ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 6, № 1, 2019

УДК 539.374 DOI: 10.15372/FPVGN2019060122

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЙ ПРИ ГИДРОРАЗРЫВЕ СКВАЖИН ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

А. М. Коврижных, М. В. Курленя

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: amkovr@mail.ru,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия

Рассматривается задача об упруго-пластическом деформировании и разрушении горных пород вокруг скважин под действием внутреннего давления. Напряженное состояние в нетронутом массиве считается гидростатическим. Традиционно для определения давления гидроразрыва применяется критерий максимального нормального напряжения. Однако экспериментальные исследования в научных статьях показывают, что этот критерий не согласуется с результатами лабораторных опытов по разрушению цилиндрической и сферической полостей, проведенных в образцах горных пород. Известно, что результаты экспериментов по сложному нагружению сплошных образцов из различных материалов не подтверждаются теорией максимального нормального напряжения как по величине предельной нагрузки, так и по направлению распространения поверхности разрушения. По этой причине для сложного напряженного состояния горных пород предельное давление предлагается определять по экспериментально обоснованным критериям разрушения, которые хорошо согласуются с результатами лабораторных опытов по гидроразрыву скважин.

Деформация, напряжение, разрушение горных пород, гидравлический разрыв скважины

ULTIMATE PRESSURE DETERMINATION IN HYDRAULIC FRACTURING OF BOREHOLES FOR DIFFERENT ROCK FAILURE CRITERIA

A. M. Kovrizhnykh and M. V. Kurlenya

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: amkovr@mail.ru, *Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The problem on elastoplastic deformation and rock failure around boreholes under the action of internal pressure is considered. The stress state in the intact rock mass is assumed to be hydrostatic. The hydraulic fracturing pressure is conventionally determined by the maximum normal stress criterion. However, the experimental studies described in scientific articles show that this criterion is not consistent with the results obtained in the course of laboratory tests on failure of cylindrical and spherical cavities made in rock samples. It has been known that test results on complex loading for solid samples of various materials are not confirmed by the theory of maximum normal stress both in terms of ultimate load value and direction of failure surface propagation. In this case, for the complex stress state of rocks, it is proposed to determine the ultimate pressure by the experimentally substantiated fracture criteria which are in good agreement with the results of laboratory tests on hydraulic fracturing of boreholes.

Strain, stress, rock failure, hydraulic fracturing of borehole

Известно, что исходные напряжения в нетронутом массиве влияют на величину давления разрыва скважины и на характер расколов, которые образуются на ее поверхности [1 – 6]. Изучение формирования таких расколов и анализ величины давления разрыва могут применяться для оценки напряженного состояния в горных породах. Подробный обзор теоретических и экспериментальных работ, посвященных измерительному гидравлическому разрыву скважин, можно найти в [1, 4, 8]. Следует отметить, что, как правило, для определения величины давления и направления плоскости разрыва используется критерий максимального нормального напряжения как имеющий наиболее простую математическую формулировку [4]. Однако в результате лабораторного экспериментального исследования по разрушению цилиндрической и сферической полостей, проведенных в образцах горных пород, установлено, что для твердо-хрупких горных пород этот критерий может применяться только для небольших значений внешнего гидростатического давления, для мягко-пластических горных пород теория максимального нормального напряжения не согласуется с результатами экспериментов [5]. Оказывается, что эти опытные данные можно объяснить с позиции двух различных теорий разрушения. Первая основана на критерии прочности Кулона – Мора и предположении, что необратимая деформация перед разрушением незначительна. Во второй теории считается, что при увеличении давления в скважине происходит рост необратимой деформации на ее контуре. Разрушение горной породы на поверхности скважины происходит, когда максимальный пластический сдвиг достигает определенной величины, характерной для данного материала. Таким образом, предельное давление гидроразрыва во второй теории находится по критерию максимального пластического сдвига.

Решение задачи теории упругости по определению напряженного состояния вокруг скважины является важным практическим приложением к механике гидравлического разрыва. Наиболее известным упруго-хрупким решением данной проблемы считается исследование [1]. Авторы представили скважину в виде очень длинного цилиндра с внутренним давлением p, приложенным к поверхности $r = a$. Внешнее гидростатическое горное давление обозначим q. Упругое решение задачи о нагружении цилиндрической скважины внутренним давлением p имеет вид:

$$\sigma_r = -q + (q-p)\frac{a^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -q - (q-p)\frac{a^2}{r^2}. \tag{1}$$

Разрушение хрупких горных пород начинается, когда на контуре $r = a$ выполняется критерий Кулона – Мора. Применяя этот критерий и формулы (1), вычислим давление разрыва

$$p_* = q(1+\sin\varphi) + \sigma_s(1+\sin\varphi)/2, \tag{2}$$

где φ — угол внутреннего трения; σ_s — предел текучести (прочности) при растяжении. Плоскость разрыва скважины проходит через образующую и составляет с направлением r угол $\pi/4-\varphi/2$. Когда $\varphi = 0$, получаем критерий Треска $p_* = q + \sigma_s/2$. Если $\varphi = \pi/2$, то из (2) следует критерий максимального нормального напряжения, $p_* = 2q + \sigma_s$.

Аналогичным образом можно решить задачу о нагружении сферической полости внутренним давлением. Для хрупких горных пород разрушение происходит, когда на контуре $r = a$ выполняется критерий Кулона – Мора. Давление разрыва для сферической полости определяется по формуле

$$p_* = 3q\frac{1+\sin\varphi}{3-\sin\varphi} + 2\sigma_s\frac{1+\sin\varphi}{3-\sin\varphi}. \tag{3}$$

Если в (3) $\varphi = 0$, то $p_* = q + 2\sigma_s/3$, при $\varphi = \pi/2$ давление разрыва $p_* = 3q + 2\sigma_s$.

В [5] представлены результаты лабораторных экспериментов по цилиндрическому и сферическому гидроразрыву. Опыты проводились на изготовленных из горных пород цилиндрических кернах диаметром 10 см и длиной 12 см. Применялись горные породы четырех типов из карьеров Карфаген, Индиан, Людерс и Остин. Отбор кернов осуществлялся по однородности и различию механических свойств горных пород от твердо-хрупких до мягко-пластических. В отобранных кернах пробуривались цилиндрические и сферические полости. В эти полости посредством запрессованной стальной трубки подавалась жидкость под давлением p. Кроме того, керн нагружался внешним боковым давлением q и осевым усилием.

В качестве исходных экспериментальных данных при построении теоретических зависимостей принимались данные опытов по гидроразрыву цилиндрической полости. В [6] эти данные хорошо аппроксимируются линией, состоящей из двух прямолинейных участков. До значения q =27.58 МПа принималось $p* = 2q + k$, где k = 28.27 МПа. Далее, при q > 27.58 МПа давление разрыва $p_* = q + k_1$, где $k_1 = 55.85$ МПа.

Расчетная зависимость $p_* = p_*(q)$ в задаче о сферической полости строилась на основе формулы (3), в которой прочностные параметры φ и $\sigma_s = 2k$ находились из данных опытов по разрыву цилиндрической полости. В [6] для твердо-хрупких горных пород показано, что при значениях внешнего давления $q \le 27.58$ МПа критерий максимального нормального напряжения согласуется с результатами опытов [5], для других значений $q \ge 27.58$ МПа этот критерий не подтверждается экспериментальными исследованиями.

Рассмотрим аналогичные экспериментальные исследования на кернах мягко-пластической горной породы карьера Остин [5]. Расчетные зависимости для цилиндрической и сферической полостей строятся по формулам (2) и (3). Огибающая Кулона – Мора в этом случае состояла из одного прямолинейного участка с $\varphi = 0.2$, $\sigma_s = 34.48$ МПа. Приведенные в [6] результаты расчета хорошо подтверждаются данными опытов [5]. Таким образом, чтобы правильно интерпретировать опытные данные по гидроразрыву скважин и надежно применять их для определения напряжений в нетронутом массиве, необходимо предварительно провести лабораторные эксперименты по выявлению паспортов прочности и пластичности в виде огибающей Кулона – Мора и установить в момент разрушения предельную пластическую деформацию сдвига, которая увеличивается с ростом гидростатического давления. Ниже предлагается новый деформационный критерий разрушения, позволяющий рассчитывать предельные внешние нагрузки при разрушении горных выработок и скважин [7].

Использование какого-либо деформационного критерия для разрушения твердых тел с заданной геометрией предполагает, что при известных граничных условиях может быть найдено аналитическое или численное решение задачи, позволяющее выявить в каждой точке напряжения, а также упругие и необратимые (пластические) деформации. Решение таких задач в пространственной или плоской постановке представляет значительные трудности. Полные аналитические решения получены только в одномерных упругопластических задачах с применением критерия Треска – Сен-Венана. Наиболее приемлемыми для этих целей являются задачи с цилиндрической и осевой симметрией [7]. Это толстостенный цилиндр, сфера, а также цилиндрическая и сферическая полости в неограниченном теле. Аналитическое решение упруго-пластической задачи, представленное в [7], дает возможность измерять напряжения, пластические деформации, предельное давление и плоскость разрушения, что является важным практическим приложением к проблеме гидравлического разрыва скважины.

В условиях плоской деформации рассмотрим задачу о нагружении внутренним давлением p толстостенного цилиндра с внутренним и внешним радиусами $r = a$ и $r = b$ [6, 7]. Если давление $p < p_0$, то труба деформируется упруго и зависимость давления от безразмерного перемещения $u_a = u(a)/a$ является линейной. При $p = p_0 = k(1 - a^2/b^2)$ внутренняя поверхность цилиндра $r = a$ переходит в пластическое состояние. Пусть c — радиус пластической зоны. В упругой $c \le r \le b$ и пластической $a \le r \le c$ зонах имеем уравнение равновесия и условие совместности деформаций:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0. \tag{4}$$

Применяя в упругой зоне закон Гука и граничные условия $\sigma_r = 0$, когда $r = b$ и $\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$ при $r = c$, получим:

$$\sigma_\theta = kc^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right),\quad \sigma_r = -kc^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right),\quad \frac{u}{r}=\frac{kc^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1-2\nu}{b^2}\right).$$

Из анализа упругих напряжений видно, что в зоне необратимых деформаций $a \le r \le c$ справедливо неравенство $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$, тогда из уравнения равновесия с учетом критерия пластичности и граничного условия для σ_r на поверхности $r = a$, определим напряжения:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k,\quad \sigma_r = -p + 2k\ln\frac{r}{a},\quad \sigma_z = \nu(\sigma_\theta + \sigma_r). \tag{5}$$

Условие непрерывности σ_r на упругопластической границе приводит к уравнению:

$$2\ln\frac{c}{a} + 1 - \frac{c^2}{b^2} = \frac{p}{k}. \tag{6}$$

В зоне необратимых деформаций уравнения теории течения для поверхности Треска представляет собой сдвиг γ в направлении действия максимального касательного напряжения:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\gamma}{2} + \frac{1-\nu}{2\mu}\sigma_\theta - \frac{\nu}{2\mu}\sigma_r,\quad \varepsilon_r = -\frac{\gamma}{2} - \frac{\nu}{2\mu}\sigma_\theta + \frac{1-\nu}{2\mu}\sigma_r. \tag{7}$$

Подставляя напряжения из (5) в (7), а затем деформации ε_r и ε_θ в условие совместности (4), получим:

$$\frac{d\gamma}{dr} + \frac{2\gamma}{r} + \frac{4(1-\nu)k}{\mu}\frac{1}{r} = 0. \tag{8}$$

Решим это уравнение при условии, что при $r = c$ пластический сдвиг $\gamma = 0$:

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)k}{\mu}\left(\frac{c^2}{r^2} - 1\right). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), определим перемещение в зоне необратимых деформаций:

$$\frac{u}{r} = \frac{(1-\nu)k}{\mu}\frac{c^2}{r^2} - \frac{1-2\nu}{2\mu}\left(p - 2k\ln\frac{r}{a}\right). \tag{10}$$

Разрушение в области $a \le r \le c$ наступает, когда сдвиг γ в (9) доходит до предельной величины γ_*. Наибольшее значение γ достигается при $r = a$ и поэтому разрушение начинается с внутренней поверхности трубы. Пусть c_* — радиус фронта разрушения, тогда из (9) следует:

$$\frac{c^2}{c_*^2} = 1 + \frac{\mu\gamma_*}{2(1-\nu)k}. \tag{11}$$

Так как в зоне разрушения сдвиговая прочность отсутствует, то из уравнения равновесия и граничного условия для σ_r на внутренней поверхности имеем $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$. Применяя гипотезу упругого изменения объема и условие непрерывности радиального перемещения u на фронте разрушения, получим:

$$\frac{u}{r} = \frac{(1-\nu)k}{\mu}\frac{c^2}{r^2} - \frac{1-2\nu}{2\mu}p.$$

Безразмерное перемещение $u_a = u(a)/a$ на внутренней поверхности трубы будет:

$$u_a = \frac{(1-\nu)k}{\mu}\frac{c^2}{a^2} - \frac{1-2\nu}{2\mu}p. \tag{12}$$

Решение в области необратимых деформаций $c_* \le r \le c$ при наличии разрушенной зоны находим из (5), (6) и (10) путем замены a на c_*. Из условия непрерывности радиального напряжения при $r = c$ следует:

$$2\ln\frac{c}{c_*} + 1 - \frac{c^2}{b^2} = \frac{p}{k}. \tag{13}$$

В неограниченном теле, когда $b \to \infty$, из (11) и (13) вычислим предельное давление, при котором начинается разрушение цилиндрической полости:

$$p = p_\infty = k + k\ln\left(1 + \frac{\mu\gamma_*}{2(1-\nu)k}\right). \quad (14)$$

Если в (12) на контуре $r = a$ задавать перемещение, то можно найти радиус пластической зоны c, а из (11) — радиус фронта разрушения c_*. Для материалов с $\gamma_* = \infty$ пластический сдвиг γ ни в одной точке не достигает предельного значения и поэтому в неограниченном теле увеличение внутреннего давления приводит к увеличению пластической зоны.

В задаче о толстостенной трубе из (9) следует, что сдвиг γ наибольшее значение принимает на внутренней поверхности цилиндра $r = a$, когда $c = b$ имеем:

$$\gamma_m = \frac{2(1-\nu)k}{\mu}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right).$$

Если $\gamma_* > \gamma_m$, то при $p_0 < p < p_m$ в сечении трубы будут упругая и пластическая зоны. Когда $0 \le \gamma_* \le \gamma_m$, при определенных значениях давления p в сечении трубы могут присутствовать три области: упругая, пластическая и разрушения. Если в сечении трубы имеется зона разрушения, т. е. $c_* \ge a$, то, учитывая (11), (12) и (13), получим линейную зависимость между u_a и p:

$$u_a = A_a - B_a p,$$

$$A_a = \frac{(1-\nu)b^2}{\mu a^2}p_\infty, \quad B_a = \frac{(1-\nu)b^2}{\mu a^2} + \frac{1-2\nu}{2\mu}.$$

Каждому значению γ_* соответствует свое значение p_* и перемещение u_*, начиная с которого при увеличении перемещения u_a давление p уменьшается по линейному закону. Падение давления происходит с момента, когда необратимая деформация сдвига на внутреннем контуре трубы достигнет предельного значения. Когда $c_* = a$, то из (11) вычислим c и, подставляя найденные значения в (13), получим:

$$p_* = p_\infty - \frac{a^2}{b^2}\left(k + \frac{u\gamma_*}{2(1-\nu)}\right).$$

Изложенное позволяет определять давление разрыва в скважине при отсутствии внешнего давления на бесконечности или на внешней границе керна с цилиндрической полостью, когда $r = b$. Влияние внешнего давления q на давление разрыва p_* учитывается в приведенном решении через граничное условие $\sigma_r = q$ при $r = b$.

По схеме идеального упруго-пластического тела предложен метод решения задачи о деформировании и разрушении горной породы вокруг цилиндрической и сферической полостей, нагруженных внутренним давлением и гидростатическим внешним давлением. Разрушение материала начинается, когда максимальный пластический сдвиг достигает предельной величины, что приводит к потере сдвиговой прочности горной породы.

ВЫВОДЫ

Результаты лабораторных опытов по цилиндрическому и сферическому гидроразрыву не подтверждают критерий максимального нормального напряжения для мягко-пластических горных пород при всех значениях внешнего давления. Для твердо-хрупких горных пород этот критерий согласуется с результатами экспериментов только для небольших значений внешнего гидростатического давления.

Показано, что критерий разрушения Кулона – Мора хорошо согласуется с результатами опытов как для твердо-хрупких, так и для мягко-пластических горных пород при определенном выборе прочностных параметров этого критерия. Предложен метод решения задачи о деформировании и разрушении горных пород вокруг цилиндрической и сферической полостей, основанный на максимальном касательном напряжении и критерии предельного пластического сдвига.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Hubbert M. K. and Willis D. G.** Mechanics of hydraulic fracturing, Trans., AIME, 1957, vol. 210, pp. 153 – 166.
2. **Nadai A.** Theory of flow and fracture of solids, McGraw-Hill, New York, 1950, 705 pp. [**Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. — М: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. — 648 с.]
3. **Failure.** Mathematical Foundations of Failure Theory. Vol. 2, Moscow, Mir, 1975, pp. 336 – 520. [**Разрушение.** Математические основы теории разрушения. Т. 2. — М.: Мир, 1975. — С. 336 – 520.]
4. **Kurlenya M. V., Leont'ev A. V., and Popov S. N.** Hydraulic fracture method development for investigations of the stresses of rock massif, Journal of Mining Science, 1994, no. 1, pp. 3 – 20. [**Курленя М. В., Леонтьев А. В., Попов С. Н.** Развитие метода гидроразрыва для исследования напряженного состояния массива горных пород // ФТПРПИ. — 1994. — № 1. — С. 3 – 20.]
5. **Medlin W. L. and Masse L.** Laboratory investigation of fracture initiation pressure and orientation, Journal Society of Petroleum Engineers, 1979, vol. 19, no. 2, pp. 129 – 144.
6. **Kovrizhnykh A. M.** On the loss of stability of rock around workings and holes, Journal of Mining Science, 1990, no. 2, pp. 35 – 46. [**Коврижных А. М.** О потере устойчивости горных пород вокруг выработок и скважин // ФТПРПИ. — 1990. — № 2. — С. 35 – 46.]
7. **Kovrizhnykh A. M.** Deformation and fracture of a material in one-dimensional problems, Mechanics of Solids, 2012, no. 2, pp. 93 – 101. [**Коврижных А. М.** Деформирование и разрушение материала в одномерных упругопластических задачах // Изв. РАН. МТТ. — 2012. — № 2. — С. 93 – 101.]
8. **Economides M., Oligney R., and Valkó P.** Unified fracture design. Bridging the gap between theory and practice, Alvin, TexasЖ: Orsa Press, 2002, 232 pp. [**Экономидес М., Олайни Р., Валько П.** Унифицированный дизайн гидроазрыва пласта. Наведение мостов между теорией и практикой. — М.: ПетроАльянс Сервисис Компани Лимитед, 2004. —316 с.]