ПМТФ, № 6, 1966

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАНАЛА С КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ ПРИ УЧЕТЕ ПРИЭЛЕКТРОДНОГО ПАДЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА

А. Б. Ватажин

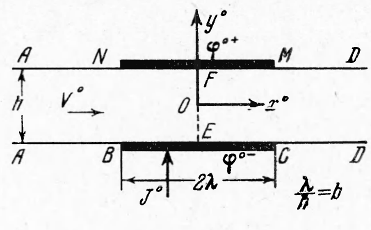
(Москва)

В работе [1] сформулированы пространственные задачи об определении электрического поля в магнитогидродинамическом канале с учетом приэлектродного падения потенциала. При их постановке используется условие малой толщины приэлектродного слоя, что позволяет соотношения на границе слоя выносить на поверхность электрода, и предполагается возможным представить зависимость приэлектродного падения потенциала $\delta\varphi^\circ$ от плотности тока j_n° на электроде в виде известной функции $\delta\varphi^\circ = f(j_n^\circ)$, определяемой из эксперимента или соответствующей теории приэлектродного слоя. Предложен приближенный метод решения таких задач, сводящий их к расчету электрического поля по известным распределениям магнитного поля и газодинамических параметров. Показано, что при малой величине $\varepsilon = \delta\varphi^\circ / E$ (E — характерная индуцированная или приложенная разность потенциалов) решение можно искать в виде рядов по степеням ε. В нулевом приближении получаются известные задачи о распределении электрического поля без учета приэлектродных процессов. Первое приближение дает поправку порядка ε. Величина $\delta\varphi^\circ$, входящая в граничные условия на электроде для первого приближения, определяется по плотности тока, рассчитанной в нулевом приближении.

Одна из рассмотренных в работе [1] задач посвящена определению электрического тока в канале с одной парой симметричных электродов. Ее решение для первого приближения найдено в виде интегральной формулы Келдыша — Седова. В настоящей работе дается анализ этого решения в случае ступенчатой зависимости $\delta\varphi^\circ$ вдоль электродов.

Рассмотрим канал высоты h с двумя симметричными электродами длины 2λ (фиг. 1). Пусть по каналу со скоростью $\mathbf{v}^\circ = (V^\circ(x^\circ), 0, 0)$ движется среда с постоянной проводимостью σ в магнитном поле[1] $\mathbf{B}^\circ = (0, 0, -B^\circ(x^\circ))$. В результате взаимодействия поля и среды между электродами индуцируется разность потенциалов $\varphi^{\circ+} - \varphi^{\circ-}$ (которую будем считать заданной), и по нагрузке, соединяющей электроды, протекает ток J° (который подлежит определению). Распределение электрического тока $\mathbf{I}^\circ$ и потенциала φ° в канале при изотропии проводимости и четной функции $B^\circ V^\circ$ находится из системы [1]

$$
\begin{gathered}
j_x = -\partial\varphi/\partial x, \qquad j_y = -\partial\varphi/\partial y + q(x) \\
\Delta\varphi = 0 \qquad (q = B^\circ V^\circ) \\
\partial\varphi/\partial y = q \quad \text{на } CD,\ MD \\
\partial\varphi/\partial x = 0 \quad \text{на } FOE \\
\varphi = \varphi^+ + \delta\varphi^+(j_y) \quad \text{на } FM \\
\varphi = \varphi^- + \delta\varphi^-(-j_y) \quad \text{на } EC
\end{gathered} \tag{1}
$$



Фиг. 1

Все величины в системе (1) — безразмерные. Скорость, магнитное поле, плотность электрического тока, потенциал и координаты отнесены к V^*, B^*, $c^{-1}\sigma B^* V^*$, $c^{-1} h B^* V^*$ и h соответственно. Функции $\delta\varphi^+(j_y)$ и

---

[1] Вектора $\mathbf{v}^\circ$ и $\mathbf{B}^\circ$ считаются известными. О таком приближении см. [2].

$\delta\varphi^-(-j_y)$ (вид которых предполагается известным) определяют приэлектродные падения потенциала у FM и EC. В том случае, когда магнитное поле неоднородно, на электродах (обычно вблизи их концов) появляются зоны обратных токов, и электрод делится на участки, одни из которых работают в режиме катода, другие — анода. Вид зависимостей $\delta\varphi$ на этих участках различный. Граничные точки этих участков должны определяться из решения системы (1).

Во многих случаях приэлектродное падение потенцила относительно невелико: $\delta\varphi = \varepsilon\, s(j_n)$, $\varepsilon = o\,(1)$, $s = O\,(1)$. Тогда решение системы (1) можно искать в виде рядов

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots, \quad j_x = j_{x0} + \varepsilon j_{x1} + \ldots, \quad j_y = j_{y0} + \varepsilon j_{y1} + \ldots \tag{2}$$

Соответствующие решения для нулевого приближения были получены в работах [3,4].

Система уравнений для первого приближения и ее решение имеют вид

$$j_{x1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad j_{y1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \quad \Delta\varphi_1 = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{на } CD, MD; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0 \quad \text{на } FOE, \quad \varphi_1 = s_0^+ \quad \text{на } FM \tag{3}$$

$$\varphi_1 = s_0^- \quad \text{на } EC \qquad (s_0^+ = s\,[j_{y0}(x, {}^1/_2)], \quad s_0^- = s\,[-j_{y0}(x, -{}^1/_2)])$$

$$w(z) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{\pi g(t)}\int\limits_k^1 \left[\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{1/2}\frac{\beta^-(\rho)}{\rho - t} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{1/2}\frac{\beta^+(\rho)}{\rho + t}\right]d\rho + \frac{\gamma}{\sqrt{(t-1)(t+1)}} \tag{4}$$

$$z = x + iy, \qquad t = k\sin\pi i z, \qquad g(t) = \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{1/2}, \qquad \gamma = \frac{\pi r - i_4}{2K(k)}$$

$$k = \operatorname{sch}\frac{\pi\lambda}{h}, \qquad r = s_0^+ - s_0^- \quad \text{при } x = 0$$

$$\beta^+(\rho) = \frac{ds_0^+}{dx}, \qquad \beta^-(\rho) = \frac{ds_0^-}{dx} \quad \text{при } x = x(\rho) = \frac{1}{\pi}\operatorname{ar\,ch}\frac{\rho}{k}$$

$$i_4 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-k}^{k}\left(\frac{1+\tau}{(1-\tau)(k^2-\tau^2)}\right)^{1/2}\left\{\int\limits_k^1\left[\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{1/2}\frac{\beta^-(\rho)}{\rho-\tau} - \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{1/2}\frac{\beta^+(\rho)}{\rho+\tau}\right]d\rho\right\}d\tau$$

В этих формулах $K\,(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, для квадратных корней выбраны ветви, которые положительны при $t = \tau > 1$. Функция $t\,(z)$ осуществляет конформное отображение правой половины канала на верхнюю полуплоскость.

Снимаемый электрический ток J_1 и работа A_1 среды по преодолению сопротивления магнитного поля определяются формулами

$$J_1 = 2\int\limits_0^b j_{y1}(x, {}^1/_2)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\pi r\alpha^* + i_4\alpha^* + 2\,(i_1 - i_2 - i_3)\right] \tag{5}$$

$$(\alpha^* = K(k')\,/\,K(k), \quad k^2 + k'^2 = 1, \quad b = \lambda\,/\,h)$$

$$i_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_k^1\left(\frac{1+\tau}{(1-\tau)(\tau^2-k^2)}\right)^{1/2}\left[\int\limits_k^1\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{1/2}\frac{\beta^+(\rho)\,d\rho}{\rho+\tau}\right]d\tau$$

$$i_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_k^1 \ln\frac{1-\tau}{\tau-k}\,\frac{\beta^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-k^2}}$$

$$i_3 = \frac{1}{\pi}\int\limits_k^1 \left(\frac{1+\tau}{(1-\tau)(\tau^2-k^2)}\right)^{1/2} \left\{\int\limits_k^1 \left[\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{1/2} \beta^-(\rho) - \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^{1/2} \beta^-(\tau)\right] \frac{d\rho}{\rho-\tau}\right\} d\tau$$

$$A_1 = 2\int\limits_0^\infty \int\limits_{-1/2}^{1/2} qj_{y1}\,dx\,dy = 2\int\limits_0^b q(s_0^- - s_0^+)\,dx + 2\int\limits_b^\infty q\nu\,dx \tag{6}$$

$$\nu(x) = s_0^-(b, -1/2) - s_0^+(b, 1/2) + \int\limits_b^x \mu\,dx$$

$$\mu(x) = \frac{2\gamma}{\sqrt{\tau^2-1}} - \frac{2}{\pi\sqrt{\tau^2-1}}\int\limits_k^1 \left[\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{1/2} \frac{\beta^-(\rho)(\tau^2+\rho)}{\tau^2-\rho^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{1/2} \frac{\beta^+(\rho)(\tau^2-\rho)}{\tau^2-\rho^2}\right] d\rho \qquad (\tau = k\,\mathrm{ch}\,\pi x)$$

Расчет по формулам (5) и (6)— чрезвычайно трудоемкая задача. Однако, если приэлектродное падение потенциала можно считать постоянным[1], вычисления значительно упрощаются. Примем, что прианодная разность потенциалов (которая обычно значительно меньше прикатодной) равна нулю. Тогда функции s_0^+ и s_0^-, а также их производные представляются формулами

$$s_0^+ = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < x^*, \\ 0 & \text{при } x^* < x < b, \end{cases} \qquad s_0^- = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < x^* \\ 1 & \text{при } x^* < x < b \end{cases} \tag{7}$$

$$ds_0^+/dx = -\delta(x - x^*), \quad ds_0^-/dx = \delta(x - x^*)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция. Точка x^* на верхнем (нижнем) электроде отделяет катодную (анодную) область $(0, x^*)$ от анодной (катодной) области (x^*, b) и определяется из решения для нулевого приближения.

При зависимостях (7) интегралы i_ν $(\nu = 1,\ldots,4)$ и снимаемый ток J_1 даются формулами

$$i_1 = -\left(\frac{(1+a)(a^2-k^2)}{1-a}\right)^{1/2} \int\limits_k^1 \left(\frac{1+\tau}{(1-\tau)(\tau^2-k^2)}\right)^{1/2} \frac{d\tau}{a+\tau}, \qquad i_2 = \ln\frac{1-a}{a-k}$$

$$i_3 = -i_2 + \left(\frac{(a^2-k^2)(1-a)}{1+a}\right)^{1/2} \int\limits_k^1 \left(\frac{1+\tau}{(1-\tau)(\tau^2-k^2)}\right)^{1/2} \frac{d\tau}{a-\tau} \tag{8}$$

$$i_4 = 4a\chi i_5, \quad i_5 = \int\limits_3^k \left(\frac{1-\tau^2}{k^2-\tau^2}\right)^{1/2} \frac{d\tau}{a^2-\tau^2}, \quad J_1 = \frac{1}{\pi}\left[-\pi\alpha^* + 4a\chi(\alpha^* i_5 - i_6)\right]$$

$$i_6 = \int\limits_k^1 \left(\frac{1-\tau^2}{\tau^2-k^2}\right)^{1/2} \frac{d\tau}{a^2-\tau^2} \qquad \left(\chi = \left(\frac{a^2-k^2}{1-a^2}\right)^{1/2}, \quad k \leqslant a = k\,\mathrm{ch}\,\pi x^* \leqslant 1\right)$$

Обратим внимание, что при зависимостях (7) плотность тока на электродах в точке $x = x^*$ обращается в неинтегрируемую бесконечность. Поэтому интеграл i_6 — расходящийся. Это объясняется тем, что потенциал задается разрывной функцией, тогда как, строго говоря, он должен быть непрерывным вдоль стенок канала. Конечно, вблизи точки $x = x^*$ нарушается возможность представления функций в виде рядов (2). Однако интегральные величины (например ток J_1) можно определять по приведен-

[1] Это справедливо при достаточно больших плотностях тока для металлических электродов [5].

ным выше формулам, рассматривая соответствующие интегралы (например i_6) как особые (в смысле Коши) и вычисляя их главные значения.

Определим ток J_1. Главное значение интеграла i_6 и интеграл i_5 равны

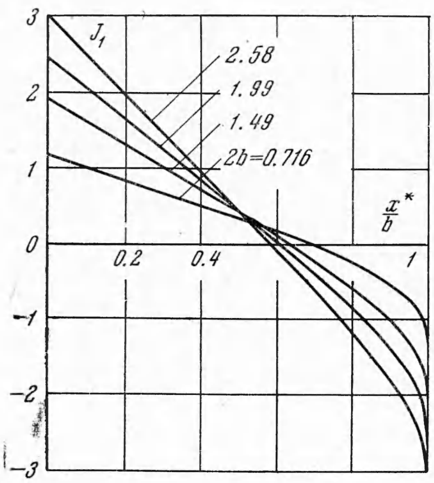
$$i_6 = K(k') + \frac{1}{\chi}\left[\frac{1}{2a}\ln\frac{(1+a)(a-k)}{(1-a)(a+k)} - \int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{ctg}(\nu+\nu_*)\,d\nu}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\nu}}\right]$$

$$i_5 = K(k) + \frac{1-a^2}{a^2}\prod\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{k^2}{a^2},\ k\right) \qquad (k'\sin\nu_* = \sqrt{1-a^2}) \tag{9}$$

Здесь П — полный эллиптический интеграл третьего рода. Предельные переходы $a \to k$ и $a \to 1$ в формуле (8), с учетом (9), приводят к результатам $J_1 = \alpha^*$ при $x^* = 0$, $J_1 = -\alpha^*$ при $x^* = b = \lambda / h$.

Нетрудно заметить, что эти результаты будут решениями известной задачи о распределении тока в канале, когда между электродами поддерживается разность потенциалов, равная единице [6,7]

На фиг. 2 построены зависимости $J_1(x^* / b)$. Параметром кривых является величина $2b = 2\lambda / h$. Если весь верхний электрод работает в режиме катода, то $x^* / b = 1$, и потери тока за счет приэлектродных эффектов наиболее значительны. При появлении вблизи концов электродов зон обратных токов эти потери уменьшаются. Для каждого b имеется интервал $0 \leqslant x^* < x^{**} < b$, в котором $J_1 > 0$. Таким образом, если концевой эффект выражен очень сильно (участок электрода с обратным направлением тока значителен), приэлектродные процессы, для которых справедливы зависимости (7), могут приводить к увеличению снимаемого тока. Однако необходимо помнить, что практическое значение, безусловно, имеют такие x^* / b, при которых бо́льшая часть верхнего (нижнего) электрода работает в режиме катода (анода), ибо в противном случае суммарные характеристики устройства (в основном определяемые по нулевому приближению) оказываются очень низкими.



Фиг. 2

То обстоятельство, что при $x^* = {}^1/_2\, b$ ток $J_1 \neq 0$, объясняется наличием краевого эффекта. Если бы на прямых NB и MC выполнялось условие $j_x = 0$, то $J_1({}^1/_2) = 0$. С увеличением b влияние краевого эффекта ослабляется. Поэтому точка x^{**}, в которой $J_1 = 0$, приближается к $x^* = {}^1/_2\, b$.

Поступила 1 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б. Электрические поля в магнитогидродинамических каналах при наличии приэлектродного падения потенциала. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, стр. 441—450.
2. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей среды по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 548—556.
3. Sutton G. W., Hurwitz H. Jr., Poritsky H. Electrical and pressure losses in a magnetohydrodynanmic channel due to end current loops. Commun. and Electronics, 1962, No 5, p. 687—695.
4. Ватажин А. Б. Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1962, № 1, стр. 52—58.
5. Любимов Г. А. О приэлектродных слоях на горячих электродах. ПМТФ, 1965, № 4, 45—53.
6. Табакс К. К. Расчет электрического поля электромагнитного насоса постоянного тока. Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, т. 21
7. Ватажин А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогидродинамического генератора. ПМТФ, 1962, № 5, стр. 59—69.