I'_{jk}\xi'_i} = b_{1ij}\mu\left(\frac{1}{\mathrm{Sc}_i} + \frac{1}{\mathrm{Sc}_j}\right)\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial x_k},\\
&\overline{\rho v'_k\xi'_i} = -\frac{\mu_\text{т}}{\mathrm{Sc}_\text{т}}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}, \quad \rho\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\overline{I'_{ik}\frac{\partial\xi'_j}{\partial x_k}} + \overline{I'_{jk}\frac{\partial\xi'_i}{\partial x_k}}\right) = \left(\frac{c_{ij}}{\mathrm{Sc}_\text{т}}\mu_\text{г} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{c_{1ij}}{\mathrm{Sc}_{ij}}\mu\right)\frac{\theta_{ij}}{\delta^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь μ, $\mu_т$ — коэффициенты ламинарной и турбулентной вязкости, Sc_i, $Sc_т$ — молекулярное (в общем случае эффективное) и турбулентное числа Шмидта, b_{ij}, b_{1ij}, c_{ij}, c_{1ij} — эмпирические постоянные, δ — характерный масштаб течения.

Второй момент $\overline{\rho'\xi_i'}$, пользуясь гипотезой, справедливой для малых концентраций ионов,

$$\rho'/\rho = -T'/T \tag{3}$$

представим в виде

$$\overline{\rho'\xi_i'} = -\rho\overline{T'\xi_i'}/T = -2\rho\theta_{N+1,\,i}/T. \tag{4}$$

Моменты, содержащие пульсационное поле $w_i(T, \rho, \xi_s)$, $i=1, 2, \ldots, N$, выразим

$$\overline{w_i'\xi_j'} = 2\theta_{N+1,\,j}\left(\frac{\partial w_i}{\partial T} - \frac{\rho}{T}\frac{\partial w_i}{\partial \rho}\right) + 2\sum_{s=1}^{N}\theta_{sj}\frac{\partial w_i}{\partial \xi_s}, \tag{5}$$

$$i=1, 2, \ldots, N,\ j=1, 2, \ldots, N+1.$$

Эти соотношения выведены при использовании линейной части разложения в ряд функции w_i по своим аргументам и гипотезы (3). Момент $\overline{w_{N+1}'\xi_i'}$ считается приближенно равным нулю. Проведенные в [1] оценки и расчетные данные свидетельствуют о том, что во всяком случае при умеренных числах Маха значение этого момента пренебрежимо мало.

Подставляя (2) — (4) в уравнение (1) будем иметь в приближении пограничного слоя для осесимметричного потока (x, r — продольная и радиальная координата):

$$\rho v_x\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial x} + \rho v_r\frac{\partial\theta_{ij}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(b_{ij}\frac{\mu_т}{Sc_т}\frac{\partial|\theta_{ij}|}{\partial r} + b_{1ij}\frac{\mu}{Sc_{ij}}\frac{\partial\theta_{ji}}{\partial r}\right)\right] + \frac{\mu_т}{Sc_т}\frac{\partial\xi_i}{\partial r}\frac{\partial\xi_j}{\partial r} -$$

$$-\left(\frac{c_{ij}}{Sc_т}\mu_т + \frac{c_{1ij}}{Sc_{ij}}\mu\right)\frac{\theta_{ij}}{\delta^2} + W_{ij} + A_{ij}, \tag{6}$$

$$A_{ij} \equiv \frac{\theta_{N+1,\,j}}{T}\left(\rho v_x\frac{\partial\xi_i}{\partial x} + \rho v_r\frac{\partial\xi_i}{\partial r}\right) + \frac{\theta_{N+1,\,i}}{T}\left(\rho v_x\frac{\partial\xi_j}{\partial x} + \rho v_r\frac{\partial\xi_j}{\partial r}\right), \tag{7}$$

$$W_{ij} \equiv \left(\overline{w_i'\xi_j'} + \overline{w_j'\xi_i'}\right)/2;\quad Sc_{ij} \equiv (1/Sc_i + 1/Sc_j)/2, \tag{8}$$

а момент $\overline{w_i'\xi_j'}$ вычисляется по формуле (5). Предпоследний член в правой части уравнения (6) характеризует влияние химических реакций на распределение момента θ_{ij}.

Часть из дифференциальных уравнений (6) может быть заменена простыми соотношениями

$$\theta_{ij} = \theta_{ij},\quad \sum_{s=1}^{N}\theta_{sj} = 0;\quad \sum_{s=1}^{N} g_s\theta_{sj}/M_s = 0;\quad i, j = 1, 2, \ldots, N+1, \tag{9}$$

где g_i, M_i — зарядовое число и молекулярный вес i-го компонента. Первые из этих соотношений очевидны, вторые следуют из условия $\sum_{i=1}^{N}\xi_i = 1$, третьи — из условия квазинейтральности.

В случае течения в следе за телом функции $\theta_{ij}(x, r)$ должны быть заданы в начальном сечении и удовлетворять следующим граничным условиям

$$(d\theta_{ij}/dr)\,|_{r=0} = \theta_{ij}(x, \infty) = 0. \tag{10}$$

Уравнения (6) должны интегрироваться совместно с системой уравнений, описывающей распределение скорости, температуры и концентрации отдельных компонент.

В работе [2] исследовано асимптотическое (при $x \to \infty$) решение этой системы уравнений для осесимметричного следа. Опираясь на результаты работы [2], будем искать асимптотическое решение уравнений (6) (без учета молекулярных эффектов)

$$\frac{\theta_{ij}}{\theta_{ij0}} \sim \vartheta_{ij}(z); \quad z \equiv \sqrt{2\mathrm{Sc}_\text{т} \ln 2}\, r/\delta, \tag{11}$$

где δ — полурадиус следа; $\sim$ — знак асимптотического равенства, индекс 0 относится к оси следа.

Из определения ϑ_{ij} и из условий (10) следует, что эти функции должны удовлетворять условиям

$$\vartheta_{ij}(0) = 1; \quad \vartheta'_{ij}(0) = \vartheta_{ij}(\infty) = 0 \tag{12}$$

(здесь и ниже штрих означает дифференцирование).
Относительно коэффициента турбулентной вязкости сделаем предположение

$$\mu_\text{т} \sim k u_0 \delta \rho_\infty; \quad u \equiv v_\infty - v_x, \tag{13}$$

где k — эмпирическая постоянная. В работе [3] показано, что такое предположение приводит (при $k=0{,}04$) к согласующемуся с опытными данными распределению основных параметров следа на далеких расстояниях от тела.

Прежде всего покажем, что член A_{ij}, связанный со вторыми моментами, включающими пульсации плотности, не влияет на асимптотическое поведение θ_{ij}. Действительно, ниже будет найдено, что

$$\theta_{ij0} \sim \mathrm{const}\, \chi_{i0}\chi_{j0}; \qquad \chi_i = \xi_i - \xi_{i\infty}; \qquad i = 1, 2, \ldots, N; \qquad \chi_{N+1} \equiv t \equiv \frac{T}{T_\infty} - 1 \tag{14}$$

(индекс ∞ относится к условиям на внешней границе следа). Согласно результатам работы [2],

$$t_0 \sim \mathrm{const}\, u_0; \quad \delta \sim \sqrt{c_x \ln 2/8u_0}\, d \sqrt{v_\infty}, \tag{15}$$

$$\frac{u_0}{v_\infty} \sim \left(12\sqrt{2\ln 2}\, k \frac{x}{d} \Big/ \sqrt{c_x}\right)^{-2/3}, \tag{16}$$

где c_x — коэффициент сопротивления тела; d — диаметр тела. Представим с учетом (13) — (16) член A_{ij0} и «диссипативный» член на оси в виде:

$$A_{ij0} \sim \mathrm{const}\, t_0 \chi_{i0}\chi_{j0}/x,$$

$$c_{ij}\mu_\text{т}\theta_{ij0}/(\mathrm{Sc}_\text{т}\delta^2) \sim \mathrm{const}\, u_0 \chi_{i0}\chi_{j0}/\delta.$$

Отношение этих членов стремится к нулю при $x \to \infty$, поэтому при рассмотрении асимптотики член A_{ij} можно убрать из уравнений.

Выражение для W_{ij} зависит от состава смеси газов и системы химических реакций. В настоящей работе рассматривается простейший (и в то же время практически важный) случай — тройная смесь: ион (одного типа), электрон, атом (молекула). Присвоим в дальнейшем индекс 1 электронам, 2 — температуре. Тогда, учитывая соотношения (9), можно заметить, что достаточно исследовать дифференциальные уравнения (6) лишь для моментов θ_{11}, θ_{12}, θ_{22}.

Предположим для определенности, что электроны участвуют в реакции диссоциативной рекомбинации (например, $Ar_2^+ + e \to 2Ar$, $NO^+ + e \to N + O$ и т. д.), константа скорости которой

$$K(T) = \alpha(T)^{-3/2}.$$

Тогда имеем

$$\frac{w_1}{\rho_\infty v_\infty/d} = -A\left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{-3/2}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^2 \xi_1^2; \quad A = \frac{d\rho_\infty \alpha}{T_\infty^{3/2} v_\infty M_1};$$

$$W_{11}=4\theta_{11}w_1/\xi_1-7\theta_{12}w_1/T;\quad W_{12}=2\theta_{12}w_1/\xi_1-7\theta_{22}w_1/2T. \qquad (17)$$

Величина W_{22} в соответствии со сделанным замечанием принята равной нулю.

Представляет интерес [3] рассмотреть асимптотическое решение уравнений (6) без учета молекулярных эффектов, что соответствует предположению о бесконечном значении числа Рейнольдса.

Поскольку в настоящее время опытный материал, относящийся к пульсационным параметрам примеси в следе за телом, весьма ограничен, положим (основываясь на данных, относящихся к несжимаемой жидкости [4]) $b_{ij}=1$ и $c_{ij}=c$.

Перейдем в уравнениях для θ_{11}, θ_{12}, θ_{22} к переменным $\vartheta_{ij}=\theta_{ij}/\theta_{ij0}$, z, x; устремим x к бесконечности и учтем, что в условиях рассматриваемой задачи [2]

$$\xi_1/\xi_{10}\sim\zeta(z);\ t/t_0\sim\exp(-z^2/2);\ \xi_{10}\sim L/(3Ax);\ L=\mathrm{const}.$$

В результате получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\vartheta_{11}''+\vartheta_{11}'(1/z+z)+\vartheta_{11}[6-c/(2\mathrm{Sc_т}\ln 2)+4L\zeta]=-2\gamma_{11}\zeta'^2, \qquad (18)$$

$$\vartheta_{12}''+\vartheta_{12}'(1/z+z)+\vartheta_{12}[5-c/(2\,\mathrm{Sc_т}\ln 2)+2L\zeta]=2\gamma_{12}z\zeta\exp(-z^2/2), \qquad (19)$$

$$\vartheta_{22}''+\vartheta_{22}'(1/z+z)+\vartheta_{22}[4-c/(2\,\mathrm{Pr_т}\ln 2)]=-2\gamma_{22}z^2\exp(-z^2), \qquad (20)$$

$$2\gamma_{11}\sim\xi_{10}^2/\theta_{110},\quad 2\gamma_{12}\sim t_0\xi_{10}/\theta_{120},\quad 2\gamma_{22}\sim t_0^2/\theta_{220}, \qquad (21)$$

где $\zeta(z)$ и L являются решением задачи [2]

$$\zeta''+\zeta'(1/z+z)+3\zeta-L\zeta^2=0,\ \zeta(0)=1,\ \zeta(\infty)=\zeta'(0)=0$$

(вычисления дают $L=1{,}867...$), γ_{11}, γ_{12} и γ_{22} — постоянные.

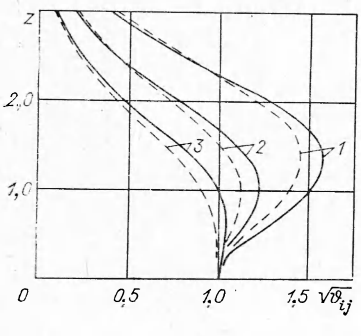
Задачей (12), (18) — (20) определяются функции ϑ_{ij} и постоянные γ_{ij}, i, $j=1$, 2. Заметим, что уравнения (18) — (20) не связаны между собой в отличие от уравнений (6), (17) для θ_{11}, θ_{12}, θ_{22}. В случае $c=8\mathrm{Sc_т}\ln 2$ для ϑ_{22}, γ_{22} имеем аналитическое решение

$$\vartheta_{22}=2\gamma_{22}[E_i(-z^2)-E_i(-z^2/2)-e^{-z^2}/2],\quad 2\gamma_{22}=2/(2\ln 2-1).$$

Этот профиль, а также найденные с помощью вычислений на ЭВМ профили $\vartheta_{12}(z)$, $\vartheta_{11}(z)$ (соответствующие $c=8\mathrm{Sc_т}\ln 2$) показаны на рисунке пунктирными линиями *3*, *2*, *1* соответственно. Вычисления дали также: $2\gamma_{11}=30{,}77$, $2\gamma_{12}=14{,}66$.

Сплошными линиями *1*, *2*, *3* показаны профили ϑ_{ij}, соответствующие значению $c=5{,}8$. При этом найдено $2\gamma_{11}=56{,}85$, $2\gamma_{12}=28{,}68$, $2\gamma_{22}=12{,}49$. Различие между соответствующими пунктирными и сплошными кривыми характеризует влияние значения эмпирической постоянной на распределение пульсационных параметров.

Вследствие последнего из соотношений (11) $\sqrt{\overline{T'^2}}/T_\infty t_0\sim\sqrt{1/\gamma_{22}}$. Судя по опытным данным, приведенным в работах [5—7], это отношение ориентировочно равно 0,4. Если исходить из этого эмпирического факта, то, как нетрудно видеть, следует применить в расчетах $c=5{,}8$.



Заметим, что если бы электроны являлись консервативной примесью ($w_1\equiv 0$), то их асимптотическое распределение совпадало бы с распределением температуры. Отсюда следует, что различие между кривыми *1* и *3* характеризует влияние химической реакции на распределение пульсаций электронной концентрации. Из рисунка видно, что химическая реакция приводит к значительному увеличению внеосевого максимума в распределении среднеквадратичного значения пульсаций электронной концентрации поперек следа. Вместе с тем сравнение значений γ_{11} и γ_{22} свидетельствует о том, что химическая реакция одновременно приводит к уменьшению осевого значения относительной пульсации $\theta_{110}/\xi_{10}^{2}$. В результате отношение интегральных характеристик распределения относительных пульсаций при наличии и отсутствии реакций оказывается близким к единице.

$$\left(\frac{\int\limits_0^\infty \theta_{11}/\xi_{10}^2 r\,dr}{\int\limits_0^\infty \theta_{22}/t_0^2 r\,dr}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}}\,\frac{\int\limits_0^\infty \vartheta_{11} z\,dz}{\int\limits_0^\infty \vartheta_{22} z\,dz}\right)^{1/2} = 0{,}923.$$

Коэффициент корреляции полей температуры и концентрации $\overline{T'\xi_1'}\Big/\sqrt{\overline{T'^2}\,\overline{\xi_1'^2}}$ оказывается практически не зависящим от координаты z и равным 0,86 при $c=8\mathrm{Sc}_т \ln 2$ и 0,928 при $c=5{,}8$.

Поступила в редакцию
3/V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Скурин. ИФЖ, 1972, **XXIII**, 1.
2. Л. И. Скурин. Тр. IV Всес. совещ. по тепломассообмену, т. 1, ч. 3, 1972.
3. Л. И. Скурин. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, 6.
4. К. Е. Джаугаштин. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, 3.
5. J. Fox, H. Rungaldier. AIAA — Paper, 1968, 68—71.
6. J. Fox, H. Rungaldier. AIAAJ, 1971, **9**, 2.
7. C. H. Gibson, C. C. Chen, S. C. Lin. AIAAJ, 1968, **6**, 4.